Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.51

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Э. Шамбилова

Аннотация. Изучена задача о характеризации весовых неравенств на конусах Лебега монотонных функций на полуоси для одного класса квазилинейных интегральных операторов.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовое пространство Лебега, квазилинейный интегральный оператор.

1. Введение

Обозначим через $\mathfrak{M}^+$ множество всех неотрицательных измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, $\mathfrak{M}^\downarrow \subset \mathfrak{M}^+$ — подмножество всех невозрастающих функций.

Пусть $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^+$, $0 < p, r < \infty$, $0 < q \leq \infty$.

В работе изучается задача о характеризации неравенства

$$\left(\int_0^\infty [Rf(x)]^r \rho(x)\,dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{1}$$

где константа C не зависит от f и полагается выбранной наименьшей из возможных. В качестве R рассматриваются квазилинейные интегральные операторы вида

$$Tf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t fu \right)^q w(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{2}$$

$$\mathscr{T}f(x) := \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty fu \right)^q w(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{3}$$

$$Sf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty fu \right)^q w(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента России для ведущих научных школ (проект НШ № 4479.2014.1).

$$\mathscr{S}f(x) := \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}. \tag{5}$$

Основным методом решения задачи является метод редукции (см., например, [1–4]) весовых неравенств (1) на конусах монотонных функций к весовым неравенствам на конусах неотрицательных функций, исследованных, в частности, в [5, 6]. В отличие от работ [5, 6] у нас появляется дополнительная суперпозиция (см. ниже неравенство (11)) так, что в целом задача становится более громоздкой, но ее удается редуцировать к неравенствам на $\mathfrak{M}^+$, изученным в [5, 6], и найти точные выражения для характеризующих функционалов, зависящих только от весовых функций и параметров суммирования исходной задачи. Отметим, что неравенства (1) играют важную роль в теории пространств Морри (см., например, [7–9]). В случае $r = q$ неравенства (2)–(5) исследованы, например, в [10–20].

В разд. 2 получен критерий выполнения неравенства (1) с оператором T, в разд. 3 — с оператором S, в разд. 4 сформулированы результаты для операторов (3) и (5).

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей только от p, q и r; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. Через $\mathbb{Z}$ обозначается множество всех целых чисел, χ_E – характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset (0, \infty)$. Если $1 \le p \le \infty$, то $p' := \frac{p}{p-1}$ при $1 < p < \infty$, $p' := \infty$ при $p = 1$ и $p' := 1$ при $p = \infty$.

2. Оператор *T*

Положим

$$V(t) := \int\limits_0^t v, \quad U(t) := \int\limits_0^t u, \quad W(t) := \int\limits_t^\infty w, \quad 0 < t < \infty.$$

Будем считать для простоты, что $0 < \int\limits_0^x \rho < \infty$, $0 < \int\limits_x^\infty w < \infty$ при любом $x > 0$ и $\int\limits_0^\infty \rho = \infty$, $\int\limits_0^\infty w = \infty$. Определим последовательность $\{a_n\} \subset (0; \infty)$ из уравнений

$$\int\limits_0^{a_n} \rho = 2^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть функции $\sigma : [0; \infty) \to [0; \infty)$ и $\sigma^{-1} : [0; \infty) \to [0; \infty)$ задаются формулами (здесь $\inf \varnothing = \infty$)

$$\sigma(x) := \inf\left\{y > 0 : \int\limits_0^y \rho \ge 2\int\limits_0^x \rho\right\}, \ \sigma^{-1}(x) := \inf\left\{y > 0 : \int\limits_0^y \rho \ge \frac{1}{2}\int\limits_0^x \rho\right\}, \ x \ge 0. \tag{6}$$

Тогда σ и σ^{-1} — возрастающие функции, причем $\int\limits_0^{\sigma(x)} \rho = 2\int\limits_0^x \rho$, $\int\limits_0^{\sigma^{-1}(x)} \rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \rho$. В частности, $\sigma(a_n) = a_{n+1}$, $a_n = \sigma^{-1}(a_{n+1})$.

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\mathscr{T}_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(t)}^{x} \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^p, \tag{7}$$

$$\mathscr{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(c)}^{x} \left(\int\limits_s^d h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^p, \tag{8}$$

$$\|\mathscr{T}_t\|_{L^p_v \to L^q_w} := \sup_{0 \ne h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int\limits_0^\infty [\mathscr{T}_t h]^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty [h]^p v \right)^{\frac{1}{p}}} \tag{9}$$

и аналогично для $\|\mathscr{T}_{[c,d]}\|_{L^p_v \to L^q_w}$.

Теорема 1. *Пусть $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C_T в неравенстве*

$$\left(\int\limits_0^\infty [Tf(x)]^r \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le C_T \left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{10}$$

выполняется оценка $C_T \approx A_1 + A_2 + B$, где A_1, A_2 — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) [W(x)]^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A_1^p \int\limits_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \left[\left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_y^\infty h \right)^{\frac{q}{p}} [U(y)]^q w(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A_2^p \int\limits_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа B имеет вид

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho \right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x), \sigma(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Доказательство. Пусть $[f(x)]^p =: \int\limits_x^\infty h$, $h \in \mathfrak{M}^+$, тогда неравенство (10) эквивалентно неравенству

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^y \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^q w(y)\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{p}{r}} \le C_T^p \int\limits_0^\infty hV, \; h \in \mathfrak{M}^+. \tag{11}$$

Оценка сверху. В дальнейшем будем использовать известное соотношением (см., например, [21, предложение 2.1])

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \Big(\sum_{i\geq n} a_i\Big)^s \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n a_n^s, \tag{12}$$

верное для любых последовательностей неотрицательных чисел и $s > 0$. Обозначим

$$\mathfrak{T}_p h(y) := \left(\int_0^y \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^p.$$

Имеем

$$J = \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\left(\int_x^\infty w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \approx \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^\infty w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$= \sum_n 2^n \left(\sum_{i\geq n}\int_{a_i}^{a_{i+1}} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \approx \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w(y)(\mathfrak{T}_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$\approx \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^{a_{n-1}} \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^r$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w(y)\left(\int_{a_{n-1}}^y \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: J_1 + J_2.$$

Далее,

$$J_1 \approx \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^{a_{n-1}} \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^r$$

$$\leq \sum_n \int_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)[W(x)]^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^x \left(\int_s^\infty h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^r dx$$

$$= \int_0^\infty \rho(x)[W(x)]^{\frac{r}{q}} (\mathscr{T}_p h(x))^{\frac{r}{p}}\,dx \leq A_1^r \left(\int_0^\infty hV\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Таким образом,

$$J_1^{\frac{p}{r}} \ll A_1^p \int_0^\infty hV.$$

Запишем

$$J_2 \approx \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w(y)\left(\int_{a_{n-1}}^y \left(\int_s^{a_{n+1}} h\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w(y)\left(\int_{a_{n-1}}^y u\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{a_{n+1}}^\infty h\right)^{\frac{r}{p}} =: J_{2,1} + J_{2,2}.$$

Имеем

$$J_{2,2} \approx \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} [U(y)]^q w(y) \left(\int\limits_y^\infty h \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty [U(y)]^q w(y) \left(\int\limits_y^\infty h \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \leq A_2^r \left(\int\limits_0^\infty hV \right)^{\frac{r}{p}},$$

тем самым

$$J_{2,2}^{\frac{p}{r}} \ll A_2^p \int\limits_0^\infty hV.$$

Используя обозначения (7) и (8), запишем

$$J_{2,1} = \sum_n 2^n \left[\left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} w(y) (\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]} h(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\leq \sum_n 2^n \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1_V[a_{n-1},a_{n+1}] \to L_w^{\frac{q}{p}}[a_n,a_{n+1}]} \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{a_{n+1}} hV \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Рассмотрим случай $p \leq r$. Применяя неравенство Йенсена, получим

$$J_{2,1} \leq \sup_n 2^n \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_0^\infty hV \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Отсюда

$$J_{2,1}^{\frac{p}{r}} \leq \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho \right)^{\frac{p}{r}} \|\mathscr{T}_t\|_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}} \int\limits_0^\infty hV.$$

Следовательно,

$$J_{2,1}^{\frac{p}{r}} \leq B^p \int\limits_0^\infty hV.$$

Рассмотрим случай $r < p$. Применяя неравенство Гёльдера ($\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$), имеем

$$J_{2,1} \leq \left(\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right)^{\frac{r}{s}} \left(\int\limits_0^\infty hV \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_n,a_{n+1}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}} \approx \sum_n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho \right) \left(\int\limits_0^{a_n} \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(a_{n+1}),\sigma(a_n)]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}}$$

$$\leq \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx = B^s,$$

оценка сверху $C_T \ll A_1 + A_2 + B$ доказана.

Оценка снизу. Сужая области интегрирования $[0, y] \to [0, x]$ и $[s, \infty) \to [y, \infty)$ в неравенстве (11), находим

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) [W(x)]^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^x \left(\int_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le C_T^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^\infty \left(\int_y^\infty h \right)^{\frac{q}{p}} [U(y)]^q w(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{p}{r}} \le C_T^p \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

откуда $A_1 \le C_T$, $A_2 \le C_T$.

Из неравенства (6) следует, что

$$\left(\int_0^t \rho \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_t^\infty \left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^y \left(\int_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^q w(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \le C_T^p \int_{\sigma^{-1}(t)}^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

поэтому $C_T \gg B$, и теорема доказана при $p \le r$.

Осталось получить доказательство оценки снизу при $r < p$. Имеем

$$\begin{aligned} B^s &= \int_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x), \sigma(x)]}\|_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx \\ &= \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho \right) \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x), \sigma(x)]}\|_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx \\ &\le \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\, dx \left(\int_0^{a_{n+1}} \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(a_{n-1}), \sigma(a_{n+1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} \\ &\approx \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-2}, a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$B^s \ll \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-2}, a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} =: \mathscr{B}^s.$$

Пусть $\theta \in (0, 1)$ — произвольное фиксированное число. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует $h_n \in L_V^1[a_{n-3}, a_{n+2}]$ такая, что $\|h_n\|_{L_V^1[a_{n-3}, a_{n+2}]} = 1$ и

$$\|\mathscr{T}_{[a_{n-2}, a_{n+2}]} h_n\|_{L_w^{\frac{q}{p}}} \ge \theta \|\mathscr{T}_{[a_{n-2}, a_{n+2}]}\|_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}.$$

Положим

$$g_n := 2^{\frac{ns}{r}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-2}, a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} h_n, \quad \mathbf{T}_n := \|\mathscr{T}_{[a_{n-2}, a_{n+2}]}\|_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}, \quad g := \sum g_n.$$

Тогда

$$\|g\|_{L_V^1} \ll \sum_n \int_{a_{n-3}}^{a_{n+2}} g_n V = \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \mathscr{B}^s.$$

С другой стороны,

$$D := \int\limits_0^\infty \rho(x)\left(\int\limits_x^\infty (\mathfrak{T}_p g)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{r}{q}} dx \gg \sum_n \int\limits_{a_{n-3}}^{a_{n-2}} \rho(x)\,dx \left[\left(\int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+2}} (\mathfrak{T}_p g)^{\frac{q}{p}} w\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\gg \sum_n 2^n \left[\left[\int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+2}} \left[\left[\int\limits_{a_{n-3}}^{x} \left(\int\limits_s^{a_{n+2}} g_n\right)^{\frac{1}{p}} u(s)\,ds\right]^p\right]^{\frac{q}{p}} w(x)\,dx\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^n \left[\left[\int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+2}} (\mathscr{T}_{[a_{n-2},a_{n+2}]} g_n)^{\frac{q}{p}} w\right]^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^n 2^{\frac{ns}{p}} \mathbf{T}_n^{\frac{sr}{p^2}} \|\mathscr{T}_{[a_{n-2},a_{n+2}]} h_n\|^{\frac{r}{p}}_{L_w^{\frac{q}{p}}} \geq \theta^{\frac{r}{p}} \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \theta^{\frac{r}{p}} \mathscr{B}^s.$$

Из неравенства (11) имеем $\mathscr{B}^s C_T^p \gg C_T^p \|g\|_{L_V^1} \overset{(11)}{\geq} D^{\frac{p}{r}} \gg \theta \mathscr{B}^{\frac{sp}{r}}$ Следовательно, $C_T \gg \theta^{\frac{1}{p}} \mathscr{B} \geq \theta^{\frac{1}{p}} B$. Отсюда в силу произвольности $\theta \in (0,1)$ получаем, что $C_T \gg B$. $\square$

Найдем явные выражения для функционалов, эквивалентных константам A_1, A_2 и нормам $\|\mathscr{T}_t\|_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}$ и $\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L_V^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}$. Для этого нам потребуются некоторые частные случаи результатов работ [5, 6], которые приводим ниже (теоремы A, B, C и леммы 1, 2) в более удобных для нас формулировках.

Пусть $u \in \mathfrak{M}^+$ и функции $\zeta : [0;\infty) \to [0;\infty)$ и $\zeta^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty)$ задаются формулами (здесь $\sup \varnothing = 0$)

$$\zeta(x) := \sup\left\{y > 0 : \int\limits_y^\infty \omega \geq \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty \omega\right\}, \quad \zeta^{-1}(x) := \sup\left\{y > 0 : \int\limits_y^\infty \omega \geq 2\int\limits_x^\infty \omega\right\}. \tag{13}$$

Теорема A [5, 6]. *Пусть $0 < r < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Для выполнения неравенства*

$$\left(\int\limits_0^\infty w(x)\left(\int\limits_0^x u(y)\left(\int\limits_y^\infty h\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_\tau \int\limits_0^\infty hv, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \tag{14}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left(\int\limits_0^\infty w(x)\left(\int\limits_0^x u\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^\infty h\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \mathscr{A}_0 \int\limits_0^\infty hv, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

и конечности константы

$$\mathscr{A}_1 := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty w\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{H}_t\|_{L_v^1 \to L_u^q}, & 1 \leq r, \\ \left(\int\limits_0^\infty w(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty w\right) \|\mathscr{H}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L_v^1 \to L_u^q}\right]^{\frac{r}{1-r}} dx\right)^{\frac{1-r}{r}}, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

где ζ задается формулой (13) при $\omega = w$ и

$$\mathscr{H}_d h(x) := \chi_{(0,d]}(x) \int\limits_x^\infty h, \quad \mathscr{H}_{[c,d]} h(x) := \chi_{(c,d]}(x) \int\limits_x^{\zeta(d)} h, \quad 0 \le c < d < \infty, \tag{15}$$

причем $C_\tau \approx \mathscr{A}_0 + \mathscr{A}_1$.

Пусть теперь $\xi : [0;\infty) \to [0;\infty)$ и $\xi^{-1} : [0;\infty) \to [0;\infty)$ заданы в виде (здесь $\inf \varnothing = \infty$, $x \ge 0$)

$$\xi(x) := \inf\left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \Omega \ge 2 \int\limits_0^x \Omega \right\}, \quad \xi^{-1}(x) := \inf\left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \Omega \ge \frac{1}{2} \int\limits_0^x \Omega \right\}. \tag{16}$$

Теорема B [5, 6]. *Пусть $0 < r < \infty$, $0 < q \le \infty$. Для выполнения неравенства*

$$\left(\int\limits_0^\infty w(x) \left(\int\limits_x^\infty u(y) \left(\int\limits_y^\infty h \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r}} \le C_s \int\limits_0^\infty hv, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \tag{17}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left(\int\limits_0^\infty w(x) \left(\int\limits_x^{\xi^2(x)} u \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{\xi^2(x)}^\infty h \right)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \le \mathscr{B}_0 \int\limits_0^\infty hv, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

и конечности константы

$$\mathscr{B}_1 := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t w \right)^{\frac{1}{r}} \|H_t\|_{L^1_v \to L^q_u}, & 1 \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty w(x) \left[\left(\int\limits_0^x w \right) \|H_{[\xi^{-1}(x), \xi(x)]}\|_{L^1_v \to L^q_u} \right]^{\frac{r}{1-r}} dx \right)^{\frac{1-r}{r}}, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

где ξ задается формулой (16) при $\Omega = w$ и

$$H_c h(x) := \chi_{[c,\infty)}(x) \int\limits_x^\infty h, \quad H_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d)}(x) \int\limits_x^{\xi(d)} h, \quad 0 < c < d \le \infty.$$

Более того, $C_s \approx \mathscr{B}_0 + \mathscr{B}_1$.

Предложение 1. *Пусть $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ при $r < p$. Тогда для константы A_1 в теореме 1 выполнено соотношение*

$$A_1 \approx A_{1,0} + A_{1,1}, \tag{18}$$

где

$$A_{1,0} = \sup_{t>0} [V(t)]^{-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^t \rho W^{\frac{r}{q}} U^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad p \le r, \tag{19}$$

$$A_{1,0} \approx \left(\int\limits_0^\infty [V(t)]^{-\frac{s}{p}} \left(\int\limits_0^t \rho W^{\frac{r}{q}} U^r \right)^{\frac{s}{p}} \rho(t) [W(t)]^{\frac{r}{q}} [U(t)]^r \, dt \right)^{\frac{1}{s}}, \quad r < p. \tag{20}$$

При $p \le r$

$$A_{1,1} = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \rho W^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \sup_{0<s<t} \frac{U(s)}{[V(s)]^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 < p \le 1, \tag{21}$$

$$A_{1,1} \approx \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \rho W^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t \left(\frac{U}{V} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad p > 1, \tag{22}$$

При $r < p \le 1$

$$A_{1,1} \approx \left(\int_0^\infty \rho(x)[W(x)]^{\frac{r}{q}} \left[\left(\int_x^\infty \rho W^{\frac{r}{q}} \right) \sup_{\zeta^{-1}(x)<t<\zeta(x)} \frac{\left(\int_{\zeta^{-1}(x)}^t u \right)^p}{V(t)} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}}, \tag{23}$$

при $r < p$, $p > 1$

$$A_{1,1}^s \approx \int_0^\infty \rho(x)[W(x)]^{\frac{r}{q}} \left[\left(\int_x^\infty \rho W^{\frac{r}{q}} \right) \left(\int_{\zeta^{-1}(x)}^{\zeta(x)} \left(\frac{\int_{\zeta^{-1}(x)}^t u}{V(t)} \right)^{\frac{1}{p-1}} u(t)\, dt \right)^{p-1} \right]^{\frac{s}{p}} dx, \tag{24}$$

где ζ *задается формулой* (13) *при* $\omega = \rho W^{\frac{r}{q}}$.

Для константы A_2 *в теореме* 1 *выполняется*

$$A_2 \approx A_{2,0} + A_{2,1}, \tag{25}$$

где

$$A_{2,0} = \sup_{t>0} [V(t)]^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\sigma^{-2}(t)} \rho(x) \left(\int_x^{\sigma^2(x)} wU^q \right)^{\frac{r}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r}}, \quad p \le r, \tag{26}$$

$$A_{2,0} \approx \left(\int_0^\infty [V(\sigma^2(t))]^{-\frac{s}{p}} \left(\int_0^t \rho(x) \left(\int_x^{\sigma^2(x)} wU^q \right)^{\frac{r}{q}} dx \right)^{\frac{s}{p}} \rho(t) \left(\int_t^{\sigma^2(t)} wU^q \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{s}} \tag{27}$$

при $r < p$. *Для второго слагаемого в* (25) *выполнено*

$$A_{2,1}^p \approx \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho \right)^{\frac{p}{r}} \|H_t\|_{L_V^1 \to L_{wU^q}^{\frac{q}{p}}}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int_0^x \rho \right) \|H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L_V^1 \to L_{wU^q}^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{r}{p-r}} dx \right)^{\frac{p-r}{r}}, & r < p, \end{cases}$$

где σ *определена в* (6), *а нормы операторов* H_t *и* $H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}$ *характеризуются следующими функционалами:*

$$\|H_t\|_{L_V^1 \to L_{wU^q}^{\frac{q}{p}}} \approx \sup_{s>t} [V(s)]^{-1} \left(\int_t^s wU^q \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p \le q, \tag{28}$$

$$\|H_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{wU^q}} \approx \left(\int_t^\infty \left(\int_t^s wU^q \right)^{\frac{q}{p-q}} [V(s)]^{-\frac{q}{p-q}} w(s) [U(s)]^q \, ds \right)^{\frac{p-q}{q}}, \quad q < p. \tag{29}$$

Аналогично

$$\|H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{wU^q}} \approx \sup_{\sigma^{-1}(x) < s < \sigma(x)} [V(s)]^{-1} \left(\int_{\sigma^{-1}(x)}^s wU^q \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p \le q, \tag{30}$$

$$\|H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_{wU^q}} \approx \left(\int_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \left(\int_{\sigma^{-1}(x)}^s wU^q \right)^{\frac{q}{p-q}} [V(s)]^{-\frac{q}{p-q}} w(s) [U(s)]^q \, ds \right)^{\frac{p-q}{q}} \tag{31}$$

при $q < p$.

Доказательство. Оценка A_1. По теореме А получаем (18), где $A_{1,0}$ — наилучшая константа в неравенстве

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) [W(x)]^{\frac{r}{q}} [U(x)]^r \left(\int_x^\infty h \right)^{\frac{r}{p}} dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A^p_{1,0} \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Тогда равенство (19) вытекает из общей теоремы [22, гл. XI, § 1.5, теорема 4], а (20) — из теоремы 3.3 из [23]. Для константы $A_{1,1}$ по теореме А находим, что

$$A^p_{1,1} = \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_t^\infty \rho W^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{p}{r}} \|\mathscr{H}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x) [W(x)]^{\frac{r}{q}} \left[\left(\int_x^\infty \rho W^{\frac{r}{q}} \right) \|\mathscr{H}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{p}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Оценивая норму $\|\mathscr{H}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u}$ по общей теореме [22, гл. XI, § 1.5, теорема 4] при $0 < p \le 1$ и по теореме 3.3 из [23] при $p > 1$, получаем формулы (21) и (22). Из аналогичных оценок нормы $\|\mathscr{H}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u}$ вытекают (23), (24).

Оценка A_2. По теореме В следует (25), где $A_{2,0}$ — наилучшая константа в неравенстве

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \left(\int_x^{\sigma^2(x)} wU^q \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty h \right)^{\frac{r}{p}} dx \right)^{\frac{p}{r}} \le A^p_{2,0} \int_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Тогда (26) следует из теоремы в [22, гл. XI, § 1.5, теорема 4], а (27) из [23, 24]. Таким же образом доказываются (28)–(31). $\square$

Для доказательства следующих двух предложений потребуется модификация теоремы А.

Лемма 1. *Пусть $0 < r < \infty$, $0 < q \le \infty$, $0 < c < a < b \le \infty$. Для выполнения неравенства*

$$\left(\int\limits_a^b w(x)\left(\int\limits_c^x u(y)\left(\int\limits_y^b h\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\int\limits_c^b hv, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \tag{32}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left(\int\limits_a^b w(x)\left(\int\limits_c^x u\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^b h\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le A_0\int\limits_c^b hv, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

и конечности константы

$$A_1 := \begin{cases} \sup\limits_{a<t<b}\left(\int\limits_t^b w\right)^{\frac{1}{r}} \|H_t\|_{L^1_v \to L^q_u}, & 1 \le r, \\ \left(\int\limits_{\zeta(a)}^b w(x)\left[\left(\int\limits_x^b w\right)\|H_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_v\to L^q_u}\right]^{\frac{r}{1-r}} dx\right)^{\frac{1-r}{r}}, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

где ζ задается формулой

$$\begin{aligned} \zeta(x) &:= \sup\left\{y \in (a,b) : \int\limits_y^b w \ge \frac{1}{2}\int\limits_x^b w\right\}, \\ \zeta^{-1}(x) &:= \sup\left\{y \in (\zeta(a),b) : \int\limits_y^b w \ge 2\int\limits_x^b w\right\}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$H_t h(z) := \chi_{(c,t)}(z)\int\limits_z^b h, \quad H_{[s,t]}h(z) := \chi_{(s,t)}(z)\int\limits_z^{\zeta(t)} h, \quad a < s < t < b, \tag{34}$$

причем $C \approx A_0 + A_1$.

Предложение 2. *Пусть $0 < q \le \infty$, $0 < p \le r < \infty$, $t > 0$. Тогда для нормы $\|\mathscr{T}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}$, входящей в выражение для константы B в теореме 1, выполнены следующие соотношения:*

$$\|\mathscr{T}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w} \approx \mathbb{A}_0(t) + \mathbb{A}_1(t), \tag{35}$$

где при $p \le q$

$$\mathbb{A}_0(t) = \sup_{s>t}[V(s)]^{-1}\left(\int\limits_t^s w(z)\left(\int\limits_{\sigma^{-1}(t)}^z u\right)^q dz\right)^{\frac{p}{q}}, \tag{36}$$

$$\mathbb{A}_1(t) \approx \sup_{s>\sigma^{-1}(t)}\left(\int\limits_s^\infty \chi_{[t,\infty)} w\right)^{\frac{p}{q}} \sup_{\sigma^{-1}(t)<z<s}[V(z)]^{-1}\left(\int\limits_{\sigma^{-1}(t)}^z u\right)^p, \quad 0 < p \le 1, \tag{37}$$

$$\mathbb{A}_1(t) \approx \sup_{s>\sigma^{-1}(t)} \left(\int_s^\infty \chi_{[t,\infty)} w \right)^{\frac{p}{q}}$$
$$\times \left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^s \left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^z u \right)^{\frac{1}{p-1}} [V(z)]^{-\frac{1}{p-1}} u(z)\, dz \right)^{p-1}, \quad p>1, \tag{38}$$

а при $q<p$ с функцией ζ_t, построенной по формулам (33) *с* $a=t$, $b=\infty$,

$$\mathbb{A}_0(t) \approx \left(\int_t^\infty \left(\int_t^s w(z) \left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^z u \right)^q dz \right)^{\frac{q}{p-q}} [V(s)]^{-\frac{q}{p-q}} w(s) \left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^s u \right)^q ds \right)^{\frac{p-q}{q}} \tag{39}$$

$$\mathbb{A}_1(t) \approx \left(\int_{\zeta(t)}^\infty w(x) \left[\left(\int_x^\infty w \right) \sup_{\zeta_t^{-1}(x)<s<\zeta_t(x)} [V(s)]^{-1} \left(\int_{\zeta^{-1}(x)}^s u \right)^p \right]^{\frac{q}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{q}} \tag{40}$$

при $0<p\le 1$ *и*

$$[\mathbb{A}_1(t)]^{\frac{q}{p-q}}$$
$$\approx \int_{\zeta(t)}^\infty w(x) \left[\left(\int_x^\infty w \right) \left(\int_{\zeta_t^{-1}(x)}^{\zeta_t(x)} \left(\int_{\zeta_t^{-1}(x)}^z u \right)^{\frac{1}{p-1}} [V(z)]^{-\frac{1}{p-1}} u(z)\, dz \right)^{p-1} \right]^{\frac{q}{p-q}} dx \tag{41}$$

при $p>1$.

Доказательство. Для оценки нормы $\|\mathscr{T}_t\| := \|\mathscr{T}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}$ оператора $\mathscr{T}_t$, определенного в (7), необходимо изучить неравенство

$$\left(\int_t^\infty \left[\left(\int_{\sigma^{-1}(t)}^x \left(\int_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^p \right]^{\frac{q}{p}} w(x)\, dx \right)^{\frac{p}{q}} \le \|\mathscr{T}_t\| \int_{\sigma^{-1}(t)}^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Для этого достаточно применить лемму 1 при $a=t$, $c=\sigma^{-1}(t)$, $b=\infty$, $q=\frac{1}{p}$, $r=\frac{q}{p}$ и $v=V$. $\square$

Предложение 3. *Пусть* $0<q\le\infty$, $0<r<p<\infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r}-\frac{1}{p}$. *Тогда для нормы* $\|\mathscr{T}_x\| := \|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}$, $x>0$, *входящей в выражение для константы* B *в теореме* 1, *выполнены следующие соотношения:*

$$\|\mathscr{T}_x\| \approx \mathbf{A}_0(x) + \mathbf{A}_1(x), \tag{42}$$

где

$$\mathbf{A}_0(x) = \sup_{\sigma^{-1}(x)<s<\sigma(x)} [V(s)]^{-1} \left(\int_{\sigma^{-1}(x)}^s w(z) \left(\int_{\sigma^{-2}(x)}^z u \right)^q dz \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p\le q, \tag{43}$$

$$[\mathbf{A}_0(x)]^{\frac{q}{p-q}}$$

$$\approx \int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{s} w(z) \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{z} u \right)^q dz \right)^{\frac{q}{p-q}} [V(s)]^{-\frac{q}{p-q}} w(s) \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{s} u \right)^q ds \quad (44)$$

при $q < p$. Для второго слагаемого в (42) выполняется

$$\mathbf{A}_1(x) \approx \sup_{\sigma^{-1}(x)<t<\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{t} w \right)^{\frac{p}{q}} \|\mathscr{H}_t\|_{L^1_{V_{x,y}} \to L^{\frac{1}{p}}_{u_{x,y}}}, \quad p \le q,$$

$$\mathbf{A}_1(x) \approx \left(\int\limits_{\zeta_x(\sigma^{-1}(x))}^{\sigma(x)} w(z) \left[\left(\int\limits_{x}^{\sigma(x)} w \right) \|\mathscr{H}_{[\zeta_x^{-1}(z),\zeta_x(z)]}\|_{L^1_{V_{x,y}} \to L^{\frac{1}{p}}_{u_{x,y}}} \right]^{\frac{q}{p-q}} dz \right)^{\frac{p-q}{q}}$$

при $q < p$, где ζ_x определяется по формуле (33) при $a = \sigma^{-1}(x)$, $c = \sigma^{-2}(x)$, $b = \sigma(x)$, а операторы $\mathscr{H}_{[\zeta_x^{-1}(z),\zeta_x(z)]}$ и $\mathscr{H}_t$ — по формуле (34). Для норм этих операторов выполняются следующие соотношения. При $p \le q$

$$\|\mathscr{H}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u} = \sup_{\sigma^{-2}(x)<s<\sigma(x)} [V(s)]^{-1} \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{s} u \right)^p, \quad 0 < p \le 1, \quad (45)$$

$$\|\mathscr{H}_t\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u} \approx \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{\sigma(x)} \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{s} u \right)^{\frac{1}{p-1}} [V(s)]^{-\frac{1}{p-1}} u(s)\, ds \right)^{p-1}, \quad p > 1. \quad (46)$$

При $q < p$

$$\|\mathscr{H}_{[\zeta_x^{-1}(z),\zeta_x(z)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u} = \sup_{\zeta_x^{-1}(z)<t<\zeta_x(z)} [V(t)]^{-1} \left(\int\limits_{\zeta_x^{-1}(z)}^{t} u \right)^p, \quad 0 < p \le 1, \quad (47)$$

$$\|\mathscr{H}_{[\zeta_x^{-1}(z),\zeta_x(z)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{1}{p}}_u} \approx \left(\int\limits_{\zeta_x^{-1}(z)}^{\zeta_x(z)} \left(\int\limits_{\zeta_x^{-1}(z)}^{t} u \right)^{\frac{1}{p-1}} [V(t)]^{-\frac{1}{p-1}} u(t)\, dt \right)^{p-1}, \quad p > 1. \quad (48)$$

Доказательство. Для оценки нормы $\|\mathscr{T}_x\|$ оператора $\mathscr{T}_{[\sigma^{-2}(x),\sigma(x)]}$, определенного в (8), необходимо изучить неравенство

$$\left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \left[\left(\int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{z} \left(\int\limits_{s}^{\sigma(x)} h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^p \right]^{\frac{q}{p}} w(z)\, dz \right)^{\frac{p}{q}} \le \|\mathscr{T}_x\| \int\limits_{\sigma^{-2}(x)}^{\sigma(x)} hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+.$$

Для этого достаточно применить лемму 1 при $a = \sigma^{-1}(x)$, $c = \sigma^{-2}(x)$, $b = \sigma(x)$, $q = \frac{1}{p}$, $r = \frac{q}{p}$ и $v = V$, а также оценки норм операторов Харди, использованные в доказательстве предложения 1. $\square$

3. Основные результаты для оператора S

Пусть

$$\widetilde{u} := \frac{u}{V^{\frac{2}{p}}}, \quad \widetilde{U}(t) := \int_t^\infty \tilde{u}, \quad 0 < t < \infty.$$

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$T_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int_x^{\sigma(t)} \left(\int_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^p, \tag{49}$$

$$T_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int_x^{\sigma(d)} \left(\int_c^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^p, \tag{50}$$

$$\|T_t\|_{L^p_v \to L^q_w} := \sup_{0 \ne h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int_0^\infty [T_t h]^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^\infty [h]^p v \right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{51}$$

и аналогично для $\|T_{[c,d]}\|_{L^p_v \to L^q_w}$.

Теорема 2. *Пусть $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C_S в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty [Sf(x)]^r \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le C_S \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{52}$$

выполняется оценка

$$C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{B},$$

где $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^\infty \left(\int_0^y hV \right)^{\frac{q}{p}} [\widetilde{U}(y)]^q w(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_1^p \int_0^\infty h, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \left(\int_x^{\sigma^2(x)} w \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty \left(\int_0^s hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_2^p \int_0^\infty h, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbb{B}$ имеет вид

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho \right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x) \left[\int_0^x \rho \|T_{[\sigma^{-1}(x), \sigma(x)]}\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_w} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Доказательство. В отличие от теоремы 1 здесь применим теорему 3.2 из [4], тогда неравенство (52) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty\left(\int_y^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{r}}\le C_S^p\int_0^\infty h,\quad h\in\mathfrak{M}^+. \tag{53}$$

Оценка сверху. Обозначим

$$T_ph(y):=\left(\int_y^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^p.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
I:=\sum_n\int_{a_n}^{a_{n+1}}\rho(x)\left(\int_x^\infty w(y)(T_ph(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}dx\approx\sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^\infty w(y)(T_ph(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\\
=\sum_n 2^n\left(\sum_{i\ge n}\int_{a_i}^{a_{i+1}} w(y)(T_ph(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\approx\sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w(y)(T_ph(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\\
\approx\sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w(y)\left(\int_y^{a_{n+2}}\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}\\
+\sum_n 2^n\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{a_{n+2}}^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r=:I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
I_2\approx\sum_n\int_{a_{n-1}}^{a_n}\rho(x)\,dx\left(\int_{a_n}^{a_{n+1}} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{a_{n+2}}^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r\\
\le\sum_n\int_{a_{n-1}}^{a_n}\rho(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\\
=\int_0^\infty\rho(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty\left(\int_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\le\mathbb{A}_2^r\left(\int_0^\infty h\right)^{\frac{r}{p}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_2^{\frac{p}{r}}\ll\mathbb{A}_2^p\int_0^\infty h.$$

Запишем

$$I_1 \approx \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} w(y) \left(\int\limits_y^{a_{n+2}} \left(\int\limits_0^{a_n} hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} w(y) \left(\int\limits_y^{a_{n+2}} \left(\int\limits_{a_n}^{s} hV \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s) ds \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}} =: I_{1,1} + I_{1,2}.$$

Имеем

$$I_{1,1} \le \sum_n \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} \rho(x) \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} w(y) \left(\int\limits_y^{\infty} \tilde{u}(s)\, ds \right)^q \left(\int\limits_0^y hV \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$\le \int\limits_0^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_x^{\infty} w(y) [\widetilde{U}(y)]^q \left(\int\limits_0^y hV \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \le \mathbb{A}_1^r \int\limits_0^{\infty} h.$$

Таким образом,

$$I_{1,1}^{\frac{p}{r}} \ll \mathbb{A}_1^p \int\limits_0^{\infty} h.$$

Используя обозначения (49), (50), запишем

$$I_{1,2} = \sum_n 2^n \left[\left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} w(y) (T_{[a_n,a_{n+1}]} h(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\le \sum_n 2^n \| T_{[a_n,a_{n+1}]} \|^{\frac{r}{p}}_{L^1[a_{n-1},a_{n+1}] \to L_w^{\frac{q}{p}}[a_n,a_{n+1}]} \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{a_{n+1}} h \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Применим неравенство Йенсена при $p \le r$:

$$I_{1,2} \le \sup_n 2^n \| T_{[a_n,a_{n+1}]} \|^{\frac{r}{p}}_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_0^{\infty} h \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Отсюда

$$I_{1,2}^{\frac{p}{r}} \le \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho \right)^{\frac{p}{r}} \| T_t \|_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_0^{\infty} h \right).$$

Следовательно,

$$I_{1,2}^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{B}^p \left(\int\limits_0^{\infty} h \right).$$

Рассмотрим случай $r < p$. Применяя неравенство Гёльдера ($\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$), имеем

$$I_{1,2} \le \left(\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \| T_{[a_n,a_{n+1}]} \|^{\frac{s}{p}}_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}} \right)^{\frac{r}{s}} \left(\int\limits_0^{\infty} h \right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \|T_{[a_n,a_{n+1}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w} \approx \sum_n \left(\int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho\right)\left(\int\limits_0^{a_n}\rho\right)^{\frac{s}{p}} \|T_{[\sigma^{-1}(a_{n+1}),\sigma(a_n)]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$
$$\le \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x\rho\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$
$$= \int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x\rho\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx = \mathbb{B}^s,$$

оценка сверху $C_S \ll \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{B}$ доказана.

Оценка снизу. Сужая области интегрирования $[0,s]\to[0,y]$, $[x,\infty]\to[x,\sigma^2(x)]$, получим

$$\left(\int\limits_0^\infty\left[\left(\int\limits_x^\infty\left(\int\limits_0^y hV\right)^{\frac{q}{p}}[\widetilde{U}(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}\rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_S^p\int\limits_0^\infty h,\quad h\in\mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left(\int\limits_x^{\sigma^2(x)} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_{\sigma^2(x)}^\infty\left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_S^p\int\limits_0^\infty h,\quad h\in\mathfrak{M}^+.$$

Откуда следует, что $\mathbb{A}_1\le C_S$, $\mathbb{A}_2\le C_S$. Из неравенства (53) вытекает, что

$$\left(\int\limits_0^t\rho\right)^{\frac{p}{r}}\left(\int\limits_t^\infty\left(\int\limits_y^{\sigma(t)}\left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}}\tilde{u}(s)\,ds\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}} \le C_S^p\int\limits_0^{\sigma(t)} h,$$

поэтому $C_S \gg \mathbb{B}$, и теорема доказана при $p\le r$.

Осталось получить доказательство оценки снизу при $r<p$. Имеем

$$\mathbb{B}^s = \int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x\rho\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$
$$= \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x\rho\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$
$$\le \sum_n \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} \rho(x)\,dx\left(\int\limits_0^{a_{n+1}}\rho\right)^{\frac{s}{p}} \|T_{[\sigma^{-1}(a_{n-1}),\sigma(a_{n+1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$
$$\approx \sum_n 2^{\frac{ns}{r}}\|\mathscr{T}_{[a_{n-2},a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w}.$$

Отсюда

$$\mathbb{B}^s \ll \sum_n 2^{\frac{ns}{r}}\|T_{[a_{n-2},a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_V\to L^{\frac{q}{p}}_w} =: \mathscr{B}^s.$$

Пусть $\theta \in (0,1)$ — произвольное фиксированное число. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует функция $h_n \in L^1[a_{n-2}, a_{n+3}]$ такая, что $\|h_n\|_{L^1[a_{n-2},a_{n+3}]} = 1$ и

$$\|T_{[a_{n-2},a_{n+2}]}h_n\|_{L_w^{\frac{q}{p}}} \geq \theta \|T_{[a_{n-2},a_{n+2}]}\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}.$$

Положим

$$g_n := 2^{\frac{ns}{r}} \|T_{[a_{n-2},a_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}} h_n, \quad \mathbb{T}_n := \|T_{[a_{n-2},a_{n+2}]}\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}, \quad g := \sum g_n.$$

Тогда

$$\|g\|_{L^1} \ll \sum_n \int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+3}} g_n = \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \mathbb{T}_n^{\frac{s}{p}} = \mathscr{B}^s.$$

С другой стороны,

$$D := \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty (T_p g)^{\frac{q}{p}} w \right)^{\frac{r}{q}} dx \geq \sum_n \int\limits_{a_{n+2}}^{a_{n+3}} \rho(x)\,dx \left[\left(\int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+2}} (T_p g)^{\frac{q}{p}} w \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\geq \sum_n 2^n \left[\left[\int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+2}} \left[\left[\int\limits_x^{a_{n+3}} \left(\int\limits_{a_{n-2}}^s g_n V \right)^{\frac{1}{p}} \tilde{u}(s)\,ds \right] \right]^p \right]^{\frac{q}{p}} w(x)\,dx \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^n \left[\left[\int\limits_{a_{n-2}}^{a_{n+2}} (T_{[a_{n-2},a_{n+2}]} g_n)^{\frac{q}{p}} w \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^n 2^{\frac{ns}{p}} \mathbb{T}_n^{\frac{sr}{p^2}} \|T_{[a_{n-2},a_{n+2}]} h_n\|^{\frac{r}{p}}_{L_w^{\frac{q}{p}}} \geq \theta^{\frac{r}{p}} \sum_n 2^{\frac{ns}{r}} \mathbb{T}_n^{\frac{s}{p}} = \theta^{\frac{r}{p}} \mathscr{B}^s.$$

Из (53) имеем $\mathscr{B}^s C_S^p \gg C_S^p \|g\|_{L^1} \geq D^{\frac{p}{r}} \gg \theta \mathscr{B}^{\frac{sp}{r}}$. Следовательно, $C_S \gg \theta^{\frac{1}{p}} \mathscr{B} \geq \theta^{\frac{1}{p}} \mathbb{B}$. Отсюда в силу произвольности $\theta \in (0,1)$ получаем $C_S \gg \mathbb{B}$. $\square$

Найдем явные выражения для функционалов, эквивалентных константам $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ и нормам $\|T_t\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}$ и $\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}$. Для этого потребуются некоторые частные случаи результатов из [6].

Теорема C [5, 6]. *Пусть $0 < r < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Для выполнения неравенства*

$$\left(\int\limits_0^\infty w(x) \left(\int\limits_x^\infty u(y) \left(\int\limits_0^y hv \right)^q dy \right)^{\frac{r}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_t \int\limits_0^\infty h, \quad h \in \mathfrak{M}^+, \tag{54}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left(\int\limits_0^\infty w(x) \left(\int\limits_x^\infty u \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^x hv \right)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \mathscr{C}_0 \int\limits_0^\infty h, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

и конечности константы

$$\mathscr{C}_1 := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t w \right)^{\frac{1}{r}} \|H_t^*\|_{L^1\to L_u^q}, & 1 \leq r, \\ \left(\int\limits_0^\infty w(x) \left[\left(\int\limits_0^x w \right) \|H^*_{[\xi^{-1}(x),\xi(x)]}\|_{L_v^1\to L_u^q} \right]^{\frac{r}{1-r}} dx \right)^{\frac{1-r}{r}}, & 0 < r < 1, \end{cases}$$

где ξ *задается формулой* (16) *при* $\Omega = w$ *и*

$$H_c^* h(x) := \chi_{[c,\infty)}(x) \int\limits_0^x hv, \ \ H_{[c,d]}^* h(x) := \chi_{[c,d)}(x) \int\limits_{\xi^{-1}(c)}^x hv, \quad 0 \le c < d < \infty, \tag{55}$$

причем $C_t \approx \mathscr{C}_0 + \mathscr{C}_1$.

Предложение 4. *Пусть* $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ *при* $r < p$. *Тогда для константы* $\mathbb{A}_1$ *в теореме* 2 *выполнено соотношение*

$$\mathbb{A}_1 \approx \mathbb{A}_{1,0} + \mathbb{A}_{1,1}, \tag{56}$$

где

$$\mathbb{A}_{1,0} = \sup_{t>0} [V(t)]^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_t^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^{\infty)} w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{r}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r}}, \quad p \le r, \tag{57}$$

$$\mathbb{A}_{1,0} \approx \left(\int\limits_0^\infty \left(V(t) \int\limits_t^\infty \rho(x) \left(\int\limits_x^\infty w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{r}{q}} dx \right)^{\frac{s}{p}} \rho(t) \left(\int\limits_t^\infty w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{s}} \tag{58}$$

при $r < p$. *Для второго слагаемого в* (56) *выполняется*

$$\mathbb{A}_{1,1}^p \approx \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho \right)^{\frac{p}{r}} \|H_t^*\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{w\widetilde{U}^q}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho \right) \|H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}^*\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{w\widetilde{U}^q}} \right]^{\frac{r}{p-r}} dx \right)^{\frac{p-r}{r}}, & r < p, \end{cases}$$

где σ *определена в* (6), *а нормы операторов* H_t^* *и* $H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}^*$ *характеризуются следующими функционалами:*

$$\|H_t^*\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{w\widetilde{U}^q}} \approx \sup_{s>t} V(s) \left(\int\limits_s^\infty w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p \le q, \tag{59}$$

$$\|H_t^*\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{w\widetilde{U}^q}} \approx \left(\int\limits_t^\infty \left(V(s) \int\limits_s^\infty w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{q}{p-q}} w(s)[\widetilde{U}(s)]^q \, ds \right)^{\frac{p-q}{q}}, \quad q < p. \tag{60}$$

Аналогично

$$\|H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}^*\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{w\widetilde{U}^q}} \approx \sup_{\sigma^{-1}(x) < s < \sigma(x)} V(s) \left(\int\limits_s^{\sigma(x)} w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{p}{q}}, \quad p \le q, \tag{61}$$

$$\|H_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}^*\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_{w\widetilde{U}^q}} \approx \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)} \left(V(s) \int\limits_s^{\sigma(x)} w\widetilde{U}^q \right)^{\frac{q}{p-q}} w(s)[\widetilde{U}(s)]^q \, ds \right)^{\frac{p-q}{q}} \tag{62}$$

при $q < p$.

Для константы $\mathbb{A}_2$ *в теореме* 2 *выполнено*

$$\mathbb{A}_2 \approx \mathbb{A}_{2,0} + \mathbb{A}_{2,1}, \tag{63}$$

где

$$\mathbb{A}_{2,0} = \sup_{t>0}[V(t)]^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\sigma^{-2}(t)}^{\infty} \rho(x) \left(\int\limits_{x}^{\sigma^2(x)} w \right)^{\frac{r}{q}} \widetilde{U}^r(\sigma^2(x))\, dx \right)^{\frac{1}{r}}, \quad p \le r, \tag{64}$$

$$[\mathbb{A}_{2,0}]^s \approx \int\limits_0^{\infty} \left(V(\sigma^2(x)) \int\limits_x^{\infty} \rho(t) \left(\int\limits_t^{\sigma^2(t)} w \right)^{\frac{r}{q}} \widetilde{U}^r(\sigma^2(t))\, dt \right)^{\frac{s}{p}} \times \rho(x) \left(\int\limits_x^{\sigma^2(x)} w \right)^{\frac{r}{q}} \widetilde{U}^r(\sigma^2(x))\, dx \tag{65}$$

при $r < p$. Для слагаемого $\mathbb{A}_{2,1}$ имеем

$$\mathbb{A}_{2,1} \approx \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^{\sigma^{-2}(t)} \omega \right)^{\frac{1}{r}} \|H_t^*\|_{L^1 \to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde{u}}}, \quad p \le r, \tag{66}$$

$$\mathbb{A}_{2,1} \approx \left(\int\limits_0^{\infty} \omega(x) \left[\left(\int\limits_0^x \omega \right) \|H^*_{[\xi^{-1}(\sigma^2(x)),\xi(\sigma^2(x))]}\|_{L^1 \to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde{u}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}} \tag{67}$$

при $r < p$, где ξ определяется формулой (16) при $\omega(y) = \rho(y)\left(\int\limits_y^{\sigma^2(y)} w\right)^{\frac{r}{q}}$, а нормы операторов равны

$$\|H_t^*\|_{L^1 \to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde{u}}} \approx \sup_{s>t} \widetilde{U}^p(s)V(s), \quad 0 < p \le 1, \tag{68}$$

$$\|H_t^*\|_{L^1 \to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde{u}}} \approx \left(\int\limits_t^{\infty} [\widetilde{U}(s)V(s)]^{\frac{1}{p-1}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^{p-1}, \quad p > 1, \tag{69}$$

$$\|H^*_{[\xi^{-1}(\sigma^2(x)),\xi(\sigma^2(x))]}\|_{L^1 \to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde{u}}} \approx \sup_{\xi^{-1}(\sigma^2(x)) < s < \xi(\sigma^2(x))} \left(\int\limits_s^{\xi(\sigma^2(x))} \tilde{u} \right)^p V(s), \quad 0 < p \le 1, \tag{70}$$

$$\|H^*_{[\xi^{-1}(\sigma^2(x)),\xi(\sigma^2(x))]}\|_{L^1 \to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde{u}}} \approx \left(\int\limits_{\xi^{-1}(\sigma^2(x))}^{\xi(\sigma^2(x))} \left(V(s) \int\limits_s^{\xi(\sigma^2(x))} \tilde{u} \right)^{\frac{1}{p-1}} \tilde{u}(s)\, ds \right)^{p-1}, \quad p > 1. \tag{71}$$

Небольшой модификацией теоремы C служит

Лемма 2. *Пусть $0<r<\infty$, $0<q\le\infty$. Для выполнения неравенства*

$$\left(\int\limits_a^b w(x)\left(\int\limits_x^c u(y)\left(\int\limits_a^y hv\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbb{C}\int\limits_a^c h,\quad h\in\mathfrak{M}^+, \tag{72}$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left(\int\limits_a^b w(x)\left(\int\limits_x^c u\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_a^x hv\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbb{C}_0\int\limits_a^c h,\quad h\in\mathfrak{M}^+,$$

и конечности константы

$$\mathbb{C}_1 := \begin{cases} \sup\limits_{a<t<b}\left(\int\limits_a^t w\right)^{\frac{1}{r}}\|H_t^*\|_{L^1\to L^q_u}, & 1\le r,\\ \left(\int\limits_{\xi(a)}^b w(x)\left[\left(\int\limits_a^x w\right)\|H^*_{[\xi^{-1}(x),\xi(x)]}\|_{L^1\to L^q_u}\right]^{\frac{r}{1-r}} dx\right)^{\frac{1-r}{r}}, & 0<r<1,\end{cases}$$

где ξ задается формулой

$$\begin{gathered}\xi(x) := \inf\left\{y\in(a,b) : \int\limits_a^y \Omega \ge 2\int\limits_a^x \Omega\right\},\\ \xi^{-1}(x) := \inf\left\{y\in(a,b) : \int\limits_a^y \Omega \ge \frac{1}{2}\int\limits_a^x \Omega\right\},\end{gathered} \tag{73}$$

$$H_t^* h(z) := \chi_{[t,c)}(z)\int\limits_a^z hv,\quad H^*_{[t,s]}h(z) := \chi_{[t,s)}(z)\int\limits_{\xi^{-1}(t)}^z hv,\quad a\le t<s<b, \tag{74}$$

причем $\mathbb{C}\approx\mathbb{C}_0+\mathbb{C}_1$.

Предложение 5. *Пусть $0<q\le\infty$, $0<p\le r<\infty$, $t>0$. Тогда для нормы $\|T_t\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}$, входящей в выражение для константы $\mathbb{B}$ в теореме 2, выполнены следующие соотношения:*

$$\|T_t\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}} \approx \mathbb{A}_0(t)+\mathbb{A}_1(t), \tag{75}$$

где при $p\le q$

$$\mathbb{A}_0(t) = \sup_{s>t} V(s)\left(\int\limits_s^\infty w(z)\left(\int\limits_z^{\sigma(t)}\tilde u\right)^q dz\right)^{\frac{p}{q}}, \tag{76}$$

$$\mathbb{A}_1(t) \approx \sup_{s>t}\left(\int\limits_t^s w\right)^{\frac{p}{q}}\sup_{s<z<\sigma(t)} V(z)\left(\int\limits_z^{\sigma(t)}\tilde u\right)^p,\quad 0<p\le 1, \tag{77}$$

$$\mathbb{A}_1(t) \approx \sup_{s>t}\left(\int\limits_t^s w\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int\limits_s^{\sigma(t)}\left(V(z)\int\limits_z^{\sigma(t)}\tilde u\right)^{\frac{1}{p-1}}\tilde u(z)\,dz\right)^{p-1},\quad p>1, \tag{78}$$

а при $q<p$ с функцией ξ_t, построенной по формулам (73) с $a=t$, $b=\infty$,

$$\mathbb{A}_0(t)\approx\left(\int\limits_t^\infty\left(V(s)\int\limits_s^\infty w(z)\left(\int\limits_z^{\sigma(t)}\tilde u\right)^q dz\right)^{\frac{q}{p-q}} w(s)\left(\int\limits_s^{\sigma(t)}\tilde u\right)^q ds\right)^{\frac{p-q}{q}}, \tag{79}$$

$$\mathbb{A}_1(t)\approx\left(\int\limits_{\xi(t)}^\infty w(x)\left[\left(\int\limits_t^x w\right)\sup_{\xi_t^{-1}(x)<s<\xi_t(x)} V(s)\left(\int\limits_s^{\xi_t(x)}\tilde u\right)^p\right]^{\frac{q}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{q}} \tag{80}$$

при $0<p\le 1$ и

$$[\mathbb{A}_1(t)]^{\frac{q}{p-q}}\approx\int\limits_{\xi(t)}^\infty w(x)\left[\left(\int\limits_t^x w\right)\left(\int\limits_{\xi_t^{-1}(x)}^{\xi_t(x)}\left(V(s)\int\limits_s^{\xi_t(x)}\tilde u\right)^{\frac{1}{p-1}}\tilde u(z)\,dz\right)^{p-1}\right]^{\frac{q}{p-q}} dx \tag{81}$$

при $p>1$.

Предложение 6. *Пусть $0<q\le\infty$, $0<r<p<\infty$, $\frac1s:=\frac1r-\frac1p$. Тогда для нормы $\|T_x\|:=\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}}$, $x>0$, входящей в выражение для константы $\mathbb{B}$ в теореме 2, выполнены следующие соотношения:*

$$\|T_x\|\approx\mathbf{A}_0(x)+\mathbf{A}_1(x), \tag{82}$$

где

$$\mathbf{A}_0(x)=\sup_{\sigma^{-1}(x)<s<\sigma(x)} V(s)\left(\int\limits_s^{\sigma(x)} w(z)\left(\int\limits_z^{\sigma^2(x)}\tilde u\right)^q dz\right)^{\frac{p}{q}},\quad p\le q, \tag{83}$$

и

$$[\mathbf{A}_0(x)]^{\frac{q}{p-q}}\approx\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma(x)}\left(V(s)\int\limits_s^{\sigma(x)} w(z)\left(\int\limits_z^{\sigma^2(x)}\tilde u\right)^q dz\right)^{\frac{q}{p-q}} w(s)\left(\int\limits_s^{\sigma^2(x)}\tilde u\right)^q ds \tag{84}$$

при $q<p$. Для второго слагаемого в (82) выполняется

$$\mathbf{A}_1(x)\approx\sup_{\sigma^{-1}(x)<t<\sigma(x)}\left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^t w\right)^{\frac{p}{q}}\|\mathscr{H}_t^*\|_{L^1_{x,y}\to L^{\frac1p}_{\tilde u_{x,y}}},\quad p\le q,$$

$$\mathbf{A}_1(x)\approx\left(\int\limits_{\xi_x(\sigma^{-1}(x))}^{\sigma(x)} w(z)\left[\left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^z w\right)\|\mathscr{H}^*_{[\xi_x^{-1}(z),\xi_x(z)]}\|_{L^1_{x,y}\to L^{\frac1p}_{\tilde u_{x,y}}}\right]^{\frac{q}{p-q}} dz\right)^{\frac{p-q}{q}}$$

при $q<p$, где ξ_x определяется по формуле (73) при $a=\sigma^{-1}(x)$, $c=\sigma^2(x)$, $b=\sigma(x)$, а операторы $\mathscr{H}^*_{[\xi_x^{-1}(z),\xi_x(z)]}$ и $\mathscr{H}_t^*$ — по формуле (74). Для норм этих операторов выполняются следующие соотношения. При $p\le q$

$$\|\mathscr{H}_t^*\|_{L^1\to L^{\frac1p}_{\tilde u}}=\sup_{\sigma^{-1}(x)<s<\sigma^2(x)} V(s)\left(\int\limits_s^{\sigma^2(x)}\tilde u\right)^p,\quad 0<p\le 1, \tag{85}$$

$$\|\mathscr{H}_t^*\|_{L^1\to L^{\frac1p}_{\tilde u}}\approx\left(\int\limits_{\sigma^{-1}(x)}^{\sigma^2(x)}\left(V(s)\int\limits_s^{\sigma^2(x)}\tilde u\right)^{\frac{1}{p-1}}\tilde u(s)\,ds\right)^{p-1},\quad p>1. \tag{86}$$

При $q < p$

$$\left\|\mathscr{H}^*_{[\xi_x^{-1}(z),\xi_x(z)]}\right\|_{L^1\to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde u}} = \sup_{\xi_x^{-1}(z)<t<\xi_x(z)} V(t)\left(\int\limits_t^{\xi_x(z)} \tilde u\right)^p, \quad 0 < p \le 1, \tag{87}$$

$$\left\|\mathscr{H}^*_{[\xi_x^{-1}(z),\xi_x(z)]}\right\|_{L^1\to L^{\frac{1}{p}}_{\tilde u}} \approx \left(\int\limits_{\xi_x^{-1}(z)}^{\xi_x(z)} \left(V(t)\int\limits_t^{\xi_x(z)} \tilde u\right)^{\frac{1}{p-1}} \tilde u(t)\,dt\right)^{p-1}, \quad p > 1. \tag{88}$$

4. Основные результаты для операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$

Характеризация неравенства (1) для операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ доказывается аналогично, приведем соответствующие результаты.

Будем считать, что $0 < \int\limits_x^\infty \rho < \infty$ при любом $x > 0$ и $\int\limits_0^\infty \rho = \infty$. Определим последовательность $\{b_n\} \subset (0;\infty)$ из уравнений

$$\int\limits_{b_n}^\infty \rho = 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть ζ задается формулой (13) при $\omega = \rho$. Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t, p < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\widetilde{T}_t h(x) := \chi_{(0,t]}(x)\left(\int\limits_x^{\zeta(t)} \left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde u(s)\,ds\right)^p, \tag{89}$$

$$\widetilde{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int\limits_x^{\zeta(d)} \left(\int\limits_c^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde u(s)\,ds\right)^p. \tag{90}$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* $C_{\mathscr{T}}$ *в неравенстве*

$$\left(\int\limits_0^\infty [\mathscr{T} f(x)]^r \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C_{\mathscr{T}}\left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\downarrow}, \tag{91}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{T}} \approx \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{B},$$

где $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ *— наилучшие константы в неравенствах*

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y hV\right)^{\frac{q}{p}} [\widetilde{U}(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_1^p \int\limits_0^\infty h, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left(\int\limits_0^x w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^s hV\right)^{\frac{1}{p}} \tilde u(s)\,ds\right)^r\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_2^p \int\limits_0^\infty h, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathscr{B}$ *имеет вид*

$$\mathscr{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho \right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_x^\infty \rho \right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x), \zeta(x)]}\|_{L^1 \to L^{\frac{q}{p}}_w} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ *положим*

$$\widetilde{\mathscr{T}}_t h(x) := \chi_{(0,t]}(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-1}(t)}^x \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^p, \tag{92}$$

$$\widetilde{\mathscr{T}}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-1}(c)}^x \left(\int\limits_s^d h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^p. \tag{93}$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < q \le \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* $C_{\mathscr{S}}$ *в неравенстве*

$$\left(\int\limits_0^\infty [\mathscr{S} f(x)]^r \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le C_{\mathscr{S}} \left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\downarrow, \tag{94}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{S}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ *— наилучшие константы в неравенствах*

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-2}(x)}^x w \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{\zeta^2(x)} \left(\int\limits_s^\infty h \right)^{\frac{1}{p}} u(s)\, ds \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_1^p \int\limits_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_y^\infty h \right)^{\frac{q}{p}} U^q(y) w(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}} dx \right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_2^p \int\limits_0^\infty hV, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbf{B}$ *имеет вид*

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho \right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_x^\infty \rho \right) \|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x), \zeta(x)]}\|_{L^1_V \to L^{\frac{q}{p}}_w} \right]^{\frac{s}{p}} dx \right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об операторах на конусах монотонных функций // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 6. С. 618–621.
2. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об интегральных операторах на конусах монотонных функций // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 367–370.
3. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 405, N 1. P. 156–172.
4. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 4. С. 3–68.
5. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 125–140.

6. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Оценки одного класса сублинейных интегральных операторов // Докл. АН. 2014. Т. 456, № 6. С. 640–645.

7. *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliev V. S., Mustafaeyev R. Ch.* Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces // Complex Variables, Elliptic Equations. 2010. V. 55, N 8–10. P. 739–758.

8. *Burenkov V. I., Gogatishvili A., Guliev V. S., Mustafaeyev R. Ch.* Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces // Potential Anal. 2011. V. 35. P. 67–87.

9. *Burenkov V. I., Oinarov R.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space // J. Math. Inequal. Appl. 2013. V. 16. P. 1–19.

10. *Попова О. В.* Неравенства типа Харди на конусах монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 187–204.

11. *Буренков В. И., Гольдман М. Л.* Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1995. Т. 210. С. 65–89.

12. *Carro M. J., Rapozo J. A., Soria J.* Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 187, N 877).

13. *Johanson M., Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Hardy inequality with three measures on monotone functions // J. Inequal. Appl. 2008. V. 11, N 3. P. 393–413.

14. *Myasnikov E. A., Persson L.-E., Stepanov V. D.* On the best constants in certain integral inequalities for monotone functions // Acta Sci. Math. (Szeged). 1994. V. 59, N 3–4. P. 613–624.

15. *Persson L.-E., Popova O. V., Stepanov V. D.* Two-sided Hardy inequalities for monotone functions // Complex Variables, Elliptic Equations. 2010. V. 55, N 8–10. P. 973–989.

16. *Persson L.-E., Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Equivalence of Hardy-type inequalities with general measures on the cones of non-negative respective non-increasing functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. V. 134, N 8. P. 2363–2372.

17. *Stepanov V. D.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 3. P. 465–487.

18. *Степанов В. Д.* Об ограниченности линейных интегральных операторов на классе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 222–224.

19. *Stepanov V. D., Tikhonov S. Yu.* Two power-weight inequalities for the Hilbert transform on the cones of monotone functions // Complex Variables, Elliptic Equations. 2011. V. 56, N 10–11. P. 1039–1047.

20. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Весовые оценки для интегральных операторов на полуоси с монотонными ядрами // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1378–1390.

21. *Goldman M. L., Heing H. P., Stepanov V. D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.

22. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

23. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case p=1 // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 2. P. 89–101.

24. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // J. Inequal. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 449–510.

Статья поступила 30 сентября 2013 г.

Шамбилова Гульдарья Эрмаковна
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
shambilova@mail.ru