Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 512.55

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУППЫ K_1 КОЛЬЦА ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ

П. А. Крылов

Аннотация. Группа Уайтхеда K_1 кольца обобщенных матриц порядка 2 выражается через группы K_1 исходных колец.

Ключевые слова: кольцо обобщенных матриц, группа K_1.

Известно, что $K_1(M(n,R)) \cong K_1(R)$ для любого кольца R и числа n. Если T — кольцо треугольных матриц порядка 2 над R, то $K_1(T) \cong K_1(R) \oplus K_1(R)$ [1]. В [2] вычисляется группа K_1 контекста Мориты для заменяемых и некоторых других колец.

В данной статье группа Уайтхеда K_1 кольца обобщенных матриц выражается в ряде случаев через группы K_1 исходных колец. Кольца обобщенных матриц (порядка 2) или контексты Мориты расширяют понятие кольца матриц над данным кольцом. Они встречаются в различных разделах теории колец и теории колец эндоморфизмов (последняя представлена в [3, 4]), используются и в других областях математики. Кольца обобщенных матриц и модули над ними рассматриваются в [5–12] и многих других работах (см. библиографии в этих статьях).

В следствии 2.3 при довольно общих условиях вычисляется группа K_1 кольца обобщенных матриц. Следствие 3.4 также дает формулу для вычисления группы K_1. Правда, в ней в качестве прямого слагаемого присутствует некоторая группа $\operatorname{Ker}\pi$, строение которой, по-видимому, выявить трудно. Следствия 3.5–3.8 содержат применения и частные случаи следствия 3.4.

Кольца считаем ассоциативными и с единичными элементами, модули — унитарными левыми. Радикал Джекобсона кольца T обозначаем через $J(T)$.

§ 1. Некоторые определения

Пусть R — кольцо, $GL(n,R)$ — группа обратимых матриц порядка n над кольцом R. Считаем группу $GL(n,R)$ вложенной в $GL(n+1,R)$ с помощью мономорфизма $A \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Обозначим через $GL(R)$ объединение групп $GL(n,R)$ для всех $n \geqslant 1$. Далее, $E(n,R)$ — подгруппа в $GL(n,R)$, порожденная всеми элементарными матрицами. При вложении $GL(n,R)$ в $GL(n+1,R)$ подгруппа $E(n,R)$ вкладывается в $E(n+1,R)$. Объединение всех $E(n,R)$ обозначается через $E(R)$ и называется *группой элементарных матриц*. Она совпадает с коммутантом группы $GL(R)$. Группа Уайтхеда $K_1(R)$ кольца R есть абелева группа $GL(R)/E(R)$.

Для наших целей более полезно другое определение группы K_1. Пусть $P(R)$ обозначает категорию конечно порожденных проективных R-модулей. Возьмем далее категорию автоморфизмов в $P(R)$ [13, гл. 1, § 1]. Ее объекты — пары вида (X, α), где $X \in P(R)$, α — автоморфизмы модуля X. Морфизмы определяются обычным в подобных категориях образом. Пусть F — свободная абелева группа, образующими которой являются пары (X, α) по одной для каждого класса изоморфных в категории автоморфизмов пар. Группа $K_1(R)$ есть фактор-группа F/G, где подгруппа G порождается элементами вида $(X, \alpha\beta) - (X, \alpha) - (X, \beta)$ и $(X \oplus Y, \alpha\beta) - (X, \alpha) - (Y, \beta)$ (подразумевается, что α действует тождественно на Y, а β — на X). Смежный класс $(X, \alpha) + G$ обозначаем через $[(X, \alpha)]$.

Естественный изоморфизм между двумя группами $K_1(R)$ устанавливается следующим образом [13, гл. 9, теорема 1.2; 14, теорема 3.1.7]. Матрица $A \in GL(n, R)$ определяет автоморфизм α модуля R^n. Элементу $AE(R)$ группы $GL(R)/E(R)$ сопоставляется элемент $[(R^n, \alpha)]$ группы F/G. Ниже пользуемся только вторым определением группы $K_1(R)$.

Любой элемент группы $K_1(R)$ можно записать в виде $[(X, \alpha)]$ для некоторых X и α. Нулевым элементом является $[(X, 1)]$ при всяком X. Противоположным к $[(X, \alpha)]$ будет $[(X, \alpha^{-1})]$. Основную информацию об элементе $[(X, \alpha)]$ несет автоморфизм α. Поэтому часто вместо $[(X, \alpha)]$ пишем $[\alpha]$.

Для определения гомоморфизмов между группами K_1 будем использовать следующий факт. Если S — еще одно кольцо, то всякий аддитивный функтор $F : P(R) \longrightarrow P(S)$ индуцирует гомоморфизм $K_1(F) : K_1(R) \longrightarrow K_1(S)$, $[(X, \alpha)] \longrightarrow [(FX, F\alpha)]$. В частности, кольцевой гомоморфизм $i : R \longrightarrow S$ индуцирует функтор $T(i) : P(R) \longrightarrow P(S)$, $X \longrightarrow S \otimes_R X$ и, следовательно, гомоморфизм $K_1(i) : K_1(R) \longrightarrow K_1(S)$, $[(X, \alpha)] \longrightarrow [(S \otimes_R X, 1 \otimes \alpha)]$.

Приведем необходимые сведения о кольцах обобщенных матриц (порядка 2) и модулях над ними (подробности см. в [7]). Пусть R, S — кольца, M — R-S-бимодуль, N — S-R-бимодуль. Пусть $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$ и $\psi : N \otimes_R M \longrightarrow S$ — некоторые бимодульные гомоморфизмы. Считаем, что символ mn обозначает $\varphi(m \otimes n)$, а nm обозначает $\psi(n \otimes m)$. Предположим, что справедливы равенства $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$ для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$. Множество K матриц вида $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$, $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$, образует кольцо относительно обычных операций сложения и умножения матриц. Оно называется *кольцом обобщенных* (или *формальных*) *матриц* или *кольцом контекста Мориты*. Кольцо K обозначается также символом $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$. Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ соответственно называют *идеалами следа кольца* K.

Пусть X — R-модуль, Y — S-модуль и $f : M \otimes_S Y \longrightarrow X$, $g : N \otimes_R X \longrightarrow Y$ — R- и S-модульные гомоморфизмы соответственно. Допустим, что справедливы равенства $m(nx) = (mn)x$, $n(my) = (nm)y$ для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$, где nx — это $g(n \otimes x)$, а my — это $f(m \otimes y)$. Группа вектор-столбцов $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ естественным образом является K-модулем. Любой K-модуль имеет вид модуля вектор-столбцов. K-модуль $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ и его элементы более удобно записывать в виде строк.

Гомоморфизмы K-модулей действуют покоординатно. Именно, если $\Gamma : (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ — гомоморфизм, то найдутся R-гомоморфизм $\alpha : X \longrightarrow X'$ и S-гомоморфизм $\beta : Y \longrightarrow Y'$ такие, что $\Gamma(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. При этом $\alpha(my) = m\beta(y)$, $\beta(nx) = n\alpha(x)$ для всех значений букв.

Большое значение для нас будет иметь одна конструкция K-модулей. Пусть

X — R-модуль. Группа вектор-строк $(X, N \otimes_R X)$ является K-модулем, гомоморфизмами f и g для которого являются отображение $M \otimes_S (N \otimes_R X) \longrightarrow X$, $m(n \otimes x) \longrightarrow (mn)x$ и тождественное отображение S-модуля $N \otimes_R X$. Похожим способом S-модуль Y даст K-модуль $(M \otimes_S Y, Y)$. Будем обозначать $N \otimes_R X$ через $T(X)$ и $M \otimes_S Y$ через $T(Y)$ (в § 2, 3 буквой T обозначаются также функторы тензорного произведения).

Важное свойство введенных K-модулей заключается в следующем [7, лемма 2.2]. Всякий гомоморфизм $(X, T(X)) \longrightarrow (X', T(X'))$ равен $(\alpha, 1 \otimes \alpha)$ для единственного гомоморфизма $\alpha : X \longrightarrow X'$. Более точно, сопоставление $\alpha \longrightarrow (\alpha, 1 \otimes \alpha)$ определяет изоморфизм соответствующих групп Hom. Аналогичный изоморфизм верен для модулей вида $(T(Y), Y)$.

§ 2. Эквивалентность двух категорий проективных модулей

Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо обобщенных матриц с идеалами следа I и J. Запишем коммутативную диаграмму колец

$$\begin{tikzcd} R \times S \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "k"] & \\ K \arrow[r, "j"] & R/I \times S/J, \end{tikzcd} \tag{1}$$

в которой i — диагональное вложение, k — канонический эпиморфизм, j : $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \longrightarrow (r + I, s + J)$. Можно записать далее диаграмму функторов

$$\begin{tikzcd} P(R \times S) \arrow[d, "T(i)"'] \arrow[dr, "T(k)"] & \\ P(K) \arrow[r, "T(j)"] & P(R/I \times S/J). \end{tikzcd} \tag{2}$$

Эти функторы действуют следующим образом. Если $X \otimes Y$ — проективный $(R \times S)$-модуль, то $T(i)(X \oplus Y) = (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$ (см. замечание после следствия 2.4 в [7]) и $T(k)(X \oplus Y) = (R/I \otimes_R X) \oplus (S/J \otimes_S Y) \cong X/IX \oplus Y/JY$. Затем если (X, Y) — проективный K-модуль, то $T(j)(X, Y) = X/MY \oplus Y/NX$ (см. замечание перед следствием 6.2 в [7]). Здесь MY и NX обозначают образы гомоморфизмов f и g соответственно, определенных в § 1. Все три функтора гомоморфизмы переводят в индуцированные гомоморфизмы. Теперь можно убедиться, что функторы $T(i)T(j)$ и $T(k)$ естественно эквивалентны.

Диаграммы (1) и (2) индуцируют коммутативную диаграмму групп K_1 и их гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd} K_1(R) \oplus K_1(S) \arrow[d, "K_1(i)"'] \arrow[dr, "K_1(k)"] & \\ K_1(K) \arrow[r, "K_1(j)"] & K_1(R/I) \oplus K_1(S/J). \end{tikzcd} \tag{3}$$

Гомоморфизмы действуют следующим образом: $K_1(i) : [\alpha] + [\beta] \longrightarrow [(\alpha, 1 \otimes \alpha)] + [(1 \otimes \beta, \beta)]$. Затем $K_1(k) : [\alpha] + [\beta] \longrightarrow [\bar{\alpha}] + [\bar{\beta}]$, где $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$) — автоморфизм, индуцированный автоморфизмом α (β) на X/IX (Y/JY). Наконец

$K_1(j) : [(\alpha,\beta)] \longrightarrow [\bar\alpha] + [\bar\beta]$, где $\bar\alpha$ ($\bar\beta$) — автоморфизм, индуцированный автоморфизмом α (β) на X/MY (Y/NX).

Сформулируем один результат об эквивалентности категорий проективных модулей.

Теорема 2.1. *Если $I \subseteq J(R)$, $J \subseteq J(S)$, кольцо R полно в I-адической топологии, S полно в J-адической топологии, то функтор $T(i)$ определяет эквивалентность между категориями $P(R \times S)$ и $P(K)$.*

Доказательство. Ядро $\begin{pmatrix} I & M \\ N & J \end{pmatrix}$ гомоморфизма j лежит в радикале $J(K)$ [7, теорема 1.7]. Получается, что функтор $T(k)$ действует биективно, а функтор $T(j)$ — инъективно на соответствующих классах изоморфных конечно порожденных проективных модулей [13, гл. 3, предложение 2.12].

Пусть (P,Q) — некоторый конечно порожденный проективный K-модуль. Существует конечно порожденный проективный $(R\times S)$-модуль $X \oplus Y$ такой, что $T(k)(X \oplus Y) \cong P/MQ \oplus Q/NP$. Далее получаем $T(i)(X \oplus Y) \cong (P,Q)$, или $(P,Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$.

Возьмем произвольные конечно порожденные проективные R-модули X_1, X_2 и S-модули Y_1, Y_2. Отображения

$$T(i) : \mathrm{Hom}_R(X_1, X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K((X_1, T(X_1)), (X_2, T(X_2))),$$

$$T(i) : \mathrm{Hom}_S(Y_1, Y_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K((T(Y_1), Y_1), (T(Y_2), Y_2))$$

являются изоморфизмами, что отмечено в конце § 1. Мы показали, что $T(i)$ — эквивалентность. $\square$

В процессе доказательства установлен записанный ниже факт.

Следствие 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *для любого проективного K-модуля (P,Q) существуют проективные R-модуль X и S-модуль Y такие, что $(P,Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$.*

Уточним, что для любого проективного R-модуля X и S-модуля Y K-модули $(X, T(X))$ и $(T(Y), Y)$ проективны [7, предложение 7.1].

Запишем основной результат о группе K_1 этого параграфа. В нем упоминается группа Гротендика K_0. С теорией этих групп можно познакомиться в книгах [13–15].

Следствие 2.3. *В условиях теоремы* 2.1 *справедлив изоморфизм $K_i(K) \cong K_i(R) \oplus K_i(S)$, $i = 0, 1$.*

Доказательство. Эквивалентны категории $P(R \times S)$ и $P(K)$. Это сразу дает случай $i = 0$. Эквивалентны также категории автоморфизмов этих категорий, что влечет изоморфизм для $i = 1$. $\square$

Условиям теоремы 2.1 удовлетворяет кольцо K с нильпотентными идеалами следа I и J, в частности, кольцо треугольных матриц, когда $M = 0$ либо $N = 0$, как в [1].

§ 3. Условия на идеалы следа

В этом параграфе дополнительно считаем, что ${}_RM$ и ${}_SN$ — конечно порожденные проективные модули. В таком случае если (X, Y) — конечно порожденный проективный K-модуль, то X и Y — конечно порожденные проективные

R- и S-модули соответственно. Если ${}_RX$ и ${}_SY$ — конечно порожденные проективные модули, то $N \otimes_R X$ и $M \otimes_S Y$ — конечно порожденные проективные S- и R-модули соответственно. Эти модули мы обозначили в § 1 через $T(X)$ и $T(Y)$ соответственно.

Можно определить аддитивные функторы $T_N = N \otimes_R (-) : P(R) \longrightarrow P(S)$ и $T_M = M \otimes_S (-) : P(S) \longrightarrow P(R)$. Будем обозначать их одной буквой T. Следовательно, получаем гомоморфизмы $e : K_1(R) \longrightarrow K_1(S)$ и $h : K_1(S) \longrightarrow K_1(R)$, где $e : [\alpha] \longrightarrow [1 \otimes \alpha]$ и $h : [\beta] \longrightarrow [1 \otimes \beta]$, так что eh — эндоморфизм группы $K_1(R)$, а he — группы $K_1(S)$.

Ограничение гомоморфизма $K_1(i)$ из § 2 на группе $K_1(R)$ обозначим через Θ_1, на группе $K_1(S)$ — через Θ_2. Таким образом, $\Theta_1 : K_1(R) \longrightarrow K_1(K)$, $[\alpha] \longrightarrow [(\alpha, 1 \otimes \alpha)]$, и $\Theta_2 : K_1(S) \longrightarrow K_1(K)$, $[\beta] \longrightarrow [(1 \otimes \beta, \beta)]$.

Можно еще определить аддитивный функтор $F : P(K) \longrightarrow P(R)$, считая, что $F(X, Y) = X$, а гомоморфизмы переводятся в индуцированные гомоморфизмы (с учетом того, что гомоморфизмы K-модулей действуют покоординатно, о чем говорилось в § 1). Буквой F обозначим также аналогичный функтор $P(K) \longrightarrow P(S)$, $(X, Y) \longrightarrow Y$. Эти функторы являются ограничениями функторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ из [7, § 8].

Функторы F индуцируют гомоморфизмы $\pi_1 : K_1(K) \longrightarrow K_1(R)$, $[(\alpha, \beta)] \longrightarrow [\alpha]$ и $\pi_2 : K_1(K) \longrightarrow K_1(S)$, $[(\alpha, \beta)] \longrightarrow [\beta]$. Положим также $\pi = \pi_1 + \pi_2 : K_1(K) \longrightarrow K_1(R) \oplus K_1(S)$, $[(\alpha, \beta)] \longrightarrow [\alpha] + [\beta]$. Ясно, что $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Ker} \pi_1 \cap \operatorname{Ker} \pi_2$.

Поскольку $\theta_1 \pi_1 = 1$ и $\theta_2 \pi_2 = 1$, можно записать такой факт.

Следствие 3.1. *Существуют прямые разложения* $K_1(K) = \operatorname{Im} \theta_1 \oplus \operatorname{Ker} \pi_1 = \operatorname{Im} \theta_2 \oplus \operatorname{Ker} \pi_2$, *где* $\operatorname{Im} \theta_1 \cong K_1(R)$, $\operatorname{Im} \theta_2 \cong K_1(S)$.

Запись элемента $[(\alpha, \beta)]$ относительно, например, первой прямой суммы такова: $[(\alpha, \beta)] = [\alpha, 1 \otimes \alpha] + [(1, \beta(1 \otimes \alpha)^{-1})]$.

Обратимся к прямым разложениям из следствия 3.1. Ограничение на $\operatorname{Ker} \pi_1$ проекции $K_1(K) \longrightarrow \operatorname{Im} \theta_2$ имеет ядро, равное $\operatorname{Ker} \pi$. Пусть B' — образ этого ограничения. Обозначим через B образ подгруппы B' при изоморфизме $\operatorname{Im} \theta_2 \longrightarrow K_1(S)$, $[(1 \otimes \beta, \beta)] \longrightarrow [\beta]$. Итак, B — подгруппа в $K_1(S)$. Найдем вид ее элементов. Представление элемента $[(\alpha, \beta)]$ группы $K_1(K)$ относительно первого разложения указано выше. Относительно второго разложения его представление есть $[(\alpha, \beta)] = [(1 \otimes \beta, \beta)] + [(\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}, 1)]$. Теперь ясно, что $B = \{[\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}] \mid [\alpha, \beta] \in K_1(K)\}$. Определим похожим образом подгруппу A группы $K_1(R)$, полагая $A = \{[\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] \mid [\alpha, \beta] \in K_1(K)\}$. Заметим, что $[\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}] = [\beta] - e([\alpha])$ и $[\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] = [\alpha] - h([\beta])$.

Сформулируем следующий результат общего характера.

Теорема 3.2. *Существуют изоморфизмы* $K_1(K)/\operatorname{Ker} \pi \cong K_1(R) \oplus B$, $[(\alpha, \beta)] + \operatorname{Ker} \pi \longrightarrow [\alpha] + [\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}]$ *и* $K_1(K)/\operatorname{Ker} \pi \cong A \oplus K_1(S)$, $[(\alpha, \beta)] + \operatorname{Ker} \pi \longrightarrow [\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] + [\beta]$, *где B и A — подгруппы в $K_1(S)$ и $K_1(R)$ соответственно, определенные выше.*

Некоторые части групп B и A можно точно указать.

Лемма 3.3. *Справедливы включения*

$$(1 - he)K_1(S) \subseteq B, \quad (1 - eh)K_1(R) \subseteq A.$$

Доказательство. Для элемента $[\beta] \in K_1(S)$ можно записать равенства $(1 - he)([\beta]) = [\beta] - [1 \otimes 1 \otimes \beta] = [\beta(1 \otimes 1 \otimes \beta)^{-1}]$. Так как $[(1 \otimes \beta, \beta)] \in K_1(K)$, заключаем, что $[\beta(1 \otimes 1 \otimes \beta)^{-1}] \in B$. Так же проверяется и второе включение. □

В одной достаточно понятной ситуации теорему 3.2 можно уточнить.

Следствие 3.4. *Если* $1 - eh$ *— автоморфизм группы* $K_1(R)$ (*это будет так, если* eh *— нильпотентный эндоморфизм или* $eh \in J(\operatorname{End} K_1(R))$), *то имеем равенство* $K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Im}\theta_2 \oplus \operatorname{Ker}\pi$ *и изоморфизм* $K_1(K) \cong K_1(R) \oplus K_1(S) \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

Доказательство. Положим $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$. Композиция $\theta\pi$ является эндоморфизмом группы $K_1(R) \oplus K_1(S)$, $[\alpha] + [\beta] \longrightarrow ([\alpha] + [1 \otimes \beta]) + ([1 \otimes \alpha] + [\beta]) = ([\alpha] + h([\beta])) + (e([\alpha]) + [\beta])$. Относительно данной прямой суммы эндоморфизм $\theta\pi$ представляется матрицей $\begin{pmatrix} 1 & e \\ h & 1 \end{pmatrix}$. Обратимость элемента $1 - eh$ кольца $\operatorname{End} K_1(R)$ равносильна обратимости элемента $1 - he$ кольца $\operatorname{End} K_1(S)$. В этом случае $\begin{pmatrix} 1 & e \\ h & 1 \end{pmatrix}$ — обратимая матрица с обратной $\begin{pmatrix} 1 & -e \\ -h & 1 \end{pmatrix}$. Получается, что $\theta\pi$ — автоморфизм группы $K_1(R) \oplus K_1(S)$. Значит, $\theta(\pi\omega) = 1$ для некоторого автоморфизма ω этой группы. Это влечет равенства $K_1(R) = \operatorname{Im}\theta \oplus \operatorname{Ker}\pi\omega = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Im}\theta_2 \oplus \operatorname{Ker}\pi$. $\square$

Приведем один случай, когда выполняется предположение следствия 3.4.

Следствие 3.5. *Пусть* $\varphi : M \otimes_S N \longrightarrow R$ *— мономорфизм* (*говорят, что* K *— полуинъективный контекст Мориты*). *Если* I *— нильпотентный идеал, то* $K_1(K) \cong K_1(R) \oplus K_1(S) \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

Доказательство. Имеем $(eh)([(X, \alpha)]) = [(M \otimes_S N \otimes_R X, 1 \otimes 1 \otimes \alpha)]$. Так как $M \otimes_S N \cong I$ и X — плоский R-модуль как проективный, получаем канонический изоморфизм $M \otimes_S N \otimes_R X \cong IX$, затем равенство

$$[(M \otimes_S N \otimes_R X, 1 \otimes 1 \otimes \alpha)] = [(IX, \bar{\alpha})],$$

где $\bar{\alpha}$ — сужение α на IX. Далее находим, что $(eh)^n([(X, \alpha)]) = [(I^n X, \bar{\alpha})]$ для любого $n > 1$. Понятно, что $(eh)^k = 0$ для некоторого k. Осталось сослаться на следствие 3.4. $\square$

Похожими рассуждениями можно показать, что в условиях следствия 3.5 справедлив изоморфизм $K_0(K) \cong K_0(R) \oplus K_0(S) \oplus C$, где C — некоторая вполне определенная группа (о группе K_0 есть замечание перед следствием 2.3).

Строение группы $\operatorname{Ker}\pi$ из теоремы 3.2 и следствий 3.4 и 3.5 остается неясным.

Отметим важный частный случай теоремы 3.2, а также следствий 3.4 и 3.5, когда одна из подгрупп B и A равна нулю.

Следствие 3.6. (1) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $B = 0$;

(b) $[\beta] = [1 \otimes \alpha] = e([\alpha])$ *для любого элемента* $[(\alpha, \beta)] \in K_1(K)$;

(c) $K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi \cong K_1(R) \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

(2) *Если* $B = 0 = A$, *то* e *и* h *— взаимно обратные изоморфизмы и* $K_1(K) \cong K_1(R) \oplus \operatorname{Ker}\pi \cong K_1(S) \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

Доказательство. (1) Эквивалентность (a) и (b) вытекает из определения подгруппы B.

(b)$\Longrightarrow$(c). Имеем $B = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\pi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\pi_2$ и $K_1(K) = \operatorname{Im}\theta_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi$, где $\operatorname{Im}\theta_1 \cong K_1(R)$.

(c)$\Longrightarrow$(a). Снова получаем $\operatorname{Ker}\pi_1 \subseteq \operatorname{Ker}\pi_2$ и, следовательно, $B = 0$.

П. (2) вытекает из п. (1). $\square$

Отметим, что в ситуации п. (1) имеет место изоморфизм $K_1(K) \cong K_1(S) \oplus \operatorname{Ker} e \oplus \operatorname{Ker} \pi$ (с учетом леммы 3.3).

Следующий факт, по существу, известен.

Следствие 3.7. *Если кольцо K есть ситуация эквивалентности* (т. е. $I = R$ и $J = S$), *то* $K_1(R) \cong K_1(K) \cong K_1(S)$.

Доказательство. Верно утверждение (b) следствия 3.6 (см. конец § 1). Достаточно также указать, что категории $P(K)$, $P(R)$ и $P(S)$ попарно эквивалентны [7, теорема 8.5]. $\square$

В [5, 7, 10] рассматривались кольца обобщенных матриц (порядка 2) над кольцом R. Каждому такому кольцу соответствует некоторый центральный элемент s кольца R, и оно обозначается через K_s. Из следствий 3.7 и 2.3 получаем

Следствие 3.8. *Пусть K_s — кольцо обобщенных матриц над кольцом R. Тогда $K_1(K_s) \cong K_1(R)$, если s — обратимый элемент, и $K_1(K_s) \cong K_1(R) \oplus K_1(R)$, если s — нильпотентный элемент.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dennis R. K., Geller S.* K_i of upper triangular matrix rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. P. 73–78.
2. *Chen H.* Morita contexts with many units // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 3. P. 1499–1512.
3. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism rings of Abelian groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2003.
4. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Modules over discrete valuation domains. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2008.
5. *Крылов П. А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 456–463.
6. *Крылов П. А.* Инъективные модули над кольцами формальных матриц // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 90–97.
7. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над кольцами формальных матриц // Фунд. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 8. С. 145–211.
8. *Haghany A., Varadarajan K.* Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 147, N 1. P. 41–58.
9. *Loustaunau P., Shapiro J.* Morita contexts // Noncommutative ring theory. Berlin: Springer-Verl., 1990. P. 80–92. (Lect. Notes Math.; V. 1448).
10. *Tang G., Zhou Y.* Strong cleanness of generalized matrix rings // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. P. 2546–2559.
11. *Li Y.-B., Wei F.* Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras // Linear Algebra Appl. 2012. V. 436. P. 1122–1153.
12. *Xiao Z.-K., Wei F.* Commuting mappings of generalized matrix algebras // Linear Algebra Appl. 2010. V. 433. P. 2178–2197.
13. *Басс Х.* Алгебраическая K-теория. М.: Мир, 1973.
14. *Rosenberg J.* Algebraic K-theory and its applications. Berlin; New York: Springer-Verl., 1994.
15. *Srinivas V.* Algebraic K-theory. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1991. (Progress Math.; V. 90).

Статья поступила 29 октября 2013 г.

Крылов Петр Андреевич
Томский гос. университет,
механико-математический факультет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
krylov@math.tsu.ru