Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.5

О ВЛОЖЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА В СМЕШАННОЙ НОРМЕ

К. Сулейменов, Н. Н. Ташатов

Аннотация. Изучается вложение анизотропных пространств $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$ в смешанной норме. Найдены необходимые и достаточные условия вложения $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$.

Ключевые слова: модули гладкости, пространства функций, целые функции экспоненциального типа.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$, как обычно, n-мерное евклидово пространство точек $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)$ с действительными координатами. Пусть дан мультииндекс $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, где $1 \le p_j < \infty$, $j = 1,\dots,n$. Через $L^p(\mathbb{R}^n) = L^{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{R}^n)$ обозначают множество всех измеримых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\dots,x_n)$, для каждой из которых конечна смешанная норма

$$\|f\|_{\mathbf{p}} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left[\dots \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |f(x_1,\dots,x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

При $\mathbf{p} = (p,\dots,p)$ получаем

$$\|f\|_{\mathbf{p}} \equiv \|f\|_p = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ будем понимать как пространство измеримых и ограниченных в существенном на $\mathbb{R}^n$ функций.

Всюду в работе принято соглашение: при $\rho = \infty$

$$\left\{ \sum_{t=0}^{\infty} |a_t|^\rho \right\}^{\frac{1}{\rho}} \equiv \sup_t |a_t|, \quad \left\{ \int\limits_0^t |f(u)|^\rho \frac{du}{u} \right\}^{\frac{1}{\rho}} \equiv \sup_{0<u\le t} |f(u)|.$$

В дальнейшем через $C(\alpha,\beta,\dots) = C_{\alpha,\beta,\dots}$ обозначаются положительные величины, зависящие лишь от входящих параметров $\alpha,\beta,\dots$ и, вообще говоря, разные в различных формулах. Пусть A и B — некоторые числовые функции, причем A неотрицательна. Тогда записи $B = O_{\alpha,\beta,\dots}(A)$, $B \underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll} A$ будут означать $|B| \le C(\alpha,\beta,\dots)A$. При неотрицательных A и B запись $A \underset{\alpha,\beta,\dots}{\asymp} B$ означает $A \underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll} B \underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll} A$.

При данном целом $k \ge 1$ всякую непрерывную неубывающую на $[0,1]$ функцию $\omega_k(\delta)$ такую, что ($C > 0$ — число)

$$\omega_k(0) = 0, \quad \eta^{-k}\omega_k(\eta) \le C\delta^{-k}\omega_k(\delta), \quad 0 < \delta < \eta \le 1,$$

называют *функцией типа модуля гладкости k-го порядка.*

Говорят, что функция $g(\delta)$ *почти убывает* на $[0,1]$, если существует число $C \ge 1$ такое, что при всех $0 \le \delta_1 < \delta_2 \le 1$ выполнено неравенство

$$g(\delta_2) \le Cg(\delta_1).$$

Обозначим через Ω_β, $\beta > 0$, класс всех непрерывных строго возрастающих на $[0,1]$ функций $\omega(\delta)$ таких, что

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(1) = 1, \quad \omega(\delta)\delta^{-\beta} \text{ почти убывает на } [0,1].$$

Вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(\delta) = (\omega_1(\delta), \dots, \omega_n(\delta))$ принадлежит (по определению) классу $\Omega_{\boldsymbol{\beta}}$, где $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, если $\omega_j(\delta) \in \Omega_{\beta_j}$ при каждом $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \le p_j < \infty$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \ge 1$ — целые числа и $f \in L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$. Положим ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$\omega^{k_j}_{x_j,p}(t, f) = \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^1,\\ |h| \le t}} \left\|\Delta^{k_j}_{he_j} f\right\|_p, \quad 0 \le t \le 1, \tag{1}$$

где e_j — единичный вектор, направленный вдоль оси x_j, и

$$\Delta^{k_j}_{he_j} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{k_j} (-1)^{k_j - m} C^m_{k_j} f(x_1, \dots, x_j + mh_j, \dots, x_n).$$

Функцию (1) называют *модулем гладкости порядка k_j функции f в направлении оси x_j*

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \le p_j < \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_j \ge 1$ — целые числа, задана вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(\delta) = (\omega_1(\delta), \dots, \omega_n(\delta))$ такая, что $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(t)$ строго возрастает на $[0,1]$ для каждого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, и пусть $f \in L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Следуя М. Л. Гольдману [1], определим *анизотропное пространство типа Никольского — Бесова $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$ в смешанной норме* как пространство всех измеримых функций, для каждой из которых конечна величина

$$\|f\|_B = \|f\|_{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\omega^{k_j}_{x_j\mathbf{p}}(\delta, f)}{\omega_j(\delta)}\right]^\theta \frac{d\omega_j(\delta)}{\omega_j(\delta)} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{при } 0 < \theta < \infty,$$

$$\|f\|_B = \|f\|_{\mathbf{p}} + \sum_{j=1}^n \sup_{0 < \delta \le 1} \frac{\omega^{k_j}_{x_j\mathbf{p}}(\delta, f)}{\omega_j(\delta)} \quad \text{при } \theta = \infty. \tag{2}$$

Отметим, что пространство зависит также от $\mathbf{k}$, хотя это не отражено в обозначении.

Пусть $\boldsymbol{\omega}(\delta) = (\omega_1(\delta), \dots, \omega_n(\delta))$, где $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(\delta)$ непрерывны и строго возрастают на $[0,1]$. При каждом $j = 1, 2, \dots, n$ для функции $u = \omega_j(\delta)$ рассмотрим обратные функций $\omega_j^{-1}(u)$ и положим

$$\delta = \Omega^{-1}(u) = \prod_{j=1}^n \omega_j^{-1}(u). \tag{3}$$

Функцию $u = \Omega(\delta)$, обратную к функции (3), называют *средней функцией* системы $\{\omega_j(\delta)\}_{j=1}^{n}$.

Это определение для случая $\omega_j(\delta) \in \Omega_1$ введено В. И. Колядой (см., например, [2]). В случае $\beta_j \geq 1$ средняя функция $u = \Omega(\delta)$ изучалась в [1]. Там же показано, что если $\boldsymbol{\omega}(\delta) \in \Omega_{\beta_1,\dots,\beta_n}$, то $\Omega_{\boldsymbol{\omega}}(\delta) \in \Omega_{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j^{-1}\right)^{-1}}$.

В. И. Коляда [3] дал эквивалентное определение среднего модуля непрерывности:

$$\Omega_{\boldsymbol{\omega}}(\delta) = \Omega(\delta; \omega_1, \dots, \omega_n) = \inf_{\substack{\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_n=\delta,\\ 0<\delta_j\leq 1}} \max_{1\leq j\leq n} \omega_j(\delta_j), \quad 0 < \delta \leq 1. \tag{4}$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть даны числа $a > 1$, $0 < \theta \leq \infty$, $\alpha_j > 0$, $1 \leq q_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, n$, и последовательности $\{\nu_j(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $j = 1, \dots, n$, каждая из которых удовлетворяет условию*

$$\nu_j(0) = 1, \quad \frac{\nu_j(t+1)}{\nu_j(t)} \geq \nu_j > 1, \quad j = 1, \dots, n, \ t = 0, 1, \dots. \tag{5}$$

Если

$$\left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[a^{-t} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{\alpha_j} \right]^{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}} = \infty, \tag{6}$$

где

$$q^* = \begin{cases} \min q_j, & \text{если } q_j < \infty \text{ при некотором } j, \\ 1, & \text{если } q_j = \infty \text{ при всех } j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 < \theta \leq q^*, \\ \frac{\theta q^*}{\theta - q^*} & \text{при } \theta > q^*, \end{cases}$$

то существует последовательность $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$, $a_t \geq 0$, такая, что $\left(\sum\limits_{t=0}^{\infty} a_t^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty$ и

$$\left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[a_t a^{-t} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{\alpha_j} \right]^{q^*} \right\}^{\frac{1}{q^*}} = \infty.$$

Доказательство следует из леммы 2 в [1] с соответствующими изменениями.

Лемма 2 (см. [1]). *Пусть $1 \leq p < q < r \leq \infty$ и задана последовательность $\{\nu(t)\}_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (5), и пусть дан ряд вида*

$$\psi(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t(x) \quad (\text{в } L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)),$$

где $\psi_t \in L^p(\mathbb{R}^1) \bigcap L^r(\mathbb{R}^1)$.

Тогда

$$\left\| \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t(x) \right\|_q \ll \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} [\|\psi_t\|_r \nu(t)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} + \|\psi_t\|_p \nu(t)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}]^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Лемма 3 (неравенство Никольского в смешанной норме [4]). *Пусть* $1 \le p_j < q_j \le \infty$ *и* $g_{\nu_1,\dots,\nu_n}(x)$ *— целая функция экспоненциального типа* $\nu_1,\dots,\nu_n$ *по переменным* $x_1,\dots,x_n$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\|g_{\nu_1,\dots,\nu_n}\|_{q_1,\dots,q_n} \ll \prod_{j=1}^{n} \nu_j^{\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}} \|g_{\nu_1,\dots,\nu_n}\|_{p_1,\dots,p_n}.$$

Лемма 4 (неравенство Юнга для смешанной нормы [5]). *Пусть даны* $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1,\dots,q_n)$, $1 \le p_j \le q_j \le \infty$, $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n)$, $r_j = 1 - \big(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\big)$, *функции* $f \in L^{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{R}^n)$ *и* $K \in L^{r_1,\dots,r_n}(\mathbb{R}^n)$,

$$I(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)K(y-x)\,dy.$$

Тогда

$$\|I\|_{q_1,\dots,q_n} \ll \|K\|_{r_1,\dots,r_n}\|f\|_{p_1,\dots,p_n}.$$

В частности, при $p_j = q_j$, $j = 1,\dots,n$,

$$\|I\|_q \ll \|K\|_1\|f\|_p.$$

Положим $(t = 0,1,2,\dots)$

$$m_{\nu(t),\mathbf{p}} = \{Q(x) \in L^{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{sup} p(FQ)(\xi) \subset P_t\},$$

где $P_t = \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| \le \nu_j(t),\ j = 1,\dots,n\}$, F — преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_n)$, $1 \le p_j < \infty$, $j = 1,\dots,n$, *даны последовательности* $\{\nu_j(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $j = 1,\dots,n$, *удовлетворяющие условию* (5), *и* $\nu(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} \nu_j(t)$. *Тогда для всякой функции* $f \in L^{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{R}^n)$ *в представлении*

$$(Q) : f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} Q_t(x) \quad (\text{в } L^{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{R}^n)), \quad Q_t \in m_{\nu(t),p_1,\dots,p_n}, \tag{8}$$

функции Q_t *можно выбрать такими, что*

$$Q_0 = 0, \quad \|Q_1\|_{\mathbf{p}} \le \|f\|_{\mathbf{p}}, \quad \|Q_t\|_{\mathbf{p}} \ll E_{\nu(t-2)}(f)_{\mathbf{p}}, \quad t = 4,5,\dots, \tag{9}$$

где $E_{\nu(t-2)}(f)_{\mathbf{p}} = E_{\nu_1(t-2),\dots,\nu_n(t-2)}(f)_{p_1,\dots,p_n}$ *— полные наилучшие приближения целыми функциями экспоненциального типа порядка* $\nu_j(t-2)$ *по* j*-й переменной* $(j = 1,\dots,n)$.

Доказательство. Пусть $f \in L^{p_1,\dots,p_n}(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\sigma_\nu(f,x)$ — сумма Валле-Пуссена порядка $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ функции $f(x)$ (см., например, [4, с. 295]), т. е.

$$\sigma_\nu(f,x) = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} V_\nu(x-u)f(u)\,du,$$

где

$$V_\nu(x) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\nu_j}\int\limits_{\nu_j}^{2\nu_j}\frac{\sin y_j x_j}{x_j}\,dy_j = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\nu_j}\frac{1}{x_j^2}[\cos\nu_j x_j - \cos 2\nu_j x_j],$$

причем для некоторого $M(n) > 0$ (зависящего только от n) и всех $\nu_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, выполнены неравенства $\|V_\nu\|_{L^{1,\dots,1}(\mathbb{R}^n)} \le M(n)$. Так как $V_\nu(f, x) \in L^{1,\dots,1}(\mathbb{R}^n)$, в силу неравенства Юнга для смешанной нормы (лемма 4) имеем $\|\sigma_\nu(f, x)\|_{\mathbf{p}} \ll \|V_\nu\|_1 \|f\|_{\mathbf{p}}$.

Отметим, что $\sigma_\nu(f, x)$ — целая функция экспоненциального типа ν для всякого $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Если $f_\nu(x)$ — целая функция экспоненциального типа ν, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место

$$\sigma_\nu(f_\nu, x) = f_\nu(x).$$

Равенство $\sigma_\nu(f_\nu, x) = f_\nu(x)$ в случае векторного параметра $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ легко следует из случая скалярного параметра, поскольку ядро Валле-Пуссена определяется как произведение соответствующих одномерных ядер. Учитывая тождество $\sigma_\nu(g_\nu, x) \equiv g_\nu(x)$ и линейность оператора свертки σ_ν, получим

$$\begin{aligned} \|\sigma_v(f, x) - f(x)\|_{\mathbf{p}} &\le \|\sigma_v(f - g_v, x) + g_v(x) - f(x)\|_{\mathbf{p}} \le \|\sigma_v(f - g_v, x)\|_{\mathbf{p}} \\ &+ \|g_v(x) - f(x)\|_{\mathbf{p}} \ll (\|V_v\|_1 + 1)\|f(x) - g_v(x)\|_{\mathbf{p}} \ll E_v(f)_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Положим (см. также (5))

$$Q_1 = Q_1(f, x) = \sigma_{\nu(0)}(f, x),$$

$$Q_t = Q_t(f, x) = \sigma_{\nu(t-1)}(f, x) - \sigma_{\nu(t-2)}(f, x) \quad \text{при } t = 2, 3, \dots.$$

Отсюда (см. (10))

$$\left\| f - \sum_{t=1}^{N} Q_t \right\|_{\mathbf{p}} = \|f - \sigma_{\nu(N-1)}\|_{\mathbf{p}} \ll E_{\nu(N-1)}(f)_{\mathbf{p}} \to 0, \quad N \to \infty,$$

что показывает справедливость (8). Тогда в силу (10)

$$\begin{aligned} \|Q_t\|_{\mathbf{p}} &\le \|\sigma_{\nu(t-1)}(f, x) - f(x)\|_{\mathbf{p}} + \|\sigma_{\nu(t-2)}(f, x) - f(x)\|_{\mathbf{p}} \\ &\ll E_{\nu(t-1)}(f)_{\mathbf{p}} + E_{\nu(t-2)}(f)_{\mathbf{p}} \ll E_{\nu(t-2)}(f)_{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Включение $Q_t \in m_{\nu(t), p_1, \dots, p_n}$ следует из теоремы Л. Шварца. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $1 \le p_j < q_j \le \infty$, заданы последовательности $\{\nu_j(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $j = 1, \dots, n$, каждая с условием (5), и пусть дано разложение*

$$(Q) : f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} Q_t(x) \quad (\text{в } L^{p_1, \dots, p_n}(\mathbb{R}^n)), \quad Q_t \in m_{\nu(t), p_1, \dots, p_n}. \tag{11}$$

Пусть также

$$q^* = \begin{cases} \min q_j, & \text{если } q_j < \infty \text{ при некотором } j, \\ 1, & \text{если } q_j = \infty \text{ при всех } j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f\|_{\mathbf{q}} \le c(p_j, q_j, \nu) \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|Q_t\|_{\mathbf{p}} \right]^{q^*} \right\}^{\frac{1}{q^*}}. \tag{12}$$

В случае $p = p_1 = \dots = p_n$ и $q = q_1 = \dots = q_n$ лемма 6 доказана в [1].

Доказательство. Достаточно доказать лемму для конечных сумм, а затем осуществить предельный переход в оценке (12).

Если все q_j, $j = 1, 2, \dots, n$, бесконечны, то $q^* = 1$ и неравенство (12) следует из (11) с помощью неравенства треугольника и неравенства Никольского (лемма 3):

$$\|f\|_{q_1,\dots,q_n} \ll \sum_{t=0}^{\infty} \|Q_t\|_{q_1,\dots,q_n} \ll \sum_{t=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{\frac{1}{p_j}} \|Q_t\|_{p_1,\dots,p_n}.$$

Пусть $q_j < \infty$ при некотором $j \in \{1, \dots, n\}$.

Сначала докажем лемму при $n = 3$. Для определенности предположим, что $q^* = q_2$, т. е.

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3), \quad q_1 \geq q_2, \ q_3 \geq q_2,$$

поэтому $\mathbf{q} = (q_1, q^*, q_3)$. Тогда

$$\|f\|_{\mathbf{q}} \leq c(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu) \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{3} \nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|Q_t\|_{\mathbf{p}} \right]^{q^*} \right\}^{\frac{1}{q^*}}.$$

Действительно, в силу леммы 2 для почти всех $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\|f(\cdot, x_2, x_3)\|_{q_1} \leq c_1 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \nu_1(t)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} \|Q_t(\cdot, x_2, x_3)\|_{p_1} \right\}.$$

Положим $\psi_t(x_2)_{x_3} = \nu_1(t)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} \|Q_t(\cdot, x_2, x_3)\|_{p_1}$.

Применяя лемму 2 для п. в. $x_3 \in \mathbb{R}^1$, получим ($1 \leq p_2 < q_2 < r \leq \infty$, $\nu(t) = \nu_2(t)$)

$$\begin{aligned} \|\|f(\cdot, \cdot, x_3)\|_{q_1}\|_{q_2} &\ll \left\| \sum_{t=0}^{\infty} \psi_t(\cdot)_{x_3} \right\|_{q_2} \\ &\ll \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} [\|\psi_t(\cdot)_{x_3}\|_r \nu_2(t)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q_2}} + \|\psi_t(\cdot)_{x_3}\|_{p_2} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}}]^{q_2} \right\}^{\frac{1}{q_2}}. \end{aligned}$$

Далее, в силу неравенства Никольского (лемма 3)

$$\|\psi_t(\cdot)_{x_3}\|_r \ll \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{r}} \|\psi_t(\cdot)_{x_3}\|_{p_2},$$

откуда

$$\|\|f(\cdot, \cdot, x_3)\|_{q_1}\|_{q_2} \ll \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} [\|\psi_t(\cdot)_{x_3}\|_{p_2} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}}]^{q_2} \right\}^{\frac{1}{q_2}}.$$

Таким образом,

$$\|f(\cdot, \cdot, x_3)\|_{q_1, q_2} \ll \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} [\nu_1(t)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}} \|Q_t(\cdot, \cdot, x_3)\|_{p_1, p_2}]^{q_2} \right\}^{\frac{1}{q_2}}.$$

Наконец, в силу неравенства Минковского при $\frac{q_3}{q_2} \geq 1$ имеем ($q_2 = q^*$)

$$\|f\|_{q_1,q_2,q_3} \ll \left\| \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} [\nu_1(t)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|Q_t(\cdot,\cdot,x_3)\|_{p_1,p_2}]^{q_2} \right\}^{\frac{1}{q_2}} \right\|_{q_3}$$

$$= \left(\left\| \sum_{t=0}^{\infty} [\nu_1(t)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|Q_t(\cdot,\cdot,x_3)\|_{p_1,p_2}]^{q_2} \right\|_{\frac{q_3}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\ll \left(\sum_{t=0}^{\infty} [\nu_1(t)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|Q_t(\cdot,\cdot,x_3)\|_{p_1,p_2,q_3}]^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\ll \left(\sum_{t=0}^{\infty} [\nu_1(t)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \nu_3(t)^{\frac{1}{p_3}-\frac{1}{q_3}} \|Q_t\|_{p_1,p_2,p_3}]^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\ll \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})} \|Q_t\|_{\mathbf{p}} \right]^{q^*} \right)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Итак, для случая $n = 3$ при $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\min\limits_{j=1,2,3} q_j = q_2$ лемма доказана.

Доказательство леммы при произвольном $n > 3$ проводится аналогично случаю $n = 3$. Именно, сгруппируем заданные $q_1, \ldots, q_n$ следующим образом:

1) пусть $q^* = q_{\min} = q_n$, тогда применяется неравенство Никольского до переменной x_{n-1}, а по переменной x_n используется лемма 2 с $r = \infty$;

2) пусть $q^* = q_{\min} = q_1$, тогда по переменной x_1 применяется лемма 2 с $r = \infty$, дальше последовательно используется неравенство Минковского;

3) пусть $q^* = q_k$, где $k \geq 1$ (последнее, если таковых больше одного), тогда представим набор $(q_1, \ldots, q_n)$ в виде $(q_1, \ldots, q_{k-1}, q^*, q_{k+1}, \ldots, q_n)$, затем повторяем рассуждения случая $n = 3$.

Лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leq p_j < \infty$, j=$1, \ldots, n$, $f \in L^{p_1,\ldots,p_n}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда верны следующие неравенства ($k_j \geq 1$ — целые числа, $j = 1, \ldots, n$):*

$$E_\nu(f)_{\mathbf{p}} \leq c \sum_{j=1}^{n} \omega_{x_j,\mathbf{p}}^{k_j}\left(f, \frac{1}{\nu_j}\right), \quad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n),\ \nu_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Доказательство повторяет доказательство неравенства (13) в случае L^p-нормы из [4] и основано на конструкции построения целых функций экспоненциального типа $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, осуществляющих наилучшие приближения (с точностью до постоянного множителя):

$$E_{\nu_1,\nu_2}(f)_{\mathbf{p}} \leq \|f(x_1,x_2) - g_{\nu_1,\nu_2}(x_1,x_2)\|_{\mathbf{p}}$$

$$\ll \|f(x_1,x_2) - g_{\nu_1,\infty}(x_1,x_2)\|_{\mathbf{p}} + \|g_{\nu_1,\infty}(x_1,x_2) - g_{\nu_1,\nu_2}(x_1,x_2)\|_{\mathbf{p}}$$

$$\ll \omega_{x_1,\mathbf{p}}^{k_1}\left(f, \frac{1}{\nu_1}\right) + \omega_{x_2,\mathbf{p}}^{k_2}\left(f, \frac{1}{\nu_2}\right) = \sum_{j=1}^{2} \omega_{x_j,\mathbf{p}}^{k_j}\left(f, \frac{1}{\nu_j}\right).$$

Лемма 8. *Пусть* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $1 < q_j < \infty$, $q^* = \min\limits_{j=1,\ldots,n} q_j$ *и заданы последовательности* $\{\nu_j(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $j = 1, \ldots, n$, *каждая вида (5) с* $\nu_j > 2$, *и неотрицательная последовательность* $\{\gamma_t\}_{t=0}^{\infty}$. *Пусть также даны множества*

$$\widetilde{P}_t = \left\{ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{2\nu_j(t)}{\nu_j} \leq \xi_j \leq \nu_j(t),\ j = 1, \ldots, n \right\}$$

и функции q_t такие, что $(Fq_t)(\xi) \in C_0^\infty(\widetilde{P}_t)$ и

$$q_t(x) \geq c_1(n)\gamma_t \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t) \quad \text{при} \max_{j=1,\dots,n} |x_j \nu_j(t)| \leq 1, \tag{14}$$

$$|q_t(x)| \leq c_2(n,\alpha)\gamma_t \prod_{j=1}^{n} (|x_j|^{-\alpha_j} \nu_j(t)^{1-\alpha_j}) \quad \text{для всех } \alpha_j \geq 0 \tag{15}$$

и всех $x \in \mathbb{R}^n$ ($\frac{1}{0} := +\infty$).

Тогда для любых целых чисел $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \infty$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\| \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} |q_t(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q_1,\dots,q_n} \gg \left\{ \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} \left(\gamma_t \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{1-\frac{1}{q_j}} \right)^{q^*} \right\}^{\frac{1}{q^*}}, \tag{16}$$

постоянная в которой не зависит от $\{\gamma_t\}$, τ_1 и τ_2.

Доказательство. Построение функций вида

$$q_t(E) = q_t(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} q_t^{(j)}(x_j)$$

со свойствами (14) и (15) проведено в [6, лемма 1]. Более того, имеет место равенство

$$\|q_t(x)\|_{r_1,\dots,r_n} = C(n)\gamma_t \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{1-\frac{1}{r_j}}, \quad 1 \leq r_j \leq \infty, \tag{17}$$

которое для изотропных $\mathbf{r} = (r,\dots,r)$, $1 \leq r \leq \infty$, доказано в [6], а для анизотропных $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n)$, $1 \leq r_j \leq \infty$, $j = 1,\dots,n$, доказывается последовательным применением изотропного варианта.

Обозначим ($j = 1,\dots,n$)

$$K_t^{(j)} = \{x_j \in \mathbb{R}^1 : |x_j \nu_j(t)| \leq 1\} = \left\{ x_j \in \mathbb{R}^1 : |x_j| \leq \frac{1}{\nu_j(t)} \right\}.$$

Положим $\Gamma_0^{(j)} = K_0^{(j)}$, $\Gamma_t^{(j)} = K_t^{(j)} \backslash K_{t+1}^{(j)}$, $t = 1,2,\dots$. Учитывая, что

$$\Gamma_t^{(j)} = K_t^{(j)} \backslash K_{t+1}^{(j)} = \left\{ x_j \in \mathbb{R}^1 : \frac{1}{\nu_j(t+1)} < |x_j| \leq \frac{1}{\nu_j(t)} \right\}$$

и (см. (5))

$$\frac{1}{\nu_j(t)} - \frac{1}{\nu_j(t+1)} = \frac{1}{\nu_j(t)} \left(1 - \frac{\nu_j(t)}{\nu_j(t+1)} \right) \asymp \frac{1}{\nu_j(t)},$$

имеем

$$\left|\Gamma_t^{(j)}\right| \asymp \left|K_t^{(j)}\right| = \frac{1}{\nu_j(t)},$$

где через $|E|$ обозначена длина промежутка E.

Пусть $n = 2$ и $q^* = q_2$. Тогда

$$J \equiv \left\| \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [q_t(x)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{q}} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [q_t(x_1,x_2)]^2 \right)^{\frac{q_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\gg \left\{ \sum_{b_2=\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Gamma_{b_2}^2} \left(\sum_{b_1=\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Gamma_{b_1}^1} \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [q_t(x_1,x_2)]^2 \right)^{\frac{q_1}{2}} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} dx_2 \right\}^{\frac{1}{q_2}}.$$

Далее, в силу (14) имеем

$$J \gg \left\{ \sum_{b_2=\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{b_1=\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_t \cdot \nu_1(t) \cdot \nu_2(t)]^2 \right)^{\frac{q_1}{2}} \frac{1}{\nu_1(b_1)} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{\nu_2(b_2)} \right\}^{\frac{1}{q_2}}. \tag{18}$$

Отсюда, сначала оставляя в сумме $\sum\limits_{t=\tau_1}^{\tau_2}$ из (18) только слагаемые при $t = b_1$, затем в $\sum\limits_{b_1=\tau_1}^{\tau_2}$ слагаемое $b_1 = b_2$ и возвращаясь к $t = b_1 = b_2$, получим

$$J \gg \left\{ \sum_{b_2=\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{b_1=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_{b_1} \nu_1(b_1) \nu_2(b_1)]^{q_1} \frac{1}{\nu_1(b_1)} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{\nu_2(b_1)} \right\}^{\frac{1}{q_2}}$$

$$\gg \left\{ \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} \gamma_t^{q_2} \nu_1(t)^{(q_1-1)\frac{q_2}{q_1}} \nu_2(t)^{q_2-1} \right\}^{\frac{1}{q_2}} = \left\{ \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_t \nu_1(t)^{1-\frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{1-\frac{1}{q_2}}]^{q_2} \right\}^{\frac{1}{q_2}},$$

что доказывает неравенство (16) в случае $n = 2$ и $q_2 = q^*$.

Пусть $n = 2$ и $q_1 = q^*$. Опять оставляя в сумме $\sum\limits_{t=\tau_1}^{\tau_2}$ из (18) только слагаемые при $t = b_1$, приходим к соотношению

$$J \gg \left\{ \sum_{b_2=\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{b_1=\tau_1}^{\tau_2} [(\gamma_{b_1} \nu_1(b_1) \nu_2(b_1))^2]^{\frac{q_1}{2}} \frac{1}{\nu_1(b_1)} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{1}{\nu_2(b_2)} \right\}^{\frac{1}{q_2}}$$

$$= \left\{ \sum_{b_2=\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{b_1=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_{b_1} \nu_1(b_1) \nu_2(b_1)]^{q_1} \frac{1}{\nu_1(b_1) \nu_2(b_2)^{\frac{q_1}{q_2}}} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right\}^{\frac{1}{q_2}}.$$

Оставляя во внешней сумме одно слагаемое при $b_2 = \tau_1$, используя неравенства $\frac{1}{\nu_2(\tau_1)} \geq \frac{1}{\nu_2(b_1)}$ и переходя к обозначению $t = b_1$, получим

$$J \gg \left(\sum_{b_1=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_{b_1} \nu_1(b_1) \nu_2(b_1)]^{q_1} \frac{1}{\nu_1(b_1) \nu_2(\tau_1)^{\frac{q_1}{q_2}}} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\gg \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_t \nu_1(t) \nu_2(t)]^{q_1} \frac{1}{\nu_1(t) \nu_2(t)^{\frac{q_1}{q_2}}} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= \left(\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} [\gamma_t \nu_1(t)^{1-\frac{1}{q_1}} \nu_2(t)^{1-\frac{1}{q_2}}]^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}},$$

что доказывает лемму в случае $n = 2$ и $q_1 = q^*$.

Итак, в случае $n = 2$ лемма доказана. При $n \geq 3$ лемма доказывается аналогично. $\square$

3. О вложении $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$

Теорема. *Пусть для каждого* $j = 1, \dots, n$ *даны числа* $1 \leq p_j < q_j \leq \infty$ $(L^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv C(\mathbb{R}^n))$, $0 < \theta \leq \infty$, $0 < \beta_j < k_j$, *строго возрастающие модули гладкости* $\omega_j(\delta)$ *порядка* k_j *такие, что* $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, $\omega_j(t)t^{-\beta_j}$ *почти убывает на* $(0, 1]$.

Пусть $\Omega(\delta)$ — средний модуль гладкости системы $\omega_1, \dots, \omega_n$. Также последовательно положим

$$q^* = \begin{cases} \min q_j, & \text{если } q_j < \infty \text{ при некотором } j, \\ 1, & \text{если } q_j = \infty \text{ при всех } j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 < \theta \le q^*, \\ \frac{\theta q^*}{\theta - q^*} & \text{при } \theta > q^*. \end{cases}$$

Тогда для того чтобы имело место вложение

$$B^{\omega_1, \dots, \omega_n}_{p_1, \dots, p_n, \theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1, \dots, q_n}(\mathbb{R}^n), \tag{19}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A \equiv A_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \theta, \omega_1, \dots, \omega_n} \equiv \left\{ \int_0^1 \left[\Omega(t) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))} \right]^{(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \right]^\rho \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{\rho}} < \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Достаточность. Сначала докажем неравенство

$$\|f\|_{\mathbf{q}} \ll \left[\left\{ \sum_{t=0}^\infty \left[\prod_{j=1}^n \nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}} \left(f, \frac{1}{\nu(t)} \right) \right]^{q^*} \right\}^{\frac{1}{q^*}} + \|f\|_{\mathbf{p}} \right], \tag{21}$$

где $\omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}}(f, u)$ — средний модуль непрерывности системы $\left\{ \omega^{k_j}_{x_j, \mathbf{p}}(f, u) \right\}_{j=1}^n$.

Итак, пусть $f \in L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$a = 2^{\max\limits_{j=1, \dots, n} k_j}, \quad \frac{1}{\nu_j(t)} = \omega_j^{-1}(a^{-t}), \quad j = 1, \dots, n,\ t = 0, 1, 2, \dots,$$

здесь и всюду далее в целях удобства чтения, сокращая записи, связь модулей гладкости и числовых последовательностей с f, k_j, $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}$, x_j и т. п., будем опускать, например, $\omega^{k_j}_{x_j, \mathbf{p}}(f, u) = \omega_j(u)$, $\omega^{-1}(\delta) = \prod\limits_{j=1}^n \omega_j^{-1}(\delta)$. Тогда

$$\omega_j \left(\frac{1}{\nu_j(t)} \right) = a^{-t}, \quad \omega^{-1}(a^{-t}) = \prod_{j=1}^n \omega_j^{-1}(a^{-t}) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\nu_j(t)} = \frac{1}{\nu(t)}, \tag{22}$$

где $\nu(t) = \prod\limits_{j=1}^n \nu_j(t)$. Отсюда $\omega\left(\frac{1}{\nu(t)}\right) = a^{-t}$.

Таким образом,

$$a^{-t} = \omega^{k_j}_{x_j, \mathbf{p}} \left(f, \frac{1}{\nu_j(t)} \right) = \omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}} \left(f, \frac{1}{\nu(t)} \right), \quad j = 1, \dots, n,\ t = 0, 1, 2, \dots. \tag{23}$$

Тогда условия (5) для каждого $\nu_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, будут выполнены с $\nu_j = 2$.

Согласно лемме 6 для $f \in L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)$ выберем $Q_t(x_1, \dots, x_n) = Q_t(f; x_1, \dots, x_n)$ такими, что выполнено равенство (8) и неравенства

$$Q_0 = 0, \quad \|Q_1\|_{\mathbf{p}} \le \|f\|_{\mathbf{p}}, \dots, \|Q_t\|_{\mathbf{p}} \ll E_{\nu(t-2)}(f)_{\mathbf{p}}.$$

Воспользовавшись леммой 7 и равенствами (22), получим

$$\|Q_t\|_{\mathbf{q}} \ll E_{\nu(t-2)}(f)_{\mathbf{p}} \ll \sum_{j=1}^n \omega^{k_j}_{x_j, \mathbf{p}} \left(f, \frac{1}{\nu_j(t-2)} \right) \underset{(n)}{\ll} a^{-(t-2)} \omega^{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}}(f, 1). \tag{24}$$

Применяя неравенства (24) и (23) к оценке (12) из леммы 6, имеем

$$\|f\|_{q_1,\dots,q_n} \ll \left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\|Q_t\|_{p_1,\dots,p_n}\right]^{q^*}\right\}^{\frac{1}{q^*}}$$

$$\ll \left[\left\{\sum_{t=2}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{q^*}\right\}^{\frac{1}{q^*}} + \prod_{j=1}^{n}\nu_j(1)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\|f\|_{\mathbf{p}}\right]$$

$$\ll \left[\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{q^*}\right\}^{\frac{1}{q^*}} + \|f\|_{\mathbf{p}}\right]. \quad (25)$$

Пусть $f \in B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что имеет место оценка

$$J \equiv \left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{q^*}\right\}^{\frac{1}{q^*}} \ll A\left\{\int_0^1\left[\frac{\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f,u)}{\Omega(u)}\right]^{\theta}\frac{d\Omega(u)}{\Omega(u)}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (26)$$

1. Пусть $\frac{\theta}{q^*} > 1$, тогда $\rho = \frac{\theta q^*}{\theta - q^*}$. Применяя к числовому ряду в (25) неравенство Гёльдера с показателями $r_1 = \frac{\theta}{q^*}$, $r_1' = \frac{\theta}{\theta-q^*}$ и определение последовательности $\{\nu_j(t)\}_{t=0}^{\infty}$, получим

$$J \ll \left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{q^*}\right\}^{\frac{1}{q^*}}$$

$$\ll \left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^{-t}\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^{\frac{\theta q^*}{\theta-q^*}}\right\}^{\frac{\theta-q^*}{\theta q^*}}\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

т. е.

$$J \ll \left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^{-t}\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}}\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (27)$$

2. Пусть $\frac{\theta}{q^*} \le 1$, тогда $\rho = \infty$. Пользуясь неравенством Йенсена ($(a_1 + \dots + a_k + \dots)^r \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^r$, где $0 \le r \le 1$) при $r = \frac{\theta}{q^*}$ и определением последовательности $\{\nu_j(t)\}_{t=0}^{\infty}$, получим

$$J \ll \sup_t\left[a^{-t}\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]\left[\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{\theta\frac{q^*}{\theta}}\right\}^{\frac{\theta}{q^*}}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\ll \sup_t\left[a^{-t}\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\Big(f,\frac{1}{\nu(t)}\Big)\right]^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (28)$$

Отдельно изучим поведение следующей величины из (27) и (28):

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_{\theta,q} \equiv \left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^{-t}\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}},$$

$$\widetilde{A}=\widetilde{A}_{\theta,q}\equiv\sup_t\left[a^{-t}\prod_{j=1}^n\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right].$$

Покажем, что

$$\widetilde{A}=\widetilde{A}_{\theta,q}\underset{p,q}{\asymp}A,\quad 0<\rho\le+\infty,\tag{29}$$

где $A\equiv A_{\mathbf{p},\mathbf{q},\theta,\omega_1,\dots,\omega_n}$ определено в (20). В самом деле, при $\rho<\infty$ дискретизируя данный интеграл $A\equiv A_{\mathbf{p},\mathbf{q},\theta,\omega_1,\dots,\omega_n}$ в (20) по последовательности $\{\nu(t)\}_{t=0}^{\infty}$, получим

$$A\equiv\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{\nu(t+1)}}^{\frac{1}{\nu(t)}}\left[\Omega(u)\prod_{j=1}^n\biggl(\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(u))}\biggr)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^\rho\frac{du}{u}\right\}^{\frac{1}{\rho}}.$$

Для интеграла A, учитывая $\nu(t)=\prod\limits_{j=1}^n\nu_j(t)$ и $\Omega\bigl(\frac{1}{\nu(t)}\bigr)=a^{-t}$, имеем

$$A\ll\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[\Omega\biggl(\frac{1}{\nu(t)}\biggr)\prod_{j=1}^n\biggl(\frac{1}{\omega_j^{-1}\bigl(\Omega\bigl(\frac{1}{\nu(t+1)}\bigr)\bigr)}\biggr)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^\rho\right\}^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\ll\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^{-t}\prod_{j=1}^n\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^\rho\right\}^{\frac{1}{\rho}}\equiv\widetilde{A}.$$

Аналогично (25) получим

$$A\gg\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[\Omega\biggl(\frac{1}{\nu(t+1)}\biggr)\prod_{j=1}^n\biggl(\frac{1}{\omega_j^{-1}\bigl(\Omega\bigl(\frac{1}{\nu(t)}\bigr)\bigr)}\biggr)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^\rho\right\}^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\gg\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^{-t}\prod_{j=1}^n\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^\rho\right\}^{\frac{1}{\rho}}\equiv\widetilde{A},$$

т. е. справедливость соотношения (29) при $\rho<\infty$ доказана.

Соотношение из (28) в случае $\rho=\infty$ записывается в виде

$$\widetilde{A}=\sup_{t=0,1,2,\dots}\left[a^{-t}\prod_{j=1}^n\nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]\asymp\sup_{0\le u\le1}\left[\Omega(u)\prod_{j=1}^n\biggl(\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(u))}\biggr)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]\equiv A$$

и мгновенно следует из равенств $\Omega\bigl(\frac{1}{\nu(t)}\bigr)=a^{-t}$, $t=0,1,2,\dots$, и $\omega_j^{-1}(a^{-t})=\frac{1}{\nu_j(t)}$, $t=0,1,2,\dots$.

Поэтому, заменяя $\widetilde{A}$ в неравенствах (27) и (28) на A, получим

$$J\ll A\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\omega_p^k\biggl(f,\frac{1}{\nu(t)}\biggr)\right]^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}.\tag{30}$$

Наконец докажем справедливость следующей двусторонней оценки:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\biggl(f,\frac{1}{\nu(t)}\biggr)\right]^\theta\asymp\int\limits_0^1\left[\frac{\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f,u)}{\Omega(u)}\right]^\theta\frac{d\Omega(u)}{\Omega(u)}.\tag{31}$$

Действительно, дискретизируя интеграл по последовательности $\{\nu(t)\}_{t=0}^{\infty}$, приходим к равенству

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f,u)}{\Omega(u)}\right]^{\theta} \frac{d\Omega(u)}{\Omega(u)} = \sum_{t=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{\nu(t+1)}}^{\frac{1}{\nu(t)}} \left[\frac{\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f,u)}{\Omega(u)}\right]^{\theta} \frac{d\Omega(u)}{\Omega(u)}$$

$$\asymp \sum_{t=0}^{\infty} \left[\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}\left(f, \frac{1}{\nu(t)}\right)\right]^{\theta} \int\limits_{\frac{1}{\nu(t+1)}}^{\frac{1}{\nu(t)}} \Omega^{-\theta-1}(u)\, d\Omega(u).$$

Далее, поскольку

$$I^{**} = \int\limits_{\frac{1}{\nu(t+1)}}^{\frac{1}{\nu(t)}} \Omega(u)^{-\theta-1}\, d\Omega(u) = \frac{1}{-\theta}\left[\frac{1}{\Omega(\frac{1}{\nu(t)})^{\theta}} - \frac{1}{\Omega(\frac{1}{\nu(t+1)})^{\theta}}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{(a^{-t-1})^{\theta}} - \frac{1}{(a^{-t})^{\theta}}\right] \asymp a^{\theta t},$$

убеждаемся в справедливости (31).

Таким образом, соотношения (31) и тем самым в силу (30) неравенство (26) доказаны.

Используя определение среднего модуля непрерывности (см. [3]) и соответствующее неравенство для среднего модуля непрерывности, поскольку $\Omega^{-1}(\nu) = \prod\limits_{j=1}^{n} \omega_j^{-1}(\nu)$ и по определению

$$\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f, \Omega^{-1}(\nu)) = \inf_{u_1\cdot\ldots\cdot u_n = \Omega^{-1}(\nu)} \max_{1\le j\le n} \omega_{x_j,\mathbf{p}}^{k_j}(f, u_j),$$

при $u_j = \omega_j^{-1}(\nu)$ имеем

$$\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f, \Omega^{-1}(\nu)) \ll \max_{1\le j\le n} \omega_{x_j,\mathbf{p}}^{k_j}\big(f, \omega_j^{-1}(\nu)\big) \ll \sum_{j=1}^{n} \omega_{x_j,\mathbf{p}}^{k_j}\big(f, \omega_j^{-1}(\nu)\big).$$

Произведя замену переменной $u = \Omega^{-1}(\nu)$, получим

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f,u)}{\Omega(u)}\right]^{\theta} \frac{d\Omega(u)}{\Omega(u)} = \int\limits_0^1 \left[\frac{\omega_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}(f,\Omega^{-1}(\nu))}{\nu}\right]^{\theta} \frac{d\nu}{\nu}$$

$$\ll \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 \left[\frac{\omega_{x_j,\mathbf{p}}^{k_j}(f,\omega_j^{-1}(\nu))}{\nu}\right]^{\theta} \frac{d\nu}{\nu} \equiv \|f\|_B. \quad (32)$$

В итоге из оценок (21), (26), (32) и определения нормы Никольского — Бесова, приходим к искомому неравенству

$$\|f\|_{\mathbf{q}} \ll \left\{\int\limits_0^1 \left[\Omega(t)\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))}\right]^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}\right]^{\rho} \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{\rho}} \cdot \|f\|_B,$$

т. е. справедливо вложение $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$.

Необходимость. Пусть $\boldsymbol{\omega}(t) \in (\Omega_{\boldsymbol{\beta}})$ и $A \equiv A_{\mathbf{p},\mathbf{q},\theta,\omega_1,\dots,\omega_n} = \infty$. Тогда найдется функция $f(x)$ такая, что $f \in B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$, но $f \notin L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$.

По данным строго возрастающим модулям непрерывности $\omega_j(\delta)$ порядка k_j таким, что $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) = 1$, определим последовательности (см. (27))

$$a^{-t} = \omega_j\left(\frac{1}{\nu_j(t)}\right), \quad a = 2^{\max\limits_{j=1,\dots,n} k_j}.$$

Тогда последовательности $\nu_j(t)$ удовлетворяют условию (5) с $\nu_j \geq 2$, $j = 1,\dots,n$: $\frac{v_j(t+1)}{v_j(t)} \geq 2$.

При $0 < \beta_j < k_j$ эквивалентное описание пространства $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$ задается разложениями (8), для которых (доказательство для скалярного p см. [6], а случай векторного $\mathbf{p}$ доказывается заменой скалярного p на векторный $\mathbf{p}$)

$$|f|_{(Q)} \equiv \left\{\sum_{t=0}^{\infty}[a^t\|Q_t\|_{\mathbf{p}}]^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty \tag{33}$$

и

$$\|f\|_B \asymp \|f\|_{B^*} \equiv \inf_Q |f|_{(Q)}. \tag{34}$$

Пусть последовательность $\gamma_t \geq 0$ такова, что

$$\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\gamma_t\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(1-\frac{1}{p_j})}\right]^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty. \tag{35}$$

В качестве функций Q_t, $t = 0,1,\dots,$ из определения (33), (34) возьмем функции q_t из леммы 8 и положим

$$(Q): f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} q_t(x) \quad (\text{в } L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n)). \tag{36}$$

Покажем, что для этой функции f выполнено условие (33). По условию (35) и свойству (17) функции $q_t(x)$ имеем

$$\sum_{t=0}^{\infty}[a^t\|q_t\|_{\mathbf{p}}]^\theta \ll \sum_{t=0}^{\infty}\left[a^t\gamma_t\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{(1-\frac{1}{p_j})}\right]^\theta < \infty.$$

Из (36), учитывая (34) и последнее соотношение, получим

$$\|f\|_B \leq c|f|_{(Q)} \ll \left\{\sum_{t=0}^{\infty}[a^t\|q_t\|_{\mathbf{p}}]^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty.$$

Итак, при выполнении условия (35) ряд в (36) определяет некоторую функцию f из пространства $B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Покажем, что при выполнении $A \equiv A_{\mathbf{p},\mathbf{q},\theta,\omega_1,\dots,\omega_n} = \infty$ функция f не принадлежит $L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$.

Сначала рассмотрим случай $q_j < \infty$ хотя бы для одного номера j. Согласно теореме Литтлвуда — Пэли и неравенству (16) имеем

$$\|f\|_{\mathbf{q}} \asymp \left\|\left(\sum_{t=0}^{\infty}|q_t(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathbf{q}} \gg \left\{\sum_{t=\tau_1}^{\tau_2}\left(\gamma_t\prod_{j=1}^{n}\nu_j(t)^{1-\frac{1}{q_j}}\right)^{q^*}\right\}^{\frac{1}{q^*}}. \tag{37}$$

Если $q_1 = q_2 = \dots = q_n = +\infty$, то в силу (14) получим

$$\|f\|_\infty \geq f(0) \gg \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t). \tag{38}$$

Из соотношения (29) и условий $A \equiv A_{\mathbf{p},\mathbf{q},\theta,\omega_1,\dots,\omega_n} = \infty$ следует, что

$$+\infty = A \asymp \widetilde{A} = \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[a^{-t} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \right]^{\rho} \right\}^{\frac{1}{\rho}}. \tag{39}$$

Положив в лемме 1 $\alpha_j = \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}$, в силу соотношения (39), которое обеспечивает выполнение (6), можно выбрать последовательность чисел $\{a_t\}_{t=0}^{\infty}$, $a_t \geq 0$, так, что

$$\sum_{t=0}^{\infty} (a_t)^{\theta} < \infty \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[a_t a^{-t} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}} \right]^{q^*} \right\}^{\frac{1}{q^*}} = \infty. \tag{40}$$

До сих пор на последовательность $\{\gamma_t\}$ из леммы 8 было наложено единственное условие — ее неотрицательность.

Положим $\gamma_t = a_t a^{-t} \prod\limits_{j=1}^{n} \nu_j(t)^{(\frac{1}{p_j} - 1)}$. Тогда в силу первого соотношения из (40)

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left[a^t \gamma_t \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{(1 - \frac{1}{p_j})} \right]^{\theta} = \sum_{t=0}^{\infty} \left[a^t a_t a^{-t} \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{(\frac{1}{p_j} - 1)} \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{(1 - \frac{1}{p_j})} \right]^{\theta} = \sum_{t=0}^{\infty} a_t^{\theta} < \infty,$$

т. е. выполнено (39).

Следовательно, как отмечено выше, $f \in B^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)$.

Осталось показать, что $f \notin L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$. Для этого достаточно убедиться в том, что ряды в правых частях (37) и (38) расходятся.

Действительно, пусть $q_j < \infty$ хотя бы для одного j. Тогда в силу (37) и второго соотношения из (40) получим

$$\|f\|_q \gg \sum_{t=0}^{\infty} \left[\gamma_t \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{1 - \frac{1}{q_j}} \right]^{q^*} = \sum_{t=0}^{\infty} \left[a_t a^{-t} \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}} \right]^{q^*} = +\infty.$$

Если $q_j = \infty$ при всех $j = 1, \dots, n$, то $q^* = 1$. Поэтому ввиду (38) и второго соотношения из (40) имеем

$$\|f\|_\infty \gg \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \prod_{j=1}^{n} v_j(t) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t a^{-t} \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{(\frac{1}{p_j} - 1)} \prod_{j=1}^{n} v_j(t) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t a^{-t} \prod_{j=1}^{n} v_j(t)^{\frac{1}{p_j}} = \infty.$$

Тем самым из соотношений (37) и (38) следует, что $f \notin L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. При $p = p_1 = \dots = p_n$, $q = q_1 = \dots = q_n$ утверждение теоремы совпадает с теоремой 1 из [1]. При несовпадающих p_j или несовпадающих q_j утверждения теоремы, как нам кажется, являются новыми.

Перейдем к следствиям доказанной теоремы.

Задача. *При каких неулучшаемых соотношениях между числами $n = 1, 2, \dots, 0 < \theta \le \infty$, $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$, $1 \le p_1 < q_1 \le \infty, \dots, 1 \le p_n < q_n \le \infty$ имеет место вложение $B^{r_1,\dots,r_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$?*

Следствие 1. *Пусть $n = 1, 2, \dots$, $0 < \theta \le \infty$, $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$, $1 \le p_1 < q_1 \le \infty, \dots, 1 \le p_n < q_n \le \infty$.*

1. *Если $\min\limits_{j=1,\dots,n} q_j = q^* < +\infty$, то*

$$B^{r_1,\dots,r_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < +\infty, & 1 > \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\big(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\big), \\ 0 < \theta \le q^*, & 1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\big(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\big). \end{cases}$$

2. *Если $q_1 = \dots = q_n = \infty$, то*

$$B^{r_1,\dots,r_n}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < +\infty, & 1 > \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j p_j}, \\ 0 < \theta \le 1, & 1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j p_j}. \end{cases}$$

В частности (см., например, [7]),

$$B^{\frac{n}{p},\dots,\frac{n}{p}}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow 0 < \theta \le 1.$$

3. *Если $1 < q_1, \dots, q_\nu < q_{\nu+1} = \dots = q_n = \infty$ и $\min\limits_{j=1,\dots,\nu} q_j = q^* < +\infty$, то*

$$B^{r_1,\dots,r_n}_{p_1,\dots,p_\nu,p_{\nu+1},\dots,p_{\nu+1},\theta}(\mathbb{R}^n) \subset L^{q_1,\dots,q_\nu,+\infty,\dots,+\infty}(\mathbb{R}^n)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \theta < +\infty, & 1 > \sum\limits_{j=1}^{\nu} \frac{1}{r_j}\big(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\big) + \sum\limits_{j=\nu+1}^{n} \frac{1}{r_j p_j}, \\ 0 < \theta \le q^*, & 1 = \sum\limits_{j=1}^{\nu} \frac{1}{r_j}\big(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\big) + \sum\limits_{j=\nu+1}^{n} \frac{1}{r_j p_j}. \end{cases}$$

Следствие 2. *Пусть даны числа $1 \le p_1 < q_1 \le \infty, \dots, 1 \le p_n < q_n \le \infty$, $r_j > 0$, λ_j любое $(j = 1, \dots, n)$. Пусть также даны $\omega_j(t) = t^{r_j} \ln^{\lambda_j}(1/t)$, следовательно,*

$$\Omega(t) \asymp t^{\frac{1}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}} (\ln(1/t))^{\frac{\lambda_1 r_1^{-1}+\dots+\lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}},$$

$$\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))}\Big)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}$$
$$\asymp t^{-\frac{1}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})} (\ln(1/t))^{-\frac{\lambda_1 r_1^{-1}+\dots+\lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}.$$

Отсюда

$$\Omega(t)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{\omega_j^{-1}(\Omega(t))}\right)^{(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})}$$

$$\asymp t^{\frac{1}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}[1-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})]}(\ln(1/t))^{\frac{\lambda_1 r_1^{-1}+\dots+\lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}[1-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})]}.$$

Положим $\tau\equiv\frac{\lambda_1 r_1^{-1}+\dots+\lambda_n r_n^{-1}}{r_1^{-1}+\dots+r_n^{-1}}\left[1-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)\right]\cdot[\theta q^*/(\theta-q^*)]$. *Тогда*

1. $B^{r_1,\dots,r_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)\underset{(\min\limits_{j=1,\dots,n}q_j=q^*<+\infty)}{\subset}L^{q_1,\dots,q_n}(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1>\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right), & -\infty<\tau<+\infty,\ 0<\theta\le+\infty,\\ 1=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right), & -\infty<\tau<1,\ 0<\theta\le+\infty,\ \tau\le 0,\ 0<\theta\le q^*.\end{cases}$$

Если $1=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)$ *и* $\tau>0$, *то вложение* 1 *невозможно при любых* $0<\theta\le+\infty$.

2. $B^{r_1,\dots,r_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{p_1,\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)\underset{(q_1=\dots=q_n=\infty)}{\subset}C(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1>\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_jp_j}, & -\infty<\tau<+\infty,\ 0<\theta\le+\infty,\\ 1=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_jp_j} & -\infty<\tau<1,\ 0<\theta\le+\infty,\\ 1=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_jp_j}, & \tau\le 0,\ 0<\theta\le 1,\end{cases}$$

$$B^{\frac{n}{p},\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)\underset{(q_1=\dots=q_n=\infty)}{\subset}C(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow\begin{cases}-\infty<\tau<1, & 0<\theta\le+\infty,\\ \tau\le 0, & 0<\theta\le 1.\end{cases}$$

Если $1=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{r_jp_j}$ *и* $\tau>0$, *то вложение* 2 *невозможно при любых* $0<\theta\le+\infty$.

3. $B^{r_1,\dots,r_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{p_1,\dots,p_\nu,p_{\nu+1},\dots,p_n,\theta}(\mathbb{R}^n)\underset{1<q^*=\min\limits_{j=1,\dots,n}q_j<+\infty}{\subset}L^{q_1,\dots,q_\nu,+\infty,\dots,+\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1>\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)-\sum\limits_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{r_jp_j}, & -\infty<\tau<+\infty,\ 0<\theta\le+\infty,\\ 1=\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)-\sum\limits_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{r_jp_j}, & -\infty<\tau<1,\ 0<\theta\le+\infty,\\ & \tau\le 0,\ 0<\theta\le q^*.\end{cases}$$

Если $1=\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\right)-\sum\limits_{j=\nu+1}^{n}\frac{1}{r_jp_j}$ *и* $\tau>0$, *то вложение* 3 *невозможно при любых* $0<\theta\le+\infty$.

Замечание 2. Основные результаты следствия 1 совпадают с соответствующими результатами из [5, § 17]. Результаты следствия 2, как нам кажется, новые.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдман М. Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского — Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 170. С. 86–104.
2. *Коляда В. И.* О вложении некоторых классов функций многих переменных // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 4. С. 766–790.
3. *Коляда В. И.* Перестановки функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 5. С. 61–95.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука; Физматлит, 1996.
6. *Гольдман М. Л.* Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 47–80.
7. *Haroske D. D.* Envelopes and sharp embeddings of function spaces. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2007. (Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.; V. 437).

Статья поступила 25 августа 2013 г.

Сулейменов Кенесары
Университет Туран-Астана,
ул. Дукенулы, 29, Астана 010000, Казахстан
kenessary@mail.ru

Ташатов Нурлан Наркенович
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 5, Астана 010008, Казахстан
tash.nur@mail.ru