Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 512.542

О ЛОКАЛЬНОМ СЛУЧАЕ В ТЕОРЕМЕ АШБАХЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУПП

А. А. Гальт, В. Го,
Е. М. Аверкин, Д. О. Ревин

Аннотация. Рассматриваются подгруппы H линейной или унитарной группы G над конечным полем такие, что $O_r(H) \nleq Z(G)$ для некоторого нечетного простого числа r. Для этого случая получено уточнение известной теоремы Ашбахера о подгруппах классических групп.

Ключевые слова: линейная группа, унитарная группа, класс Ашбахера, радикальная r-подгруппа.

Введение

После завершения классификации конечных простых групп исключительное значение имеет изучение подгруппового строения таких групп.

Подгруппы в классических группах в значительной степени описывает теорема Ашбахера [1].

Теорема Ашбахера. *Пусть G — классическая группа, $H \leq G$. Тогда либо образ H в $G/Z(G)$ является почти простой группой, либо H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1$–$\mathscr{C}_8$.*

Здесь $\mathscr{C}_1$–$\mathscr{C}_8$ — естественные классы подгрупп в классических группах, выделенные Ашбахером.

Точное описание элементов в классах $\mathscr{C}_1$–$\mathscr{C}_8$ получено в [2]. Следует отметить, что в определении классов $\mathscr{C}_1$–$\mathscr{C}_8$ в [1, 2] имеются незначительные расхождения и в дальнейшем классы Ашбахера будем понимать в смысле [2]. В табл. 1 (см. [2, табл. 1.2.A]) приведено примерное описание (тип) подгрупп, составляющих тот или иной класс Ашбахера в общих линейных группах. Строгое описание классов $\mathscr{C}_1$–$\mathscr{C}_8$ см. в [2, гл. 4].

Отметим, что теорема Ашбахера не дает полного описания подгруппового строения соответствующих групп хотя бы по той причине, что нет описания почти простых подгрупп в классических группах. Даже в ситуации, когда подгруппа заведомо не является почти простой (скажем, имеет нетривиальный разрешимый радикал и содержится в некоторой локальной подгруппе), использование теоремы Ашбахера в качестве инструмента индуктивных рассуждений

Первый и второй автор поддержаны грантом NNSF grant of China (Grant # 11371335). Кроме того, первый автор поддержан грантом Chinese Universities Scientific Fund (project number WK0010000029). Второй автор поддержан Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, USTC, Chinese Academy of Sciences. Четвертый автор поддержан РФФИ (грант 13–01–00505) и целевой программой СО РАН на 2012–2014 гг. (интеграционный проект № 14).

Таблица 1. Классы Ашбахера в $\mathrm{GL}_n(q)$

$\mathscr{C}_i$	Наименование	Примерное строение в $\mathrm{GL}_n(q)$
$\mathscr{C}_1$	Стабилизаторы вполне изотропных или невырожденных подпространств естественного модуля	Максимальные параболические
$\mathscr{C}_2$	Стабилизаторы разложений естественного модуля V в прямую сумму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_t$, $\dim(V_i) = a$	$\mathrm{GL}_a(q) \wr S_t$, $n = at$
$\mathscr{C}_3$	Подгруппы, связанные с расширением поля $\mathbb{F}_q$	$\mathrm{GL}_a(q^b).b$, $n = ab$, b простое
$\mathscr{C}_4$	Стабилизаторы тензорных разложений $V = V_1 \bigotimes V_2$ естественного модуля V	$\mathrm{GL}_a(q) \circ \mathrm{GL}_b(q)$, $n = ab$
$\mathscr{C}_5$	Подгруппы, соответствующие подполям простого индекса b поля $\mathbb{F}_q$	$\mathrm{GL}_n(q_0)$, $q = q_0^b$, b простое
$\mathscr{C}_6$	Нормализаторы s-групп симплектического типа, s простое	$(\mathbb{Z}_{q-1} \circ s^{1+2a}).\,\mathrm{Sp}_{2a}(s)$, $n = s^a$
$\mathscr{C}_7$	Стабилизаторы тензорных разложений естественного модуля $V = \bigotimes_{i=1}^{t} V_i$, $\dim(V_i) = a$	$(\overbrace{\mathrm{GL}_a(q) \circ \dots \circ \mathrm{GL}_a(q)}^{t}).S_t$, $n = a^t$
$\mathscr{C}_8$	Классические группы	$\mathrm{Sp}_n(q)$, n четно, $\mathrm{O}_n(q)$, $\mathrm{O}_n^{\pm}(q)$, q нечетно, $\mathrm{GU}_n(q^{1/2})$, q — квадрат

может быть сопряжено со значительными трудностями. Например, если подгруппа H классической группы попадает в класс $\mathscr{C}_6$ (нормализаторы подгрупп симплектического типа), то контролировать выполнение предположения индукции бывает зачастую невозможно, поскольку меняется характеристика основного поля. При этом подгруппа H вовсе не обязана содержаться в локальной максимальной подгруппе, которые полностью описаны (см. [2, следствие 1.2.4]).

Такого рода трудности возникали, например, в [3–5] при получении описания простых групп, обладающих холловым свойством D_π. Там эти трудности удалось преодолеть за счет использования описания нормализаторов так называемых радикальных подгрупп (см. определение в разд. 1) в классических группах. Это описание получено Альперином и Фонгом в [6] и Аном в [7–10] как побочный результат изучения в случае классических групп известной гипотезы Альперина о весах, имеющей большое значение для теории представлений. В частности, оказалось, что если H — подгруппа в классической простой группе G над полем характеристики p и H имеет нетривиальную нормальную r-подгруппу для некоторого простого числа r, то H содержится в собственной подгруппе C группы G такой, что любой неабелев композиционный фактор группы C изоморфен либо знакопеременной группе, либо классической группе характеристики p или r.

Однако точная формулировка результатов Альперина, Фонга и Ана в той части, которая характеризует радикальные подгруппы и их нормализаторы, достаточно громоздка и хотелось бы иметь эквивалентный данному описанию инструмент индуктивных рассуждений, с одной стороны, напоминающий привычные результаты Ашбахера, а с другой, позволяющий обходить трудности с возникновением «чужой» характеристики.

В данной работе рассматриваются подгруппы H линейных и унитарных групп, образ которых в фактор-группе по центру всей группы обладает нетривиальной нормальной r-подгруппой для некоторого нечетного простого числа r. Для унификации формулировок и рассуждений мы вслед за [2] используем обозначение $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$, где $\eta = \pm 1$, или знак этого числа, при этом $\mathrm{GL}_n^+(q) = \mathrm{GL}_n(q)$ — общая линейная группа и $\mathrm{GL}_n^-(q) = \mathrm{GU}_n(q)$ — унитарная группа. Для группы G такой, что $\mathrm{SL}_n^\eta(q) \le G \le \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, определение классов Ашбахера $\mathscr{C}_i = \mathscr{C}_i(G)$, $i = 1, \dots, 8$, можно найти в [2]. Экстраспециальную группу порядка r^{2a+1} и экспоненты r, где r — нечетное простое число, будем обозначать через r^{2a+1}. Через Q_8 обозначается группа кватернионов, через $\mathbb{Z}_n$ — циклическая группа порядка n. Некоторое центральное произведение групп A и B обозначается через $A \circ B$.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \le G$, $O_r(H) \not\le Z(G)$ для некоторого нечетного простого r. Тогда либо H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1$–$\mathscr{C}_4$, либо $n = r^a$ для некоторого a и H содержится в нормализаторе N некоторой r-подгруппы симплектического типа* (элементе класса $\mathscr{C}_6$) *вида $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2a}).\,\mathrm{Sp}_{2a}(r)$, причем $O_r(H) \le O_r(N)$.*

Следствие. *Пусть G — группа такая, что $\mathrm{SL}_n^\eta(q) \le G \le \mathrm{GL}_n^\eta(q)$ и $Z \le Z(G)$. Пусть $^- : G \to G/Z$ — естественный гомоморфизм и H — полный прообраз в G подгруппы $\overline{H} \le \overline{G}$ такой, что $O_r(\overline{H}) \not\le Z(\overline{G})$ для некоторого нечетного простого r. Тогда либо H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathscr{C}_1(G)$–$\mathscr{C}_4(G)$, либо $n = r^a$ для некоторого a, H содержится в $N \in \mathscr{C}_6(G)$,*

$$N = \begin{cases} (Z(G) \circ 3^{1+2}).Q_8, & \text{если } n = r = 3,\ \left|\mathrm{GL}_3^\eta(q) : G\right|_3 = 3 \text{ и } \left|G : \mathrm{SL}_3^\eta(q)\right|_3 = 1, \\ (Z(G) \circ r^{1+2a}).\,\mathrm{Sp}_{2a}(r) & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и $O_r(H) \le O_r(N)$.

В дальнейшем планируется получить подобные результаты для всех классических групп и без каких-либо ограничений на r.

1. Радикальные r-подгруппы и их использование для изучения подгрупп с нетривиальным r-радикалом

Определение. Напомним, что согласно [6] подгруппа R группы G называется *радикальной r-подгруппой* для некоторого простого числа r, если $R = O_r(N_G(R))$.

Определение. Пусть G — конечная группа, r — простое число и H_1, H_2 — подгруппы группы G. Будем писать $H_1 \le_r H_2$, если $H_1 \le H_2$ и $O_r(H_1) \le O_r(H_2)$.

Легко видеть, что отношение $\le_r$ задает частичный порядок на множестве подгрупп. При этом если H — максимальная относительно данного порядка подгруппа, то $N_G(O_r(H)) = H$. Таким образом, $O_r(H)$ является радикальной r-подгруппой. Отметим, что верно и обратное, т. е. подгруппы группы H, максимальные относительно отношения $\le_r$, являются нормализаторами радикальных подгрупп (см. [11, § 1]). Тем самым имеет место следующее

Замечание. Пусть G — конечная группа, $H \le G$ и $O_r(H) \ne 1$ для некоторого простого числа r. Тогда существует радикальная r-подгруппа R группы G такая, что $H \le N_G(R)$ и $O_r(H) \le R$.

2. Описание радикальных r-подгрупп и их нормализаторов в линейных и унитарных группах

В данном разделе приводится описание радикальных r-подгрупп в линейных и унитарных группах для нечетного r, которое получено в [6, § 4] и [7, § 2] соответственно. Для произвольных квадратных матриц A, B определим их кронекерово произведение:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Пусть q — некоторая степень простого числа p и $\eta \in \{+,-\}$ — знак. Пусть r — нечетное простое число, $(q,r)=1$, e — порядок элемента ηq по модулю r (т. е. наименьшее среди натуральных чисел m таких, что $(\eta q)^m \equiv 1 \pmod r$), $\varepsilon = \eta^e$, и число a определяется равенством $(q^{2e}-1)_r = r^a$. Для неотрицательного целого числа γ через E_γ будем обозначать экстраспециальную группу экспоненты r и порядка $r^{1+2\gamma}$ (при этом если $\gamma = 0$, то E_γ — циклическая группа порядка r). Для неотрицательного целого числа α через Z_α будем обозначать циклическую группу порядка $r^{a+\alpha}$. Через $R_{\alpha,\gamma}$ обозначается центральное произведение групп Z_α и E_γ такое, что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Группа $R_{\alpha,\gamma}$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ (см. [2, предложение 4.6.3]), а группа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$, расширенная элементом порядка er^α, вкладывается в группу $\mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$ (см. [2, § 4.3]). При этом образ группы $R_{\alpha,\gamma}$ относительно композиции вложений

$$R_{\alpha,\gamma} \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q) \tag{1}$$

определяется однозначно с точностью до сопряженности. Следуя [7, 1C], обозначим через $\mathbf{W}$ сужение вложения $R_{\alpha,\gamma} \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ на E_γ, и пусть $L_{\alpha,\gamma}$ — нормализатор $\mathbf{W}(E_\gamma)$ в $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$. В силу вышесказанного группа $L_{\alpha,\gamma}$ также вкладывается в $\mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Пусть $V_{\alpha,\gamma}$ — естественный модуль для группы $G_{\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q)$. Далее, для любого натурального числа m определим

$$V_{m,\alpha,\gamma} = \underbrace{V_{\alpha,\gamma} \perp V_{\alpha,\gamma} \perp \ldots \perp V_{\alpha,\gamma}}_{m \text{ раз}},$$

где $\perp$ обозначает прямую сумму подпространств в случае $\eta = +$ и ортогональную прямую сумму при $\eta = -$. Пусть также $G_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$, при этом $V_{m,\alpha,\gamma}$ можно рассматривать как естественный модуль для $G_{m,\alpha,\gamma}$. Группа $G_{\alpha,\gamma}$ посредством вложения $g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}$, где I_m — единичная матрица размера m, вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma}$.

Легко видеть, что группу $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha})$ можно также вложить в $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ посредством цепочки вложений

$$\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$$

таким образом, что следующая диаграмма окажется коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}^{\eta}_{er^{\alpha+\gamma}}(q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)\ . \end{array}$$

Поскольку вложение $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}}) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ задается правилом $g \mapsto I_m \otimes g$, образ группы $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ в $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ совпадает с подгруппой $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$.

Отметим также, что между подгруппами $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ и $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ находится подгруппа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^{\alpha}}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$, которая при $m > 1$ принадлежит классу Ашбахера $\mathscr{C}_4\big(\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})\big)$. Кроме того, между подгруппами $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ и $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ находится подгруппа $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}}).er^{\alpha}$, принадлежащая при $e > 1$ или $\alpha > 0$ классу $\mathscr{C}_3\big(\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)\big)$.

Для наглядности перечисленные подгруппы группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$ представим на диаграмме, изображенной на рис. 1 (двойная линия соответствует нормальным подгруппам).

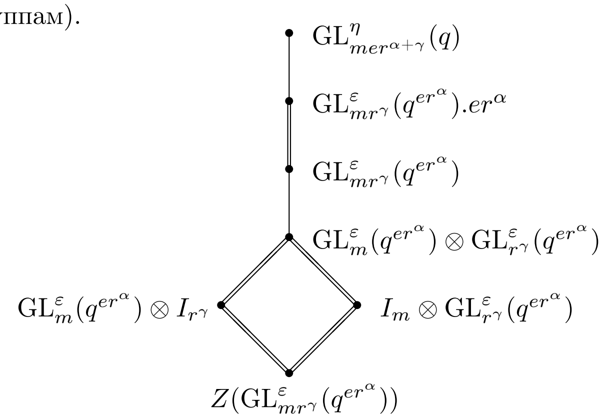

Рис. 1.

Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $L_{m,\alpha,\gamma}$ образы в $G_{m,\alpha,\gamma}$ групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $L_{\alpha,\gamma}$ относительно композиции этих вложений. Пусть $C_{m,\alpha,\gamma} = C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma} = N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma} = \{g \in N_{m,\alpha,\gamma} \mid [g, Z(R_{m,\alpha,\gamma})] = 1\}$.

Предложение 1. *Во введенных обозначениях*

(1) $C_{m,\alpha,\gamma} = \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^{\alpha}}) \otimes I_{r^{\gamma}}$;

(2) $N^0_{m,\alpha,\gamma} = L_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$, *где* $R_{m,\alpha,\gamma} \leq L_{m,\alpha,\gamma}$, $L_{m,\alpha,\gamma} \cap C_{m,\alpha,\gamma} = Z(L_{m,\alpha,\gamma}) = Z(C_{m,\alpha,\gamma})$, $[L_{m,\alpha,\gamma}, C_{m,\alpha,\gamma}] = 1$, $L_{m,\alpha,\gamma}/Z(L_{m,\alpha,\gamma})R_{m,\alpha,\gamma} \simeq \mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ *и* $L_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $I_m \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$;

(3) $\big|N_{m,\alpha,\gamma}/N^0_{m,\alpha,\gamma}\big| = er^{\alpha}$;

(4) $N_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{mr^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}}).er^{\alpha}$.

Доказательство см. в [6, § 4; 7, § 2]. □

Добавим в предыдущую диаграмму группы из предложения 1 (рис. 2). В частности, легко видеть, что подгруппа $N^0_{m,\alpha,\gamma} = L_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$ содержится в подгруппе $\mathrm{GL}^{\varepsilon}_{m}(q^{er^{\alpha}}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon}_{r^{\gamma}}(q^{er^{\alpha}})$ группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{mer^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Следуя [6], будем рассматривать симметрические группы как группы матриц посредством естественного подстановочного представления. Определим сплетение $X \wr Y$ матричной группы X и подстановочной матричной группы

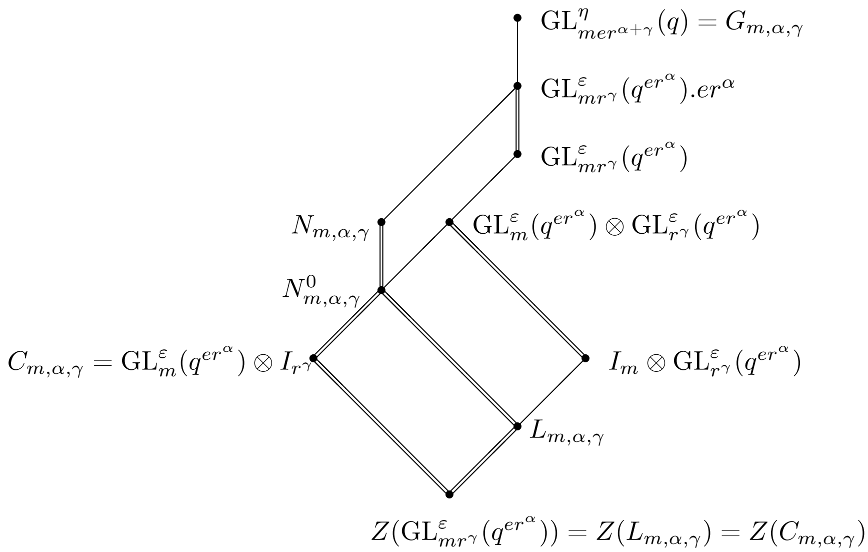

Рис. 2.

Y как группу матриц, полученную заменой всех вхождений 1 и 0 в матрицах y из Y произвольными матрицами из X и нулевыми матрицами из X соответственно (ср. [2, лемма 4.2.1]). Далее, пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, где $c_1, c_2, \dots, c_l$ — натуральные числа. Пусть A_{c_i} — элементарная абелева группа порядка r^{c_i} для любого $i = 1, \dots, l$ и $A_{\bar{c}}$ — подстановочное сплетение $A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \dots \wr A_{c_l}$. Тогда $A_{\bar{c}}$ вкладывается в симметрическую группу S_u, где $u = r^{c_1+c_2+\dots+c_l}$. Положим $R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = R_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\bar{c}}$, $G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \mathrm{GL}^{\eta}_{d}(q)$, где $d = mer^{\alpha+\gamma}u$ и

$$V_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \underbrace{V_{m,\alpha,\gamma} \perp V_{m,\alpha,\gamma} \perp \dots \perp V_{m,\alpha,\gamma}}_{u \text{ раз}}$$

— соответствующий модуль для $G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Согласно [6, § 4; 7, § 2] группа $R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения и называется ее *базисной подгруппой*.

Предложение 2. *Пусть $G = \mathrm{GL}^{\eta}(V) = \mathrm{GL}^{\eta}_n(q)$ и R — радикальная r-подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \dots \perp V_t, \tag{2}$$

$$R = R_0 \times R_1 \times \dots \times R_t \tag{3}$$

такие, что R_0 — тривиальная подгруппа группы $\mathrm{GL}^{\eta}(V_0)$ и R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{GL}^{\eta}(V_i)$ для $i \geq 1$.

Доказательство см. в [6, 4A; 7, 2B]. □

Пусть в прежних обозначениях R — радикальная r-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \dots \perp V_t, \quad R = R_0 \times R_1 \times \dots \times R_t$$

— разложения, о которых идет речь в предложении 2. Пусть $R(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, $V(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, $u(m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — число таких R_i и $G(m, \alpha, \gamma, \bar{c}) = \mathrm{GL}^{\eta}(V(m, \alpha, \gamma, \bar{c}))$.

Предложение 3. *Во введенных обозначениях*

$$N_G(R) = \mathrm{GL}^\eta(V_0) \times \prod_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} N_{G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\bar{c})), \tag{4}$$

$$N_{G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\bar{c})) = N_{G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr S_{u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}. \tag{5}$$

Доказательство см. в [4, лемма 11]. □

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы. Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \leq G$, $O_r(H) \nleq Z(G)$ для некоторого нечетного простого r. Согласно замечанию группа H нормализует некоторую радикальную r-подгруппу R группы G, причем $O_r(H) \leq O_r(N_G(R))$, и можем предполагать, что $H = N_G(R)$.

Если $(q,r) \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некоторой собственной параболической подгруппе по теореме Бореля — Титса [12], т. е. в некотором элементе класса $\mathscr{C}_1$. Далее предполагаем, что $(q,r) = 1$ и в этом случае имеют место разложения (2)–(5). Если в разложении (4) содержится более одного сомножителя, то подгруппа H снова попадает в некоторый элемент из класса $\mathscr{C}_1$. Таким образом, можно считать, что $V_0 = 0$, $G = G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})$ для некоторых $m,\alpha,\gamma,\bar{c}$ и

$$N_G(R) = N_{G(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(m,\alpha,\gamma,\bar{c})) = N_{G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr S_{u(m,\alpha,\gamma,\bar{c})}.$$

Если $u(m,\alpha,\gamma,\bar{c}) > 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Далее, предполагаем, что $u(m,\alpha,\gamma,\bar{c}) = 1$, и поэтому $G = G_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, а $R = R_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением группы $R_1 \times \dots \times R_u$ и группы $A_{\bar{c}}$, где $u = r^{c_1+c_2+\dots+c_l}$ и каждая из групп R_i совпадает с $R_{m,\alpha,\gamma}$. Поскольку $A_{\bar{c}}$ вкладывается в группу S_u, то $N_G(R) \leq N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma}) \wr \mathrm{S}_u$. Следовательно, если $u \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_2$.

Таким образом, можно считать, что $u = 1$, $R = R_{m,\alpha,\gamma}$, $G = G_{m,\alpha,\gamma}$, и воспользоваться предложением 1. Из п. (4) предложения 1 следует, что $N_G(R) = N_{m,\alpha,\gamma}$ вкладывается в группу $\mathrm{GL}^\varepsilon_{mr^\gamma}(q^{er^\alpha}).er^\alpha$ и содержится в некотором элементе класса $\mathscr{C}_3$, если $\alpha > 0$ или $e > 1$.

Далее считаем, что $\alpha = 0$ и $e = 1$. Тогда $\varepsilon = \eta$ и $N_G(R) = N_{m,0,\gamma} = N^0_{m,0,\gamma}$. Как отмечалось ранее, при $m > 1$ справедливо включение

$$N_G(R) = N^0_{m,0,\gamma} \leq \mathrm{GL}^\eta_m(q) \otimes \mathrm{GL}^\eta_{r^\gamma}(q) \in \mathscr{C}_4.$$

Наконец, можем считать, что

$$e = 1, \quad m = 1, \quad \alpha = 0, \quad R = R_{1,0,\gamma} = R_{0,\gamma}, \quad G = \mathrm{GL}^\eta_{r^\gamma}(q), \quad n = r^\gamma.$$

В силу п. (3) предложения 1 имеем $N_G(R) = N_{1,0,\gamma} = N^0_{1,0,\gamma}$. Из пп. (1), (2) предложения 1 следует, что

$$N^0_{1,0,\gamma} = L_{1,0,\gamma} C_{1,0,\gamma},$$

где $R_{1,0,\gamma} \leq L_{1,0,\gamma}$, $C_{1,0,\gamma} \simeq \mathbb{Z}_{q-\eta}$, $Z(L_{1,0,\gamma}) = Z(C_{1,0,\gamma})$, $L_{1,0,\gamma}/Z(L_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} \simeq \mathrm{Sp}_{2\gamma}(q)$. Поскольку Z_α содержится в центре группы $Z_\alpha \circ E_\gamma$, имеем $Z_\alpha \leq C_{1,0,\gamma}$ и

$$Z(L_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = Z(C_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = C_{1,0,\gamma}R_{1,0,\gamma} = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ E_\gamma = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}.$$

Таким образом, $N_G(R) = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$, и $N_G(R)$ совпадает с некоторым элементом класса $\mathscr{C}_6$. $\square$

Доказательство следствия. Ясно, что $\overline{O_r(H)} \leq O_r(\overline{H})$. Обратно, полный прообраз $O_r(\overline{H})$ в H имеет вид $S \times T$, где S — силовская r-подгруппа полного прообраза и T — холлова r'-подгруппа группы Z. Отсюда $\overline{S} = O_r(\overline{H})$. Поскольку S является характеристической подгруппой группы $S \times T \trianglelefteq H$, имеем $S \trianglelefteq H$ и $O_r(\overline{H}) \leq \overline{O_r(H)}$. Таким образом, $O_r(\overline{H}) = \overline{O_r(H)}$ и $O_r(H) \nleq Z(G)$. Утверждение следствия непосредственно вытекает из утверждения теоремы. Уточнить строение группы N в случае, когда $H \leq N \in \mathscr{C}_6(G)$, позволяет [2, предложение 4.6.5]. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. V. 76. P. 469–514.
2. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 129).
3. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
4. *Ревин Д. О.* Свойство D_π конечных групп в случае $2 \notin \pi$ // Тр. ИММ УрО. 2007. Т. 13, № 1. С. 166–182.
5. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в линейных и унитарных группах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 437–448.
6. *Alperin J. L., Fong P.* Weights for symmetric and general linear groups // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 2–22.
7. *An J.* Weights for classical groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 342, N 1. P. 1–42.
8. *An J.* 2-Weights for classical groups // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 439. P. 159–204.
9. *An J.* 2-Weights for general linear groups // J. Algebra. 1992. V. 149. P. 500–527.
10. *An J.* 2-Weights for unitary groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 339, N 1. P. 251–278.
11. *Ревин Д. О.* Суперлокалы в симметрических и знакопеременных группах // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 3. С. 338–365.
12. *Borel A., Tits J.* Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques de groupes réductifs. I // Invent. Math. 1971. V. 12, N 2. P. 95–104.

Статья поступила 25 июня 2013 г.

Гальт Алексей Альбертович, Го Вэньбинь (Wenbin Guo)
Department of Mathematics,
University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
`galt84@gmail.com`, `wbguo@ustc.edu.cn`

Аверкин Евгений Михайлович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`averkinem@mail.ru`

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`revin@math.nsc.ru`