*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2014. Том 55, № 2*

*УДК 517.518.12*

# О СВОЙСТВАХ ПОТЕНЦИАЛА РИССА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ЯДРОМ

**Э. В. Арбузов**

**Аннотация.** В пространствах функций, представимых риссовыми потенциалами, рассматривается интегральный оператор типа потенциала с осциллирующим ядром. Получены оценки его нормы в пространствах Лебега, зависящие от параметра осцилляции в отрицательной степени.

**Ключевые слова:** интегральный оператор типа потенциала, дробная производная по Риссу.

## 1. Основные результаты

В работе для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и вещественного числа $\tau$ рассматривается оператор

$$I^{\alpha}_{\tau,\Omega} u(x) = \int\limits_{\Omega} e^{i\tau a\cdot y} \frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \tag{1}$$

где $a \cdot y = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$, $a \in \mathbb{R}^n$, и изучаются свойства данного оператора в пространствах риссовых потенциалов. В частности, получены оценки его нормы через значения показателя $\tau$.

Необходимость изучения свойств интегральных операторов данного вида возникает при исследовании некоторых обратных и некорректных задач. Например, в случае $n = 2$ решение задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка [1] и решение обратной задачи восстановления потенциала по данным Коши для уравнения $\Delta u + au = 0$ [2] сводятся к решению уравнений второго рода относительно суперпозиции интегральных операторов Коши вида

$$P_\tau u(x) = \int\limits_{\Omega} e^{i\tau\varphi(y)} \frac{u(y)}{x-y}\, dy, \tag{2}$$

где комплекснозначные функции $\varphi(y)$, $y = y_1 + iy_2 \in \mathbb{C}$, подбираются специальным образом исходя из условий соответствующей задачи. В этом случае интегрирование ведется по комплексной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ ($\sim \mathbb{R}^2$), $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, и функция $u(x)$ является комплекснозначной.

Для оператора $P_\tau$, рассматриваемого на функциях из пространств Гёльдера и Лебега, в [1, 2] получены оценки его нормы в соответствующих пространствах, зависящие от степени величины $1/\tau$. На основании установленных свойств в [1]

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00147).

доказана формула типа Карлемана для решения задачи Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости, а в [2] решена обратная задача определения потенциала: доказана теорема единственности и получена формула для восстановления функции $a(x)$.

В данной работе показывается, что для функций $u(y)$ из пространств риссовых потенциалов, определяемых с помощью дробного интегродифференцирования по Риссу, норма данного оператора оценивается через параметр $\tau$ в некоторой отрицательной степени.

Для параметра $0 < \alpha \leq 1$ рассматривается риссова производная $D^\alpha u(x)$, которая определена в работах С. Г. Самко [3, 4]:

$$D^\alpha u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{d_{n,1}(\alpha)} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{u(y) - u(x-y)}{|y|^{n+\alpha}}\, dy, \tag{3}$$

где $d_{n,1}(\alpha)$ — нормировочная постоянная, не равная нулю (ее точное значение приведено в указанных работах), и определяются пространство риссовых потенциалов $I^\alpha(L_p)$:

$$I^\alpha(L_p) = \left\{ u(x) : u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{v(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,\ v(y) \in L_p(\mathbb{R}^n) \right\},$$

пространство функций $L^\alpha_{pq}(\mathbb{R}^n)$:

$$L^\alpha_{pq}(\mathbb{R}^n) = \{u(x) \in L_q(\mathbb{R}^n),\ D^\alpha u(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{L^\alpha_{pq}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} + \|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

а также пространство риссовых потенциалов, заданных на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$I^\alpha_\Omega(L_p) = \left\{ u(x) : u(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{v(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,\ v(y) \in L_p(\Omega) \right\}.$$

Для чисел $0 < \beta < \alpha \leq 1$ определяется функция

$$\begin{aligned} K_{\alpha,\beta;\tau}(x,y) &= \frac{1}{|a|^\beta \gamma_n(\beta)} \frac{e^{i\tau a\cdot y}}{|x-y|^{n-\alpha}} + \frac{1}{d_{n,1}(\beta)\gamma_n^2(\beta)|a|^\beta} \\ &\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y-z|^{n-\beta}} \frac{1}{|x-z|^{n-\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tau a\cdot s}}{|x-s|^{n-\alpha}} \frac{|x-z|^{n-\alpha} - |x-s|^{n-\alpha}}{|z-s|^{n+\beta}}\, ds dz, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\gamma_n(\beta) = 2^\beta \pi^{n/2} \Gamma\big(\frac{\beta}{2}\big)/\Gamma\big(\frac{n-\beta}{2}\big)$.

Основные результаты работы приведены в следующих теоремах.

**Теорема 1.** *Пусть $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $1 < p < n/\alpha$ и $u(x) \in L^\beta_{pp_\beta}(\mathbb{R}^n)$, где $p_\beta = \frac{np}{n-\beta p}$. Тогда в пространстве $L_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство*

$$I^\alpha_{\tau,\Omega} u(x) = \frac{1}{\tau^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{\alpha,\beta;\tau}(x,y) D^\beta u(y)\, dy$$

*и выполняется оценка*

$$\left\| I^\alpha_{\tau,\Omega} u \right\|_{L_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_\alpha}{\tau^\beta} \|u\|_{L^\beta_{pp_\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Следствие 1.1.** *При выполнении условий теоремы для оператора* $S^{\alpha}_{\tau,\Omega}u(x) = I^{\alpha}_{\tau,\Omega}I^{\alpha}_{\tau,\Omega}u(x)$ *выполняется оценка*

$$\left\|S^{\alpha}_{\tau,\Omega}u\right\|_{L^{\beta}_{pp_\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_\alpha}{\tau^{\beta}}\|u\|_{L^{\beta}_{pp_\beta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Если функция $u(x)$ задана потенциалом Рисса по ограниченной области, то справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть* $p \leq q \leq p_\alpha$, $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$, *и* $u \in I^{\alpha}_{\Omega}(L_p)$. *Тогда в пространстве* $L_q(\Omega)$ *справедливо равенство*

$$I^{\alpha}_{\tau,\Omega}u = \frac{1}{\tau^{\alpha}}K^{\alpha}_{\tau}D^{\alpha}u,$$

*где*

$$K^{\alpha}_{\tau}v = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}v(y)\,dy$$

*— предельный оператор, действующий из* $L_p(\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$. *При этом выполняется оценка*

$$\left\|I^{\alpha}_{\tau,\Omega}u\right\|_{L_q(\Omega)} \leq \frac{c'_\alpha}{\tau^{\alpha}}\|u\|_{L^{\alpha}_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Следствие 2.1.** *Пусть* $u \in I^{\alpha}_{\Omega}(L_p)$. *Тогда* $S^{\alpha}_{\tau,\Omega}u(x) \in I^{\alpha}_{\Omega}(L_p)$ *и справедливо равенство*

$$S^{\alpha}_{\tau,\Omega}u(x) = \frac{1}{\tau^{\alpha}}I^{\alpha}_{\tau,\Omega}K^{\alpha}_{\tau}D^{\alpha}u.$$

*При этом в пространстве* $L^{\alpha}_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *выполняется оценка*

$$\left\|S^{\alpha}_{\tau,\Omega}u\right\|_{L^{\alpha}_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c'_\alpha}{\tau^{\alpha}}\|u\|_{L^{\alpha}_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)}.$$

При доказательстве этих утверждений будут применяться свойства интегродифференцирования по Риссу, которые приводятся в следующем разделе.

## 2. Свойства риссовых интегралов и производных

Действие потенциалов Рисса

$$I^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy, \quad \gamma_n(\alpha) = \frac{\pi^{n/2}2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)},$$

в пространствах Лебега описывают следующие утверждения, доказательство которых приведено, например, в [5, 6].

**Теорема 2.1.** *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$. *Тогда оператор* $I^{\alpha}$ *ограничен из* $L_p(\mathbb{R}^n)$ *в* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < n/\alpha, \quad 1/q = 1/p - \alpha/n.$$

Показатель $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$ называется *предельным показателем Соболева.*

**Теорема 2.2.** *Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ оператор*

$$I^\alpha_\Omega u = \int\limits_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

*непрерывно отображает пространство $L_p(\Omega)$ в пространство $L_q(\Omega)$ при*

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < n/\alpha, \quad p \le q \le p_\alpha$$

*и при $p \le q < p_\alpha$ справедлива оценка*

$$\left\| I^\alpha_\Omega \right\|_{L_q(\Omega)} \le c_{\alpha,p,\Omega} \|u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{5}$$

*где*

$$c_{\alpha,p,\Omega} = \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta}, \quad \mu = \alpha/n,\ \delta = 1/p - 1/q,$$

*$\omega_n$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ — объем области.*

Свойства дробной производной $D^\alpha u$, определенной по формуле (3), и связанные с этим вопросы интегродифференцирования по Риссу рассмотрены в работах С. Г. Самко [3, 4]. Далее приводятся некоторые утверждения из этих работ, которые будут использованы при доказательстве основных результатов.

Гиперсингулярный интеграл, определяющий дробную производную $D^\alpha u$, сходится абсолютно на функциях $u$, имеющих ограниченные производные.

При $0 < \alpha < n$ для быстро убывающих функций $u \in S$ справедливы формулы для преобразования Фурье:

$$F[I^\alpha u](x) = |x|^{-\alpha} F[u](x), \tag{6}$$

$$F[D^\alpha u](x) = |x|^{\alpha} F[u](x), \tag{7}$$

из которых следует, что при указанных условиях

$$u = I^\alpha D^\alpha u = D^\alpha I^\alpha u. \tag{8}$$

В следующем утверждении показано, что равенство $D^\alpha I^\alpha u = u$ выполняется на всей области определения риссова потенциала в рамках $L_p$-пространств. В данном случае гиперсингулярный интеграл применяется к функции $I^\alpha u$, где $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$, и уже может не являться абсолютно сходящимся, поэтому он будет пониматься как условно сходящийся по норме пространства $L_p$.

**Теорема 2.3.** *Пусть $f = I^\alpha u$, $0 < \alpha < n$, $1 \le p \le n/\alpha$, $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Оператор $D^\alpha f = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} D^\alpha_\varepsilon f$ является левым обратным к риссову потенциалу в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$:*

$$D^\alpha f = D^\alpha I^\alpha u = u.$$

Следующая теорема дает описание пространств риссовых потенциалов $I^\alpha(L_p)$ в терминах гиперсингулярных интегралов.

**Теорема 2.4.** *Пусть функция $f(x)$ локально суммируема и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) \in L_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad D^\alpha f \in L_p(\mathbb{R}^n).$$

*Для $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $L_{p_\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство*

$$D^{\alpha-\varepsilon} I^\alpha u = I^\varepsilon u.$$

Пространство $L^\alpha_{pr}(\mathbb{R}^n)$ полное, и финитные функции образуют в нем плотное множество.

**Теорема 2.5.** *Пространство* $C_0^\infty$ *плотно в* $L^\alpha_{pr}(\mathbb{R}^n)$ *при* $1 < p < n/\alpha$, $p \leq r \leq p_\alpha$, $p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}$.

Для данных пространств справедлива теорема вложения по параметру $r$.

**Теорема 2.6.** $L^\alpha_{pr_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\alpha_{pr_2}(\mathbb{R}^n)$, *если* $1 < p < n/\alpha$ *и* $p \leq r_1 \leq r_2 \leq p_\alpha$.

Используя указанные свойства, можно получить следующую формулу для преобразования Фурье от функций, представимых риссовыми потенциалами.

**Утверждение 2.7.** *Пусть* $1 < p \leq 2$, $1/p+1/q = 1$, $0 < \alpha < 1$ *и* $u \in L^\alpha_{pp}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда в пространстве* $L_q(\mathbb{R}^n)$ *выполняется равенство*

$$F[u](\tau y) = \frac{1}{|\tau y|^\alpha} F[D^\alpha u](\tau y).$$

Доказательство. Формула (7) показывает, что данное равенство верно для функций $u \in S$. По теореме 2.6 функция $u$ принадлежит $L^\alpha_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)$, следовательно, для нее справедливо представление $u = I^\alpha D^\alpha u$.

Учитывая плотность $S$ в пространстве $L^\alpha_{pp}(\mathbb{R}^n)$ и применяя теорему Хаусдорфа — Юнга, получаем требуемый результат.

Также при доказательстве основных результатов будут использоваться следующие утверждения.

При $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < n$ выполняется равенство [3, 4]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \frac{1}{|y-z|^{n-\beta}}\, dy = \frac{\gamma_n(\alpha)\gamma_n(\beta)}{\gamma_n(\alpha+\beta)} \frac{1}{|x-z|^{n-(\alpha+\beta)}}. \tag{9}$$

При $0 < \alpha < (n+1)/2$ потенциал Рисса от функции $e^{ia\cdot y}$ условно сходящийся и вычисляется по следующей формуле [4, 7]:

$$I^\alpha(e^{ia\cdot y}) = \frac{1}{|a|^\alpha} e^{ia\cdot x}. \tag{10}$$

## 3. Вспомогательные утверждения

Для функции $\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}$ при $0 < \beta < \alpha < 1$ в силу определения дробной производной (3) справедливо выражение

$$\begin{aligned} D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y) &= \frac{D^\beta u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \\ &+ \frac{1}{d_{n,1}(\beta)} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|z|>\varepsilon} \frac{u(y-z)}{|z|^{n+\beta}} \frac{|x-y+z|^{n-\alpha} - |x-y|^{n-\alpha}}{|x-y+z|^{n-\alpha}}\, dz. \end{aligned} \tag{11}$$

При $u \in C^1$ гиперсингулярный интеграл $D^\beta[u]$ абсолютно сходится, поэтому дробная производная от функции $u \in C^1$ существует и ограничена.

При выполнении условия $\alpha+\beta < n$ с учетом формулы (9) модуль второго слагаемого в формуле (11) можно оценить следующей величиной:

$$\frac{c_u}{|x-y|^{n-\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{|z|^{\alpha+\beta}|x-y+z|^{n-\alpha}} < \frac{c_{\alpha,\beta,u}}{|x-y|^{n-\alpha+\beta}}.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и делая замену $y - z = t$, получим

$$D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y) = \frac{D^\beta u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} + \frac{1}{d_{n,1}(\beta)|x-y|^{n-\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{u(t)}{|x-t|^{n-\alpha}}\frac{|x-t|^{n-\alpha}-|x-y|^{n-\alpha}}{|y-t|^{n+\beta}}\,dt.$$

При этом модуль второго слагаемого оценивается величиной

$$\frac{c_{\alpha,\beta}}{|x-y|^{n-\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(t)|}{|x-t|^{n-\alpha}}\frac{dt}{|y-t|^{\alpha+\beta}},$$

т. е. дробным интегралом порядка $n-\alpha-\beta$ от функции $\frac{|u(t)|}{|x-t|^{n-\alpha}}$.

Таким образом, при $\alpha+\beta<n$

$$\left|D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y)\right| \le \frac{|D^\beta u(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} + \frac{c_{n,\alpha,\beta}}{|x-y|^{n-\alpha}}I^{n-\alpha-\beta}\left[\frac{|u(t)|}{|x-t|^{n-\alpha}}\right](y), \qquad (12)$$

и при $u \in C^1$ и $|y|<R$ выполняется оценка

$$\left|D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y)\right| \le \frac{c_{\alpha,\beta,u,R}}{|x-y|^{n-\alpha+\beta}}. \qquad (13)$$

**Лемма 3.1.** *Пусть $u \in S$, $0<\beta<\alpha<1$. Тогда существует $p_0 \in \left(1, \frac{n}{n-\alpha+\beta}\right)$ такое, что функция $\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}$ принадлежит $L^\beta_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n)$, где $q_0 = np_0/(n-\beta p_0)$, и справедливо равенство*

$$\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} = I^\beta D^\beta\left(\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right)(y).$$

Доказательство. В силу теоремы 2.4 требуется показать существование чисел $p_0$, $q_0$ таких, что выполняются условия

$$\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \in L_{q_0}(\mathbb{R}^n), \quad D^\beta\left(\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right) \in L_{p_0}(\mathbb{R}^n),$$

и $q_0 = \frac{np_0}{n-\beta p_0}$.

Поскольку $u \in S$, функция $\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}$ принадлежит $L_{\tilde p}(\mathbb{R}^n)$ для $1 \le \tilde p < \frac{n}{n-\alpha}$. Следовательно, по теореме 2.1

$$I^{n-\alpha-\beta}\left[\frac{|u(t)|}{|x-t|^{n-\alpha}}\right](y) \in L_{\tilde q}(\mathbb{R}^n), \quad \frac{n}{\alpha+\beta} \le \tilde q < \frac{n}{\beta}.$$

Поэтому, так как $D^\beta u \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$ при $2 \le p' < \infty$ (в силу равенства $D^\beta u = F^{-1}[|x|^\beta \hat u]$ и теоремы Хаусдорфа — Юнга), из формулы (12) следует, что

$$D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y) = \frac{v(y)}{|x-y|^{n-\alpha}},$$

где $v(y) \in L_{\tilde q}(\mathbb{R}^n)$ для $2 \le \tilde q < \frac{n}{\beta}$.

Далее, в силу оценки (13)

$$D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y) \in L_{p_0}(B_R), \quad 1 \le p_0 < \frac{n}{n-\alpha+\beta},$$

где $B_R$ — шар радиуса $R$.

Выбирая для $1 \le p_0 < \frac{n}{n-\alpha+\beta}$ число $r$ так, что

$$\frac{2}{p_0} < r < \frac{n}{n-(n-\alpha)p_0},$$

и применяя неравенство Гёльдера, получим, что $\frac{v(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \in L_{p_0}(\mathbb{R}^n \setminus B_R)$.

Таким образом, дробная производная $D^\beta\big[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\big](y)$ принадлежит $L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$ для $1 \le p_0 < \frac{n}{n-\alpha+\beta}$. При этом

$$q_0 = \frac{np_0}{n-\beta p_0} \in \left(\frac{n}{n-\beta}, \frac{n}{n-\alpha}\right),$$

а при данных значениях $q_0$ функция $\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}$ принадлежит $L_{q_0}(\mathbb{R}^n)$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $u \in S$, $0 < \beta < \alpha < 1$. Тогда*

$$I_\tau^\alpha u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau a\cdot y}\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy = \frac{1}{\tau^\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{\alpha,\beta;\tau}(x,y)D^\beta u(y)\,dy = \frac{1}{\tau^\beta}K_\tau^{\alpha,\beta}u(x), \tag{14}$$

*где функция $K_{\alpha,\beta;\tau}(x,y)$ определяется по формуле* (4) *и для нее справедлива оценка*

$$|K_{\alpha,\beta;\tau}(x,y)| \le \frac{c_{\alpha,\beta}}{|x-y|^{n-\alpha}}.$$

Доказательство. Указанная в теореме оценка следует из формулы (9) и условия $\alpha+\beta<n$.

В силу того, что дробная производная от гладкой функции $D^\beta u(z)$ ограничена и принадлежит $L_p(\mathbb{R}^n)$ для всех $p \in [2,\infty)$, функция $K_{\alpha,\beta;\tau}(x,y)D^\beta u(y)$ абсолютно интегрируемая.

Интегральный оператор $\frac{1}{\tau^\beta}K_\tau^{\alpha,\beta}u(x)$ с учетом формулы (4) представим в виде

$$\frac{1}{\tau^\beta}K_\tau^{\alpha,\beta}u(x) = \frac{1}{\tau^\beta\gamma_n(\beta)|a|^\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\tau a\cdot y}}{|x-y|^{n-\alpha}}D^\beta u(y)\,dy$$
$$+ \frac{1}{\tau^\beta\gamma_n^2(\beta)d_{n,1}(\beta)|a|^\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\beta u(y)$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|y-z|^{n-\beta}|x-z|^{n-\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\tau a\cdot s}}{|x-s|^{n-\alpha}}\frac{|x-z|^{n-\alpha}-|x-s|^{n-\alpha}}{|z-s|^{n+\beta}}\,dsdzdy.$$

После смены порядка интегрирования второе слагаемое записывается по следующей формуле:

$$\frac{1}{\tau^\beta\gamma_n^2(\beta)d_{n,1}(\beta)|a|^\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\tau a\cdot s}}{|x-s|^{n-\alpha}}$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-z|^{n-\alpha}-|x-s|^{n-\alpha}}{|z-s|^{n+\beta}|x-z|^{n-\alpha}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{D^\beta u(y)}{|y-z|^{n-\beta}}\,dydzds,$$

или с учетом определения потенциала Рисса — по формуле

$$\frac{1}{\tau^\beta \gamma_n(\beta) d_{n,1}(\beta)|a|^\beta} \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tau a\cdot s}}{|x-s|^{n-\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-z|^{n-\alpha}-|x-s|^{n-\alpha}}{|z-s|^{n+\beta}|x-z|^{n-\alpha}} I^\beta D^\beta u(z)\,dzds,$$

а принимая во внимание равенство $I^\beta D^\beta u = u$, данное выражение можно представить в виде

$$\frac{1}{\tau^\beta \gamma_n(\beta) d_{n,1}(\beta)|a|^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tau a\cdot s}}{|x-s|^{n-\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-z|^{n-\alpha}-|x-s|^{n-\alpha}}{|z-s|^{n+\beta}|x-z|^{n-\alpha}} u(z)\,dzds.$$

Таким образом (после переобозначения $s = y$),

$$\frac{1}{\tau^\beta} K_\tau^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\tau^\beta \gamma_n(\beta)|a|^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tau a\cdot y}}{|x-y|^{n-\alpha}} D^\beta u(y)\,dy$$
$$+ \frac{1}{\tau^\beta \gamma_n(\beta) d_{n,1}(\beta)|a|^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i\tau a\cdot y}}{|x-y|^{n-\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x-z|^{n-\alpha}-|x-y|^{n-\alpha}}{|z-y|^{n+\beta}|x-z|^{n-\alpha}} u(z)\,dzdy,$$

откуда по формуле (11) для $D^\beta\big[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\big](y)$ следует, что

$$\frac{1}{\tau^\beta} K_\tau^{\alpha,\beta} u(x) = \frac{1}{\tau^\beta \gamma_n(\beta)|a|^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau a\cdot y} D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y)\,dy.$$

Применив формулу (10), данное равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{\tau^\beta} K_\tau^{\alpha,\beta} u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](y) I^\beta[e^{i\tau a\cdot s}](y)\,dy,$$

и после смены порядка интегрирования по лемме 3.1 получается требуемый результат:

$$\frac{1}{\tau^\beta} K_\tau^{\alpha,\beta} u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau a\cdot s} I^\beta D^\beta\left[\frac{u(z)}{|x-z|^{n-\alpha}}\right](s)\,ds = I_\tau^\alpha u(x).$$

## 4. Доказательство основных результатов

Так как $u \in L^\beta_{pp_\beta}(\mathbb{R}^n)$, существует последовательность $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $u_n \to u$ в $L^\beta_{pp_\beta}$, т. е. при $n \to \infty$

$$\|u - u_n\|_{L_{p_\beta}(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \|D^\beta u - D^\beta u_n\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

В этом случае утверждение теоремы 1 следует из плотности $C_0^\infty$ в пространстве $L^\beta_{pp_\beta}(\mathbb{R}^n)$, теоремы 3.2 и ограниченности области $\Omega$.

Утверждение следствия 1.2 вытекает из доказанной оценки и теоремы 2.2 в силу ограниченности области $\Omega$.

Для доказательства теоремы 2 выберем $\varepsilon \in [0, 1)$ и рассмотрим интегральный оператор

$$I^{\alpha+\varepsilon}_{\tau,\Omega} u(x) = \int\limits_\Omega e^{i\tau a\cdot y} \frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\,dy.$$

Так как $u \in L^{\alpha}_{pp_\alpha}(\mathbb{R}^n)$, по теореме 1 в пространстве $L_{p_{\alpha+\varepsilon}}(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$I^{\alpha+\varepsilon}_{\tau,\Omega}u(x) = \frac{1}{\tau^\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy = \frac{1}{\tau^\alpha}\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy,$$
$$|K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)| \le \frac{c_\alpha}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}. \tag{15}$$

Следовательно, по теореме 2.2 $I^{\alpha+\varepsilon}_{\tau,\Omega}u(x) \in L_q(\Omega)$ при $p \le q < p_{\alpha+\varepsilon}$ и выполняется оценка

$$\Big\|\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy\Big\|_{L_q(\Omega)} \le c_{\alpha+\varepsilon,p}\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $c_{\alpha+\varepsilon,p} = \big(\frac{1-\delta}{\mu_\varepsilon-\delta}\big)^{1-\delta}\omega_n^{1-\mu_\varepsilon}|\Omega|^{\mu_\varepsilon-\delta}$, $\delta = 1/p - 1/q$, и $\mu_\varepsilon = \frac{\alpha+\varepsilon}{n}$.

Для $0 \le \varepsilon < 1$

$$c_{\alpha+\varepsilon,p} < \left(\frac{1-\delta}{\frac{\alpha}{n}-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_n^{1-\frac{\alpha}{n}}|\Omega|^{\frac{1+\alpha}{n}-\delta} = \tilde{c}_{\alpha,p}. \tag{16}$$

Таким образом, для всех $\varepsilon \in [0,1)$ интегральный оператор

$$\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)v(y)\,dy$$

определен на функциях из пространства $L_p(\Omega)$ и действует в $L_q(\Omega)$ для $p \le q < p_\alpha$, при этом справедлива оценка

$$\Big\|\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)v(y)\,dy\Big\|_{L_q(\Omega)} \le \tilde{c}_{\alpha,p}\|v\|_{L_p(\Omega)},$$

где константа $\tilde{c}_{\alpha,p}$ не зависит от $\varepsilon$.

Из равенства в $L_q(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy = \tau^\alpha\int\limits_{\Omega} e^{i\tau a\cdot y}\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha-\varepsilon}}\,dy$$

и оценки

$$\Big\|\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon_1,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy - \int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon_2,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy\Big\|_{L_q(\Omega)}$$
$$\le \tau^\alpha\big\|I^{\alpha+\varepsilon_1}_{\tau,\Omega}[u(y)(1-|x-y|^{\varepsilon_2-\varepsilon_1})]\big\|_{L_q(\Omega)}$$

следует существование предела $K^\tau_\alpha D^\alpha u(x) \in L_q(\Omega)$:

$$K^\alpha_\tau D^\alpha u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega} K_{\alpha+\varepsilon,\alpha;\tau}(x,y)D^\alpha u(y)\,dy.$$

Таким образом, при $p \le q < p_\alpha$ данной формулой определяется оператор $K^\alpha_\tau : L^\alpha_{pp_\alpha}(\Omega) \to L_q(\Omega)$ и справедлива оценка $\big\|K^\alpha_\tau u\big\|_{L_q(\Omega)} \le \tilde{c}_{\alpha,p}\|u\|_{L^\alpha_{pp_\alpha}(\Omega)}$.

Так как $I^{\alpha+\varepsilon}_{\tau,\Omega}u \to I^\alpha_{\tau,\Omega}u$ в $L_q(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, утверждение теоремы 2 вытекает из равенства (15).

При $q = p$ функция $K_\tau^\alpha D^\alpha u$ принадлежит $L_p(\Omega)$ и

$$S_{\tau,\Omega}^\alpha u = I_{\tau,\Omega}^\alpha I_{\tau,\Omega}^\alpha u = \frac{1}{\tau^\alpha} I_{\tau,\Omega}^\alpha K_\tau^\alpha D^\alpha u,$$

при этом $S_{\tau,\Omega}^\alpha u \in L_{p_\alpha}(\mathbb{R}^n)$, а

$$D^\alpha S_{\tau,\Omega}^\alpha u = \frac{1}{\tau^\alpha} h_\Omega e^{i\tau a\cdot y} K_\tau^\alpha D^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n),$$

где $h_\Omega$ — характеристическая функция области $\Omega$.

Таким образом, $S_{\tau,\Omega}^\alpha u \in L_{pp_\alpha}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ и также $S_{\tau,\Omega}^\alpha u \in I_\Omega^\alpha(L_p)$, что доказывает следствие 1.2. При этом из формулы (16) для $q = p$ получаем, что в оценке для нормы оператора $S_{\tau,\Omega}^\alpha$ константа равна

$$\tilde{c}_{\alpha,p} = \frac{n}{\alpha} \omega_n^{1-\frac{\alpha}{n}} |\Omega|^{\frac{1+\alpha}{n}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Арбузов Э. В., Бухгейм А. Л.* Формула Карлемана для уравнения Гельмгольца на плоскости // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 518–526.

**2.** *Bukhgeim A. L.* Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. V. 16, N 1. P. 19–33.

**3.** *Самко С. Г.* О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40, № 5. С. 1143–1172.

**4.** *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев Д. Л.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

**5.** *Stein E.* Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

**6.** *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

**7.** *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.


*Статья поступила 26 сентября 2013 г.*

Арбузов Эдуард Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
arbuzov@math.nsc.ru