Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 512.554.38

ЦЕНТРАЛИЗАТОР ПРОСТОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ В УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ СЕМИМЕРНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ МАЛЬЦЕВА

Т. И. Шабалин

Аннотация. Изучаются централизаторы простых трехмерных подалгебр Ли семимерной простой алгебры Мальцева в универсальной обертывающей этой алгебры. Найдены наборы порождающих элементов для такого централизатора в характеристике, отличной от 2, 3, и для подалгебры, порожденной централизатором в центральном замыкании универсальной обертывающей в характеристике 3. Показано, как в качестве следствия основной теоремы можно получить известное описание центра универсальной обертывающей семимерной простой алгебры Мальцева.

Ключевые слова: алгебра Ли, алгебра Мальцева, альтернативная алгебра, универсальные обертывающие, алгебра октонионов, скобка Пуассона.

Алгебры Мальцева введены А. И. Мальцевым в [1] как касательные алгебры локальных аналитических луп Муфанг. Алгебры Мальцева являются обобщением алгебр Ли. Для алгебр Мальцева в [2] введено понятие универсальной обертывающей алгебры. Эта алгебра, вообще говоря, неассоциативна, но в случае, когда алгебра Мальцева лиева, она совпадает с универсальной обертывающей алгебры Ли в обычном смысле.

Важными примерами алгебр Мальцева являются пространства элементов с нулевым следом в алгебрах Кэли — Диксона. Они образуют семейство алгебр, зависящих от трех ненулевых параметров из основного поля. Такие алгебры являются простыми и имеют размерность 7. Над полем характеристики 3 эти алгебры лиевы, над полями характеристик, не равных 2, 3, — нет. Е. Н. Кузьмин в [3] показал, что над полем характеристики, не равной 2, 3, всякая конечномерная центральная простая алгебра Мальцева изоморфна одной из этих алгебр.

В случае, когда основное поле алгебраически замкнуто, все такие алгебры M изоморфны. При этом в алгебре M есть трехмерная лиева подалгебра L, изоморфная $\mathfrak{sl}_2$. Известно строение центров универсальных обертывающих $U(L)$ и $U(M)$. Над полем нулевой характеристики оба центра являются кольцами многочленов от одной переменной и порождаются элементами Казимира c_L и c_M (см. [4]). В случае поля простой характеристики первый центр описан А. Н. Рудаковым и И. Р. Шафаревичем в [5], второй — Х. М. Перез-Искердо и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11–01–00938–а, 12–01–31194–мол–а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ 14.740.11.0346).

© 2013 Шабалин Т. И.

И. П. Шестаковым в [6]. Эти центры получаются как расширения колец многочленов от трех и семи переменных элементами c_L и c_M соответственно.

В данной работе изучаются централизаторы простых трехмерных подалгебр L в M в универсальной обертывающей $U(M)$. В характеристике, не равной 2, 3, такой централизатор порождается центрами алгебр $U(L)$ и $U(M)$. Более точно, в характеристике нуль централизатор порождается элементами c_L и c_M, а в простой характеристике является расширением кольца многочленов от переменных $\xi_1, \dots, \xi_7$ элементами c_L и c_M. Однако в характеристике 3 это неверно. Найдены элементы централизатора подалгебры L, которые не являются многочленами от $\xi_1, \dots, \xi_7$, c_L, c_M. Полного описания централизатора не получено, но описана подалгебра, порожденная централизатором в центральном замыкании $U(M)$. В характеристике нуль результат ранее получен К. А. Шемонаевым (анонс см. в [7]).

Как следствие получаем результаты В. Н. Желябина и И. П. Шестакова [4], а также Х. М. Перез-Искердо и И. П. Шестакова [6] о строении центра универсальной обертывающей простой нелиевой алгебры Мальцева.

§ 1. Алгебры Мальцева и их универсальные обертывающие

Пусть F — поле, характеристика которого отлична от 2, 3. Алгебра M с билинейной антикоммутативной операцией $[\,,]$ называется *алгеброй Мальцева* [4], если в ней выполняется тождество

$$[J(x,y,z),x] = J(x,y,[x,z]),$$

где $J(x,y,z) = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y]$ — якобиан от x, y, z.

Обобщенный альтернативный центр $N_{\mathrm{alt}}(A)$ произвольной алгебры A определяется равенством

$$N_{\mathrm{alt}}(A) = \{a \in A \mid \forall x, y \in A\ (a,x,y) = -(x,a,y) = (x,y,a)\},$$

где $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c. Множество $N_{\mathrm{alt}}(A)$ замкнуто относительно операции коммутирования и образует алгебру Мальцева, которая обозначается через $N_{\mathrm{alt}}(A)^{(-)}$ (см. [8]). В [2] введены универсальные обертывающие алгебр Мальцева. Во многом свойства этих универсальных обертывающих близки к свойствам универсальных обертывающих алгебр Ли. Так, например, в [4] установлено, что центр универсальной обертывающей полупростой конечномерной алгебры Мальцева над полем характеристики нуль является кольцом многочленов от конечного числа переменных.

Как показано в [2], для всякой алгебры Мальцева над полем F существуют алгебра $U(M)$ и универсальный гомоморфизм $i\colon M \to N_{\mathrm{alt}}(U(M))^{(-)}$. Если $\{b_i \mid i \in I\}$ — упорядоченный базис M, то $U(M)$ имеет базис

$$\{b_{i_1}(\dots(b_{i_{n-1}}b_{i_n})\dots) \mid i_1 \le \dots \le i_n,\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

На $U(M)$ вводится фильтрация: $U_{-1} = 0, U_0 = F$, U_n при $n > 0$ — пространство, порожденное $\{a_{i_1}(\dots(a_{i_{k-1}}a_{i_k})\dots) \mid a_i \in M,\ k \le n\}$, при этом

$$U(M) = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n, \quad U_iU_j \subseteq U_{i+j}, \quad [U_i, U_j] \subseteq U_{i+j-1}, \quad (U_i, U_j, U_k) \subseteq U_{i+j+k-2}.$$

Ассоциированная градуированная алгебра $G(M) = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} G^n$, $G^n = U_n/U_{n-1}$ оказывается ассоциативной коммутативной алгеброй, изоморфной $S(M)$ — симметрической алгебре пространства алгебры M. *Обобщенной скобкой Пуассона* на ассоциативной коммутативной алгебре называется билинейная антикоммутативная операция $\{\,,\}$, удовлетворяющая тождеству Лейбница

$$\{xy, z\} = \{x, z\}y + x\{y, z\}.$$

На алгебре $G(M)$ есть обобщенная скобка Пуассона, на однородных элементах она задается равенством

$$\{x + U_{i-1}, y + U_{j-1}\} = [x, y] + U_{i+j-2}.$$

Для произвольной алгебры A ассоциативный центр $N(A)$, коммутативный центр $K(A)$ и центр $Z(A)$ определяются следующим образом:

$$N(A) = \{n \in A \mid \forall a, b \in A \ (n, a, b) = (a, n, b) = (a, b, n) = 0\},$$

$$K(A) = \{k \in A \mid \forall a \in A \ [k, a] = 0\}, \quad Z(A) = N(A) \cap K(A).$$

При этом для алгебры $U(M)$ структура центров описывается следующей леммой (см. [4]).

Лемма 1. *Пусть M — алгебра Мальцева над полем F, а U — ее универсальная обертывающая. Тогда*

$$Z(U) = K(U) = \{n \in U \mid \forall x \in M \ [n, x] = 0\}.$$

§ 2. Алгебры Кэли — Диксона и простые алгебры Мальцева

Пусть характеристика поля F не равна 2. Обозначим через $O = O(\alpha, \beta, \gamma)$ алгебру Кэли — Диксона над полем F, $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$. На алгебре O есть линейная форма t, называемая *следом*, и квадратичная форма n, называемая *нормой* (см. [9]).

Пусть $M = M(\alpha, \beta, \gamma) = \{a \in O \mid t(a) = 0\}$ — пространство элементов с нулевым следом, тогда произведение элементов $a, b \in M$ в алгебре O задается по формуле

$$ab = [a, b] - n(a, b)1, \tag{2}$$

где $[\,,]$ — антикоммутативное умножение на M, а

$$n(a, b) = \frac{1}{2}(n(a + b) - n(a) - n(b)).$$

Форма $n(\,,)$ — невырожденная билинейная форма на M. Она ассоциативна, т. е. $n([a, b], c) = n(a, [b, c])$. В дальнейшем нам понадобится формула (52) из [3], в наших обозначениях она записывается как

$$[[x, y], y] = -n(y, y)x + n(x, y)y. \tag{3}$$

Алгебра M с произведением $[\,,]$ является простой алгеброй Мальцева. Если характеристика поля F не равна 2, 3, то M нелиева. Всякая центральная простая нелиева алгебра Мальцева над полем характеристики, не равной 2, 3, изоморфна алгебре типа M (см. [3]). Позже покажем, что над полем характеристики 3 M — алгебра Ли.

Пусть поле F алгебраически замкнуто, $\operatorname{char} F \neq 2$. Тогда все алгебры $M(\alpha, \beta, \gamma)$ изоморфны алгебре $M(-1, -1, -1)$, которую будем обозначать через $\mathbb{M}$. Алгебра $\mathbb{M}$ имеет базис $e_1, \ldots, e_7$ с таблицей умножения

$$[e_i, e_{i+1}] = e_{i+3}, \quad \text{где } e_{i+7} = e_i, \tag{4}$$

инвариантной относительно циклических перестановок троек индексов (см. [6]). Форма n при этом задается следующим образом: $n(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, $n(e_i, e_i) = 1$, т. е. базис $e_1, \ldots, e_7$ автодуальный.

Подпространство, натянутое на векторы e_1, e_2, e_4, является трехмерной простой алгеброй Ли, которая изоморфна $\mathfrak{sl}_2$. Обозначим эту подалгебру через $\mathbb{L}$. Непосредственно видно, что сужение формы n на $\mathbb{L}$ невырожденно. Нам понадобится

Лемма 2. *Пусть L_1, L_2 — две трехмерные простые подалгебры в алгебре $\mathbb{M}$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики, не равной 2. Тогда алгебра $\mathbb{M}$ имеет автоморфизм φ такой, что $\varphi(L_1) = L_2$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathbb{M}$ имеет автоморфизм φ, переводящий $\mathbb{L}$ в L_1. Пусть $O = F \oplus \mathbb{M}$, где F — одномерный центр алгебры O, а умножение элементов из $\mathbb{M}$ в O восстанавливается по формуле (2). Тогда O — алгебра Кэли — Диксона. Пусть $\mathbb{B} = F \oplus \mathbb{L}$, $B_1 = F \oplus L_1$. Поскольку поле F алгебраически замкнуто, существует изоморфизм $\varphi\colon \mathbb{L} \to L_1$. Формула (3) показывает, что форма n на любой подалгебре в $\mathbb{M}$ полностью определяется умножением в этой подалгебре. Следовательно, автоморфизм φ сохраняет форму n, и она невырожденна на L_1. По формуле (2) умножение в алгебрах $\mathbb{B}$ и B_1 определяется скобкой $[\,,]$ в алгебрах $\mathbb{L}$ и L_1 и билинейной формой n на них, поэтому φ можно продолжить до изоморфизма $\varphi\colon \mathbb{B} \to B_1$. Подалгебры $\mathbb{B}$ и B_1 четырехмерные в O, ограничение формы n на них невырожденно, поэтому алгебра O получается получается из $\mathbb{B}$ и B_1 с помощью процесса Кэли — Диксона (см. доказательство теоремы 1 [9, гл. 2]). В силу алгебраической замкнутости поля F результат этого процесса не зависит от выбора константы, поэтому константы можно считать равными. Тогда $O \cong (\mathbb{B}, \alpha) \cong (B_1, \alpha)$, $\alpha \in F$, изоморфизм φ продолжается до автоморфизма $\varphi\colon O \to O$, переводящего $\mathbb{B}$ в B_1. Его ограничение на $\mathbb{M}$ дает искомый автоморфизм. $\square$

Рассмотрим некоторую трехмерную подалгебру L в M над произвольным полем F. Пусть $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание F. Расширим поле скаляров алгебры M: $\overline{M} = M \otimes_F \overline{F}$, $\overline{M}$ можно отождествить с $\mathbb{M}$. Рассуждения из доказательства леммы 2 показывают, что сужение формы n алгебры $\mathbb{M}$ на $\overline{L} = L \otimes_F \overline{F}$ невырожденно. В алгебрах M и $\mathbb{M}$ выполняется формула (3), поэтому форма n_M, связанная с алгеброй M, является ограничением формы $n_{\mathbb{M}}$, связанной с $\mathbb{M}$. Таким образом, ограничение формы $n = n_M$ на алгебру L невырожденно.

§ 3. Случай характеристики, не равной 2, 3

По аналогии с элементом Казимира для алгебр Ли рассмотрим

$$c_M = a_1 b_1 + \cdots + a_7 b_7 \in U(M),$$

где $\{a_1, \ldots, a_7\}$, $\{b_1, \ldots, b_7\}$ — дуальные базисы M относительно формы n.

Лемма 3. *Элемент Казимира c_M алгебры M лежит в центре $Z(U(M))$ универсальной обертывающей $U(M)$.*

Доказательство. Во всякой алгебре выполняется тождество

$$[x, yz] - [x, y]z - y[x, z] = -(x, y, z) - (y, z, x) + (y, x, z). \tag{5}$$

Пусть c — произвольный элемент M. В силу леммы 1 достаточно доказать, что $[c, c_M] = 0$. Из (5) получаем

$$\left[c, \sum a_i b_i\right] = \sum a_i[c, b_i] + \sum [c, a_i]b_i - \sum(-(c, a_i, b_i) - (a_i, b_i, c) + (a_i, c, b_i)). \tag{6}$$

Следуя стандартным аргументам (см., например, [10, 6.2]), покажем, что сумма первых двух слагаемых в правой части равна нулю. Поскольку $\{a_1, \dots, a_7\}$, $\{b_1, \dots, b_7\}$ — базисы алгебры M, можем записать $[c, a_i] = \sum s_{ij} a_j$, $[c, b_i] = \sum t_{ij} b_j$ для некоторых s_{ij}, t_{ij} из поля F. Тогда

$$n([c, a_i], b_j) = \sum_k s_{ik} n(a_k, b_j) = s_{ij},$$

$$n([c, a_i], b_j) = -n([a_i, c], b_j) = -n(a_i, [c, b_j]) = -\sum_k t_{jk} n(a_i, b_k) = -t_{ji}.$$

Следовательно, $s_{ij} = -t_{ji}$, и

$$\sum a_i[c, b_i] + \sum [c, a_i]b_i = \sum t_{ij} a_i b_j + \sum s_{ij} a_j b_i = 0.$$

Пользуясь тем, что c, a_i, b_i лежат в обобщенном альтернативном центре M, можно сгруппировать слагаемые в последней сумме в правой части (6), тогда получим

$$\left[c, \sum a_i b_i\right] = -3 \sum (c, a_i, b_i). \tag{7}$$

Форма n симметрична, поэтому тензор $a_1 \otimes b_1 + \dots + a_7 \otimes b_7 \in M \otimes M$ тоже симметричен. Значит, в левой части (7) стоит выражение, не меняющееся при перемене мест a_i и b_i, а выражение в правой части (7) при такой замене меняет знак. Следовательно, обе части (7) равны нулю. $\square$

Пусть $\operatorname{char} F = p > 3$. Если a — элемент алгебры M, т. е. $a \in O$ и $t(a) = 0$, то $t(a^p) = 0$ и $\mathrm{ad}_{a^p} = \mathrm{ad}_a^p$, где $\mathrm{ad}_a\colon O \to O$, $b \mapsto [a, b]$. Поэтому M — ограниченная алгебра Мальцева, отображение p-й степени $a \mapsto a^{[p]}$ задается как возведение в p-ю степень в O. Отображение $\xi\colon M \to U(M)$, $\xi(a) = a^p - a^{[p]}$ обладает следующими свойствами:

1) $\xi(a + b) = \xi(a) + \xi(b)$,

2) $\xi(\alpha a) = \alpha^p \xi(a)$.

Заметим, что образ ξ содержится в центре алгебры $U(M)$. Действительно, в силу леммы 1 достаточно доказать, что $\mathrm{ad}_{\xi(a)}|_M = 0$ для $a \in M$. По лемме 3.2 из [6] $\mathrm{ad}_{a^p} = \mathrm{ad}_a^p$, откуда $\mathrm{ad}_{\xi(a)}|_M = \mathrm{ad}_{a^p - a^{[p]}}|_M = \mathrm{ad}_a^p|_M - \mathrm{ad}_a^p|_M = 0$.

В [2, 7] описан центр алгебры $U(M)$. В характеристике нуль он порождается c_M, в характеристике $p > 3$ — c_M и $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$, где $a_1, \dots, a_7$ — произвольный базис M.

Пусть $S \subseteq U(M)$ — произвольное подмножество. Его *централизатором* в $U(M)$ называется множество

$$C_{U(M)}(S) = \{x \in U(M) \mid \forall y \in S\ [x, y] = 0\}.$$

К. А. Шемонаевым получен следующий аналог леммы 1 из [4].

Лемма 4. *Если M — алгебра Мальцева, а L — ее подалгебра, то для любых элементов $x \in C_{U(M)}(L)$, $a, b \in U(L)$*

$$[x, a] = (x, a, b) = (a, x, b) = (a, b, x) = 0.$$

В частности, $C_{U(M)}(L) = C_{U(M)}(U(L))$.

Выше показано, что если L — трехмерная простая лиева подалгебра в M, то ограничение формы n на L невырожденно, поэтому можно рассмотреть

$$c_L = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \text{ — элемент Казимира,}$$

где $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ — дуальные базисы L относительно формы n. Элемент c_L лежит в централизаторе $C_{U(M)}(L)$ алгебры L в $U(M)$.

Основной результат данной работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть F — поле, характеристика которого не равна 2, 3, L — трехмерная простая подалгебра нелиевой простой алгебры Мальцева M над F, $a_1, \dots, a_7$ — произвольный базис M. Тогда централизатор L в универсальной обертывающей $U(M)$ порождается элементами Казимира c_M, c_L алгебр M, L, если $\operatorname{char} F = 0$, и элементами $c_M, c_L, \xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$, если $\operatorname{char} F > 3$.*

Предположим, что теорема доказана для случая подалгебры $\mathbb{L}$ в $\mathbb{M}$ над алгебраически замкнутым полем. Пусть теперь L — некоторая простая трехмерная подалгебра Ли в нелиевой простой алгебре Мальцева M над произвольным полем F, $a_1, \dots, a_7$ — базис M над полем F. Пусть $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание F, $\overline{M} = M \otimes_F \overline{F}$, $\overline{L} = L \otimes_F \overline{F}$. Отождествим $\overline{M}$ с $\mathbb{M}$. По лемме 2 алгебра $\mathbb{M}$ имеет автоморфизм φ, переводящий $\mathbb{L}$ в $\overline{L}$. Его можно продолжить до автоморфизма $\varphi: U(\mathbb{M}) \to U(\mathbb{M})$, при этом

$$\varphi(C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})) = C_{U(\mathbb{M})}(\overline{L}), \quad \varphi(\xi(a)) = \xi(\varphi(a)), \; a \in \mathbb{M},$$

а поскольку φ сохраняет форму n, то $\varphi(c_{\mathbb{L}}) = c_{\overline{L}}$, $\varphi(c_{\mathbb{M}}) = c_{\mathbb{M}}$. Следовательно, $C_{U(\mathbb{M})}(\overline{L})$ порождается $c_{\mathbb{M}}$, $c_{\overline{L}}$, $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$.

Элементы c_M, c_L, $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$ лежат в универсальной обертывающей $U(M)$, определенной над полем F. Их образы в алгебре $U(\overline{M})$, получающейся из $U(M)$ при расширении базового поля до $\overline{F}$, порождают централизатор $C_{U(\overline{M})}(L)$. Следовательно, они порождают централизатор $C_{U(M)}(L)$ и над полем F. Итак, достаточно доказать теорему для подалгебры $\mathbb{L}$ в $\mathbb{M}$ над полем $F = \overline{F}$.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай положительной характеристики. В базисе $e_1, \dots, e_7$ алгебры $\mathbb{M}$ имеем

$$c_{\mathbb{L}} = e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 \quad \text{и} \quad c_{\mathbb{M}} = e_1^2 + \dots + e_7^2.$$

Заметим, что элемент $c_{\mathbb{L}}$ лежит в ассоциативной обертывающей $U(\mathbb{L})$ и потому обладает ассоциативными степенями, а элементы $c_{\mathbb{M}}$, $\xi(e_1), \dots, \xi(e_7)$ — в центре $U(\mathbb{M})$, стало быть, коммутируют и ассоциируют со всеми степенями $c_{\mathbb{L}}$. Значит, любой полином от элементов $\xi(e_1), \dots, \xi(e_7)$, $c_{\mathbb{L}}$, $c_{\mathbb{M}}$ лежит в $C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$ — централизаторе $\mathbb{L}$ в $U(\mathbb{M})$.

Рассмотрим $c \in C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$, $c \neq 0$. Пусть r — степень c в фильтрации алгебры $U(\mathbb{M})$, т. е. $c \in U_r$, но $c \notin U_{r-1}$, и $\overline{c} = c + U_{r-1}$ — соответствующий элемент в $G(\mathbb{M}) \cong S(\mathbb{M})$. Тогда $\{\overline{c}, \overline{a}\} = [c, a] + U_{r-1} = 0$ для всякого $a \in \mathbb{L}$. Будем доказывать, что любой элемент из

$$C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L}) = \{z \in S(\mathbb{M}) \mid \forall a \in \mathbb{L} \; \{z, a\} = 0\}$$

является многочленом от $e_1^p, \dots, e_7^p$, $e_1^2+e_2^2+e_4^2$, $e_1^2+\dots+e_7^2 \in S(\mathbb{M})$. Отсюда будет следовать, что для некоторого многочлена $f(x_1,\dots,x_7,y,z) \in F[x_1,\dots,x_7,y,z]$ элемент $c-f(\xi(e_1),\dots,\xi(e_7),c_{\mathbb{L}},c_{\mathbb{M}})$ лежит в $C_{U(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$ и имеет меньшую степень фильтрации. По индукции получим доказательство теоремы.

Для $x,y \in S(\mathbb{M})$ введем отображения $D_x\colon S(\mathbb{M}) \to S(\mathbb{M})$ и $J_{x,y}\colon S(\mathbb{M}) \to S(\mathbb{M})$ следующим образом:

$$zD_x = \{z,x\},\ zJ_{x,y} = \{\{z,x\},y\} - \{\{z,y\},x\} - \{z,\{x,y\}\}$$

для всех $z \in S(\mathbb{M})$.

Отображения вида D_x являются дифференцированиями по определению обобщенной скобки Пуассона. Отображения вида $J_{x,y}$ получаются из них с помощью коммутирования и взятия линейной комбинации, поэтому также являются дифференцированиями.

Рассмотрим дифференцирования

$$D_{e_1} + \frac{1}{3}J_{e_2,e_4},\ D_{e_2} + \frac{1}{3}J_{e_4,e_1},\ D_{e_4} + \frac{1}{3}J_{e_1,e_2},\ -\frac{1}{3}J_{e_2,e_4},\ -\frac{1}{3}J_{e_4,e_1},\ -\frac{1}{3}J_{e_1,e_2}. \tag{8}$$

Ясно, что $z \in C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$ тогда и только тогда, когда они обращаются в нуль на z.

Введем биградуировку на алгебре $S(\mathbb{M})$, присвоив элементам e_1,e_2,e_4 степень $(1,0)$, а элементам e_3,e_5,e_6,e_7 — степень $(0,1)$. При умножении однородных элементов степени складываются покомпонентно. По таблице умножения алгебры $\mathbb{M}$ можно проверить, что отображения D_x для $x \in \mathbb{L}$ сохраняют биградуировку на $S(\mathbb{M})$. Следовательно, ее сохраняют и отображения (8), т. е. можно считать z однородным элементом, например, степени (k,l).

Если D — дифференцирование алгебры $S(\mathbb{M})$, $f \in S(\mathbb{M})$ — произвольный многочлен, то

$$fD = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial f}{\partial e_i}(e_i D).$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно частных производных $\frac{\partial z}{\partial e_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial e_7}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & e_4 & 0 & -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -e_4 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_7 & 0 & e_6 & -e_5 & -e_3 \\ 0 & 0 & e_5 & 0 & -e_3 & e_7 & -e_6 \\ 0 & 0 & -e_6 & 0 & e_7 & e_3 & -e_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial e_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial e_7} \end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Подставив на место e_i числовые значения из поля F: $e_4 = e_7 = 1$, остальные $e_i = 0$, получим, что ранг матрицы в левой части не меньше 5. Первые три строки матрицы линейно зависимы над $S(\mathbb{M})$. Следовательно, ее ранг равен 5. Поэтому любое решение системы будет линейной комбинацией двух линейно независимых решений:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \\ e_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_3 \\ 0 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать через i произвольный индекс из множества $I = \{1, 2, 4\}$, а через j — из множества $J = \{3, 5, 6, 7\}$. Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial e_i} = Ae_i, \quad \frac{\partial z}{\partial e_j} = Be_j \tag{10}$$

для всех $i \in I$, $j \in J$ и некоторых A, B из поля частных алгебры $S(\mathbb{M})$. Поскольку Ae_i — многочлены при различных i, то и A должно быть многочленом, причем, так как $\frac{\partial z}{\partial e_i}$ — однородные элементы степени $(k-1, l)$, а e_i — однородные элементы степени $(1, 0)$, то и A должно быть однородным многочленом степени $(k-2, l)$. Аналогично B — однородный элемент степени $(k, l-2)$. Поскольку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial e_{i_1} \partial e_{i_2}} = \frac{\partial^2 z}{\partial e_{i_2} \partial e_{i_1}},$$

дифференцируя первое из равенств (10), получим

$$\frac{\partial A}{\partial e_{i_1}} e_{i_2} = \frac{\partial A}{\partial e_{i_2}} e_{i_1}. \tag{11}$$

Аналогично, дифференцируя второе, имеем

$$\frac{\partial A}{\partial e_{j_1}} e_i = \frac{\partial B}{\partial e_i} e_{j_1}, \quad \frac{\partial A}{\partial e_{j_2}} e_i = \frac{\partial B}{\partial e_i} e_{j_2},$$

откуда

$$\frac{\partial A}{\partial e_{j_1}} e_{j_2} = \frac{\partial A}{\partial e_{j_2}} e_{j_1}. \tag{12}$$

Условия (11), (12) означают, что вектор $\left(\frac{\partial A}{\partial e_1}, \dots, \frac{\partial A}{\partial e_7}\right)^\top$ является решением системы (9), т. е. $A \in C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$. Аналогично $B \in C_{S(\mathbb{M})}(\mathbb{L})$. Степени элементов A и B меньше, чем степень z, поэтому можно считать доказанным, что A и B — многочлены от $e_1^p, \dots, e_7^p$, $c_{\mathbb{L}}$, $c_{\mathbb{M}} \in S(\mathbb{M})$. Так как многочлен z однородный степени (k, l), то

$$kz = \sum_{i \in I} \frac{\partial z}{\partial e_i} e_i = \sum_{i \in I} Ae_i^2 = Ac_{\mathbb{L}}, \quad lz = \sum_{j \in J} \frac{\partial z}{\partial e_j} e_j = \sum_{j \in J} Be_j^2 = B(c_{\mathbb{M}} - c_{\mathbb{L}}).$$

Если k или l не делятся на p, то отсюда сразу следует требуемое. Если k и l делятся на p, то $A = B = 0$. Тогда из (10) получаем, что все частные производные $\frac{\partial z}{\partial e_i}$, $\frac{\partial z}{\partial e_j}$ равны нулю, а значит, z — многочлен от $e_1^p, \dots, e_7^p$.

Рассуждение сохраняет силу и в случае характеристики нуль, при этом нужно рассматривать многочлены только от $e_1^2 + e_2^2 + e_4^2$, $e_1^2 + \dots + e_7^2$. $\square$

В случае $\operatorname{char} F = 0$ теорема ранее доказана К. А. Шемонаевым (анонс см. в [7]). В качестве следствия из теоремы можно получить известное из [2, 7] описание центра универсальной обертывающей $U(M)$.

Следствие 1. *Пусть F — поле, характеристика которого не равна* 2, 3, *M — простая нелиева алгебра Мальцева над F, $a_1, \dots, a_7$ — произвольный базис M. Тогда центр $Z(U(M))$ универсальной обертывающей $U(M)$ порождается элементом Казимира c_M, если $\operatorname{char} F = 0$, и элементами c_M, $\xi(a_1), \dots, \xi(a_7)$, если $\operatorname{char} F > 3$.*

Доказательство. Так же, как и теорему 1, следствие достаточно доказать для алгебры $\mathbb{M}$ над алгебраически замкнутым полем F. Сначала рассмотрим случай положительной характеристики. Пусть $c \in Z(U(\mathbb{M}))$, $c \neq 0$, —

ненулевой элемент из центра, r — степень c в фильтрации алгебры $U(\mathbb{M})$, т. е. $c \in U_r$, но $c \notin U_{r-1}$, и $\bar{c} = c + U_{r-1}$ — соответствующий элемент в $G(\mathbb{M}) \cong S(\mathbb{M})$. Тогда $\{\bar{c}, \bar{a}\} = 0$ для всякого $a \in \mathbb{M}$. Обозначим через A подкольцо в $S(\mathbb{M})$, порожденное $c_{\mathbb{M}}$, $e_1^p, \dots, e_7^p \in S(\mathbb{M})$. Будем доказывать, что любой элемент из

$$Z(S(\mathbb{M})) = \{z \in S(\mathbb{M}) \mid \forall a \in \mathbb{M}\ \{z, a\} = 0\}$$

лежит в кольце A. Отсюда будет следовать, что для некоторого многочлена $f(x_1, \dots, x_7, y) \in F[x_1, \dots, x_7, y]$ элемент $c - f(\xi(e_1), \dots, \xi(e_7), c_{\mathbb{M}})$ лежит в $Z(U(\mathbb{M}))$ и имеет меньшую степень фильтрации. По индукции получим доказательство следствия.

Для любых $z \in Z(S(\mathbb{M}))$ имеем $\{z, a\} = 0$ при любом $a \in \mathbb{L}$, следовательно, по теореме 1 z представляется в виде $f(c_{\mathbb{L}})$, где $f \in A[x]$ — некоторый многочлен с коэффициентами из A. В кольце $S(\mathbb{M})$ будет $c_{\mathbb{L}}^p = e_1^{2p} + e_2^{2p} + e_4^{2p} \in A$. Поэтому можно считать, что f имеет степень $n < p$. Предположим, что $n \geq 1$. По определению $Z(S(\mathbb{M}))$, $\{f(c_{\mathbb{L}}), e_3\} = 0$. Поскольку $\{\,,\}$ — обобщенная скобка Пуассона, то

$$\{f(c_{\mathbb{L}}), e_3\} = f'(c_{\mathbb{L}})\{c_{\mathbb{L}}, e_3\} = 2f'(c_{\mathbb{L}})(e_1e_7 + e_2e_5 - e_4e_6) = 0.$$

В кольце $S(\mathbb{M})$ нет делителей нуля, поэтому $f'(c_{\mathbb{L}}) = 0$. Тогда $f'(c_{\mathbb{L}})$ снова лежит в $Z(S(\mathbb{M}))$ и можно повторить рассуждение. Делая это n раз, получим $f^{(n)}(c_{\mathbb{L}}) = 0$, т. е. $n!a = 0$, где a — коэффициент при старшем члене f. Так как $n < p$, отсюда следует, что $a = 0$; противоречие с тем, что f имеет степень n. Следовательно, многочлен f может быть только константой, т. е. $z \in A$.

Рассуждение сохраняет силу и в случае $\operatorname{char} F = 0$, при этом нужно рассматривать кольцо A, порожденное только $c_{\mathbb{M}} \in S(\mathbb{M})$, и не накладывать ограничений на степень многочлена f. $\square$

§ 4. Случай характеристики 3

Пусть поле F имеет характеристику 3. Как и ранее, будем обозначать через M пространство элементов с нулевым следом в алгебре Кэли — Диксона O. Тогда M — алгебра Ли. Действительно, во всякой алгебре справедливо тождество

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = (a, b, c) - (a, c, b) - (b, a, c) + (b, c, a) + (c, a, b) - (c, b, a).$$

Пусть $a, b, c \in M \subseteq O$, $[\,,]_O$ — коммутатор в O, $[\,,]_M$ — скобка в M и $J(\,,\,,)_O$, $J(\,,\,,)_M$ — соответствующие якобианы. Поскольку алгебра O альтернативна (см. [9]), имеем

$$J(a, b, c)_O = 6(a, b, c) = 0.$$

При этом

$$[a, b]_O = ab - ba = [a, b]_M - n(a, b) - [b, a]_M + n(b, a) = 2[a, b]_M,$$

т. е.

$$J(a, b, c)_M = \frac{1}{4} J(a, b, c)_O = 0.$$

Как известно из теории алгебр Ли, M имеет ассоциативную универсальную обертывающую $U(M)$ с базисом Пуанкаре — Биркгофа — Витта таким, как в (1), фильтрацией U_n и ассоциированной градуированной алгеброй $G(M) \cong S(M)$ со скобкой Пуассона. В $U(M)$ есть центральный элемент Казимира, в центре

$U(M)$ лежит образ отображения $\xi\colon M \to U(M)$. Результат теоремы 3.5 из [6], дающий описание центра $U(M)$, сохраняется и в характеристике 3 с тем же доказательством. Однако теорема 1 уже не имеет места.

Пусть поле F алгебраически замкнуто. Тогда M имеет базис $e_1,\dots,e_7$ с таблицей умножения (4). Будем обозначать через L подалгебру с базисом e_1, e_2, e_4.

Лемма 5. *В централизаторе $C_{U(M)}(L)$ алгебры L в $U(M)$ лежат элементы*

$$x = e_1\bigl(e_3^2 - e_5^2 - e_6^2 + e_7^2\bigr) - e_2(e_3e_6 + e_5e_7) - e_4(e_3e_5 - e_6e_7),$$
$$y = e_1(e_5e_3 + e_6e_7) - e_2(e_3e_7 - e_5e_6) + e_4\bigl(e_3^2 - e_5^2 + e_6^2 - e_7^2\bigr),$$
$$z = e_1(e_6e_3 - e_5e_7) + e_2\bigl(e_3^2 + e_5^2 - e_6^2 - e_7^2\bigr) + e_4(e_3e_7 + e_6e_5),$$

которые не являются многочленами от элементов $c_L, c_M, \xi(e_1),\dots,\xi(e_7)$. Они удовлетворяют уравнениям третьей степени над центром Z алгебры $U(M)$,

$$\begin{aligned} x^3 + c_M^2 x = {}&\xi(e_1)(\xi(e_3)^2 - \xi(e_5)^2 - \xi(e_6)^2 + \xi(e_7)^2) \\ &- \xi(e_2)(\xi(e_3)\xi(e_6) + \xi(e_5)\xi(e_7)) - \xi(e_4)(\xi(e_3)\xi(e_5) - \xi(e_6)\xi(e_7)), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} y^3 + c_M^2 y = {}&\xi(e_1)(\xi(e_5)\xi(e_3) + \xi(e_6)\xi(e_7)) - \xi(e_2)(\xi(e_3)\xi(e_7) - \xi(e_5)\xi(e_6)) \\ &+ \xi(e_4)(\xi(e_3)^2 - \xi(e_5)^2 + \xi(e_6)^2 - \xi(e_7)^2), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} z^3 + c_M^2 z = {}&\xi(e_1)(\xi(e_6)\xi(e_3) - \xi(e_5)\xi(e_7)) \\ &+ \xi(e_2)(\xi(e_3)^2 + \xi(e_5)^2 - \xi(e_6)^2 - \xi(e_7)^2) + \xi(e_4)(\xi(e_3)\xi(e_7) + \xi(e_6)\xi(e_5)), \end{aligned} \tag{15}$$

а также соотношениям

$$[x,y] = c_M z, \quad [y,z] = c_M x, \quad [z,x] = c_M y, \tag{16}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_L(c_M - c_L)^2 - c_L(c_M + c_L). \tag{17}$$

Для элементов Казимира c_L, c_M алгебр L и M имеют место равенства

$$c_L^3 - c_L^2 = \xi(e_1)^2 + \xi(e_2)^2 + \xi(e_4)^2, \quad c_M^3 - c_M^2 = \xi(e_1)^2 + \dots + \xi(e_7)^2.$$

Доказательство. Утверждения леммы проверены в программе *PBW*, предоставленной автору П. С. Колесниковым. $\square$

Пусть Z_0 — подкольцо в центре Z алгебры $U(M)$, порожденное $\xi(e_1),\dots,\xi(e_7)$. Алгебра $U(M)$ не имеет делителей нуля, поэтому Z_0 — область целостности. Пусть F_{Z_0} — поле частных Z_0 и $D(M) = U(M) \otimes_{Z_0} F_{Z_0}$. Универсальная обертывающая $U(M)$ — свободный модуль над Z_0 с образующими $e_1^{i_1}\dots e_7^{i_7}$, $0 \le i_1,\dots,i_7 \le 2$, поэтому $D(M)$ — алгебра размерности 3^7 над полем F_{Z_0}. Алгебра $D(M)$ так же, как $U(M)$, не имеет делителей нуля, поэтому является телом.

Пусть F_Z — поле частных Z. Тогда $D(M) \cong U(M) \otimes_Z F_Z$, F_Z — центр $D(M)$. По лемме 5 элемент Казимира c_M имеет степень 3 над F_{Z_0}, следовательно, $F_Z = F_{Z_0}(c_M)$ имеет размерность 3 над F_{Z_0}, поэтому алгебра $D(M)$ имеет размерность 3^6 над своим центром.

В дальнейшем, будем рассматривать $D(M)$ как алгебру над F_Z и называть *подалгебрами* $D(M)$ только подкольца, содержащие F_Z.

Пусть $D(L)$ — подалгебра в $D(M)$, порожденная L. Пусть B — подалгебра в $D(M)$, порожденная элементами c_L, x, y, z. Так как $D(M)$ — конечномерное тело, $D(L)$ и B — тела. Элемент Казимира c_L не лежит в F_Z, по лемме 5 он имеет степень 3 над F_{Z_0}, поэтому $\dim_{F_Z} F_Z(c_L) = 3$.

Алгебра $D(M)$ является векторным пространством над любым своим подтелом, поэтому подтела $D(M)$ имеют размерности вида 3^n.

Лемма 6. *Центр алгебры B равен $F_Z(c_L)$, и B имеет размерность 3^3 над F_Z.*

Доказательство. Из равенств (13)–(16) следует, что B как векторное пространство над полем $F_Z(c_L)$ порождается элементами $x^i y^j z^k$, $0 \le i,j,k \le 2$, причем соотношение (17) показывает, что они не линейно независимы над $F_Z(c_L)$. Значит, $\dim_{F_Z(c_L)}(B) < 3^3$, а $\dim_{F_Z}(B) < 3^4$.

Поскольку $F_Z(c_L)$ содержится в центре B, центр B имеет размерность не меньше 3 над F_Z. Алгебра B является конечномерной простой, поэтому она имеет размерность n^2 над своим центром для некоторого n. Так как B не совпадает со своим центром, остается единственная возможность: центр алгебры B равен $F_Z(c_L)$ и B имеет размерность 3^3 над F_Z. $\square$

Аналогичное рассуждение можно провести для алгебры $D(L)$. Действительно, в алгебре $O = O(-1,-1,-1)$ выполнено $e_i^3 = -e_i$, поэтому в M имеем $e_i^{[3]} = -e_i$, а в универсальной обертывающей $U(M)$ будет $e_i^3 + e_i = \xi(e_i)$. Значит, e_1, e_2, e_4 имеют степень 3 над F_{Z_0} и, следовательно, над $F_Z(c_L)$. При этом элементы $e_1^i e_2^j e_4^k$, $0 \le i,j,k \le 2$, линейно зависимы над $F_Z(c_L)$, так как

$$e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 = c_L.$$

Действуя далее, как в лемме 6, получаем, что $D(L)$ имеет центр $F_Z(c_L)$ и размерность 3^3 над F_Z.

Обозначим через A централизатор алгебры $D(L)$ в $D(M)$. Тогда A — подтело в $D(M)$. Как отмечено ранее, элементы c_L, x, y, z коммутируют с элементами из L, поэтому B содержится в A.

Лемма 7. *Тела A и B совпадают.*

Доказательство. Ясно, что $Z(D(L)) \subseteq A$. Поэтому $Z(D(L)) \subseteq Z(A)$. Пусть $C(A)$ — централизатор тела A в $D(M)$. Тогда по теореме о двойном централизаторе он равен $D(L)$. Центр $Z(A)$ алгебры A лежит в $C(A)$. При этом элементы из $Z(A)$ коммутируют с элементами из $D(L)$, т. е. $Z(A) \subseteq Z(D(L))$. Значит, $Z(A) = F_Z(c_L)$.

Предположим, что $A \supsetneq B$. Тогда $\dim_{F_Z} A \ge 3^4$. Тело A имеет размерность n^2 над своим центром, поэтому его размерность над F_Z может быть равна только 3^5. Рассмотрим тело $A(e_1)$, полученное добавлением e_1 к A. Элемент e_1 не лежит в A, поэтому $A(e_1)$ строго содержит A, т. е. $A(e_1) = D(M)$. При этом элемент e_1 коммутирует с любым элементом из A. Так как он имеет степень 3 над F_Z, любой элемент из $A(e_1)$ имеет вид $a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_1^2$ для некоторых $a_0, a_1, a_2 \in A$. Элемент e_3 лежит в $A(e_1)$, следовательно, в $U(M)$ имеет место соотношение

$$f e_3 = c_0 + c_1 e_1 + c_2 e_1^2 \tag{18}$$

для некоторых $f \in Z$, $c_0, c_1, c_2 \in C_{U(M)}(L)$, причем $f \ne 0$. Прокоммутируем обе части (18) с e_1, получим

$$-f e_7 = 0.$$

В $U(M)$ нет делителей нуля; пришли к противоречию. Значит, $A = B$. $\square$

Теорема 2. *Существует ненулевой элемент $f \in Z_0$ такой, что $fC_{U(M)}(L)$ содержится в S, где S — Z_0-подалгебра в $U(M)$, порожденная элементами c_M, c_L, x, y, z.*

Доказательство. Кольцо Z_0 является кольцом многочленов над полем F от конечного числа переменных, поэтому оно нётерово. Централизатор

$C_{U(M)}(L)$ — подмодуль в конечно порожденном Z_0-модуле $U(M)$, тем самым он порождается некоторым конечным набором элементов $u_1, \dots, u_n$ как Z_0-модуль. Образы элементов u_i в алгебре $D(M)$ принадлежат телу B, порожденному элементами c_M, c_L, x, y, z над F_{Z_0}, поэтому в $D(M) = U(M) \otimes_{Z_0} F_{Z_0}$ имеем

$$u_i \otimes 1 = \sum_j v_{ij} \otimes a_{ij}$$

для некоторых $v_{ij} \in S$, $a_{ij} \in F_{Z_0}$. Приводя дроби a_{ij} к общему знаменателю и перебрасывая их числители на левую сторону тензорного произведения, получаем

$$u_i \otimes 1 = v_i \otimes \frac{1}{f_i},$$

где $v_i \in S$, $f_i \in Z_0$. Положим $f = f_1 \dots f_n$, $g_i = \frac{f}{f_i} \in Z_0$. Тогда

$$fu_i \otimes 1 = g_i v_i \otimes \frac{f_i}{f_i} = g_i v_i \otimes 1,$$

т. е. $fu_i = g_i v_i \in S$. Поскольку $u_1, \dots, u_n$ порождают $C_{U(M)}(L)$ как Z_0-модуль, $fC_{U(M)}(L) \subseteq S$. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. Н. Желябину за постоянное внимание к работе, а также П. С. Колесникову за предоставление программы *PBW* для вычислений в универсальных обертывающих алгебр Ли и Мальцева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569–576.
2. *Pérez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* An envelope for Malcev algebras // J. Algebra. 2004. V. 272, N 1. P. 379–393.
3. *Кузьмин Е. Н.* Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 4. С. 48–69.
4. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Теоремы Шевалле и Константа для алгебр Мальцева // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 560–584.
5. *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* Неприводимые представления простой трехмерной алгебры над полем конечной характеристики // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 439–454.
6. *Pérez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* On the center of the universal enveloping algebra of the central simple non-Lie Maltsev algebra in characteristic p // Proc. Jordan structures in algebra and analysis meeting. Almeria: Editorial Circulo Rojo, 2010. P. 227–242.
7. *Шемонаев К. А.* Централизаторы трехмерных простых подалгебр Ли в универсальной обертывающей семимерной простой алгебры Мальцева: Тез. докл. // Мальцевские чтения. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009. С. 140.
8. *Moradni P. J., Pérez-Izquierdo J. M., Pumplün S.* On the tensor product of composition algebras // J. Algebra. 2001. V. 243. P. 41–68.
9. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
10. *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

Статья поступила 28 июня 2012 г.

Шабалин Тимофей Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`shabalin.timofey@gmail.com`