Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.518.1+517.518.17

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАЗА ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

С. Пономарев, А. Господарчик

Аннотация. Дано графическое описание множества $T(1)(\Gamma)$, где $T(1)(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$ и $\Gamma = \Gamma_\theta$ — кривая Ван Коха, $\theta \in (0, \pi/4)$. Получено выражение, позволяющее вычислить $T_\theta(1)(z)$ для любого $z \in \Gamma$ с точностью до произвольного $\epsilon > 0$. Также получена оценка погрешности.

Ключевые слова: кривая Ван Коха Γ_θ, естественная параметризация Γ_θ, квазиконформное отображение, псевдоаналитическое отображение, интеграл типа Коши по Γ_θ.

1. Предварительные сведения и основные определения

В работе рассматривается интегрирование вдоль неспрямляемых кривых. Отметим, что некоторые обобщения классического интеграла Коши использовались в приложениях. Например, в [1] изучается интегрирование вдоль неспрямляемых кривых для решения граничной задачи Римана, однако не представляется возможным применить результаты из [1] к рассматриваемой нами задаче. Другой подход продемонстрирован в [2], где используется теория дифференциальных форм. Но и эти результаты не могут быть использованы для наших целей. В работе В. П. Хавина [3] дано разложение Лорана аналитических функций вне множества особенностей. Похожий результат получен в [4, разд. 5 (36)].

Приведем некоторые необходимые понятия и результаты.

Рассматриваем семейство кривых Ван Коха

$$\{\Gamma_\theta : \theta \in (0, \pi/4)\}, \tag{1}$$

построенное следующим образом. Возьмем в качестве исходного равнобедренный треугольник $\triangle_1^0$ (ранга нуль) с вершинами 0, 1, $\frac{1}{2} + i\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$, где θ — угол при основании $\triangle_1^0$, $\theta \in (0, \pi/4)$. Далее шаг за шагом удалим некоторую последовательность равнобедренных открытых треугольников[1)]. На первом шаге удалим треугольник с вершинами λ^2, $1 - \lambda^2$, $\frac{1}{2} + i\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$, где $\lambda = \frac{1}{2\cos\theta}$. Получим два замкнутых треугольника $\triangle_1^1$, $\triangle_2^1$ ранга один, каждый из которых подобен $\triangle_1^0$ (см. рис. 1). На n-м шаге приходим к 2^n равным треугольникам $\triangle_k^n$ ранга n, подобным $\triangle_1^0$, $\operatorname{diam} \triangle_k^n = \lambda^n$. По определению

$$\Gamma_\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} \triangle_k^n. \tag{2}$$

[1)]Исправление: в [4, разд. 1] сразу после формулы (3) слова «подобные исходному треугольнику $\triangle_1^0$» написаны по ошибке и должны быть удалены.

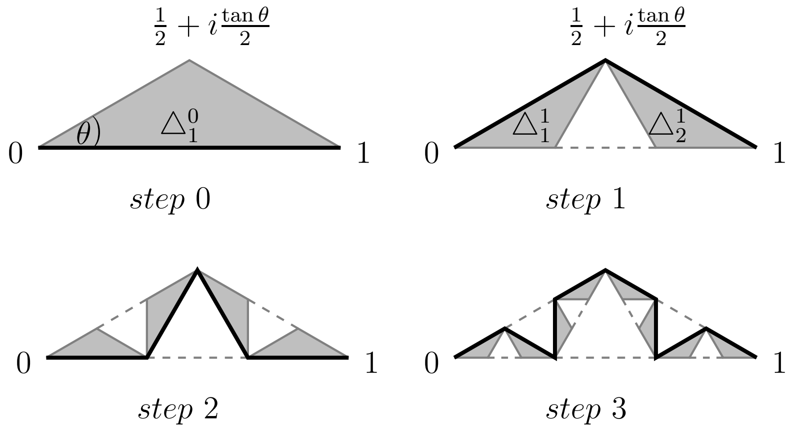

Рис. 1. Четыре последовательных шага в построении кривой Ван Коха Γ_θ, $\theta \in (0, \pi/4)$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ треугольники $\{\triangle_k^n\}$ ранга n снабжаются индексом k в естественном порядке.

Кривая Ван Коха может быть аппроксимирована последовательностью $\{L^n\}$ ориентированных ломаных

$$L^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} s_k^n \quad \bigl(L^n = L_\theta^n\bigr), \tag{3}$$

где $s_k^n = \bigl[z_{k-1}^n, z_k^n\bigr]$ направлена от z_{k-1}^n к z_k^n и

$$z_k^n = z_{k-1}^n + \lambda^n e^{\theta_{n,k}}, \quad k \in \{1, \ldots, 2^n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Здесь $\theta_{n,k}$ — угол, образованный s_k^n с осью Ox. Пример ломаной L^n дан на рис. 2.

Нетрудно видеть, что $\Gamma = \lim\limits_{n\to\infty} L^n$ и Γ допускает естественную параметризацию $\varphi : [0,1] \to \Gamma$, $\varphi\bigl(\frac{k}{2^n}\bigr) = z_k^n$, являющуюся гомеоморфизмом. Более того, φ позволяет перенести меру Лебега с $[0,1]$ на Γ, так что $\mu\bigl(\Gamma_k^n\bigr) = \frac{1}{2^n}$ для любого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, где $\Gamma_k^n = \Gamma \cap \triangle_k^n$. Для $n = 0$ имеем $\Gamma_1^0 = \Gamma \cap \triangle_1^0 = \Gamma$ и $\mu\Gamma = 1$ (более подробно см. в [4]).

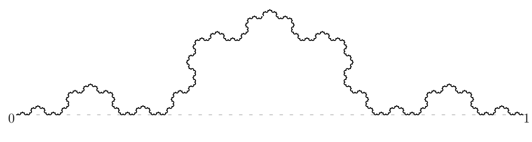

Рис. 2. Ломаная L^n, $n = 10$, $\theta = \pi/6$.

Мера μ на M определена равенством $\mu(E) = |\varphi^{-1}(E)|$, где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега на $[0,1]$.

Рассмотрим пространство $\mathrm{L}^\infty(\Gamma) = \mathrm{L}^\infty(\Gamma, \mu)$ μ-измеримых существенно ограниченных функций $f : \Gamma_\theta \to \overline{\mathbb{C}}$. Снабдим $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ нормой $\|f\|_\infty$ существенного супремума. При $f \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ и $z \in \mathbb{C}$ полагаем

$$T_\theta(f)(z) = \int\limits_{\Gamma_\theta} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z}. \tag{5}$$

В [4] показано, что интеграл (5) существует в смысле Лебега для любого $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 1 [4]. *Для любых* Γ_k^n, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, $z \in \mathbb{C}$ *и* $f \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{|f(\zeta)|\, d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \leq \frac{4\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2} \|f|_{\Gamma_k^n}\|_\infty. \tag{6}$$

В [4] показано, что $T(f)$ непрерывна на $\mathbb{C}$ и аналитична на $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и $T(f) = 0$, если и только если $f = 0$ μ-п. в. (см. [4, теоремы 3, 7]).

Важно отметить, что для любого $\theta \in (0, \pi/4)$ интеграл (5) определен на Γ_θ при том же θ. Более того, (5) действует как линейный функционал на пространстве $\mathrm{L}^\infty(\Gamma, \mu)$, также зависящем от θ.

Отметим особенности изучаемой ситуации.

1. Мы рассматриваем семейство кривых Ван Коха

$$\{\Gamma_\theta : \theta \in (0, \pi/4)\}. \tag{7}$$

2. Кривые квазиконформны и попарно различны. Более того, при $\theta \neq \theta'$ кривая Γ_θ не диффеоморфна Γ_θ', поскольку они имеют различные хаусдорфовы размерности.

3. Для различных θ области интегрирования интегралов (5) различны, тем самым они не сравнимы.

Заметим, что в дальнейшем будем часто опускать индекс θ как в обозначении T, так и Γ, если это не приводит к недоразумению.

Для упрощения вычислений далее полагаем $0 < \theta \leq \pi/8$[2)].

2. Аппроксимация интеграла типа Коши вдоль кривой Ван Коха

Нашей целью является изображение $T(1)(\Gamma)$. Напомним теорему Мори [5, теорема 11], которая служит базой исследования. Функция называется *псевдоаналитической*, если она представима в виде $F = A \circ q$, где A аналитическая, а q квазиконформная (локальная версия данного определения также верна).

Теорема 2 [5]. *Пусть односвязная область* $G \subset \mathbb{C}$ *разделяется на две области* G_1 *и* G_2 *спрямляемой жордановой кривой* L, *соединяющей две граничные точки* G. *Пусть* $F : G \to \mathbb{C}$ *непрерывна и псевдоаналитическая на каждой области* G_1 *и* G_2. *Если*

$$\operatorname{Int} F(L) = \varnothing, \tag{8}$$

то F *псевдоаналитическая на* G.

Изучим функцию

$$\Phi(z) = T(1)(z) = \int\limits_\Gamma \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поскольку Γ квазиконформна [6, 4], существуют область $G \subset \mathbb{C}$ и квазиконформное отображение $q : G \to \mathbb{C}$ такие, что $q(I) = \Gamma$, где I — замкнутый интервал. Без ограничения общности можем считать, что $I = [0, 1]$ и $G = \mathbb{C}$

[2)]Вторым автором недавно показано, что это ограничение несущественно.

(см. [7]). В [4, разд. 4] показано, что отображение $F = T(1)\circ q$ псевдоаналитическое в $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ и не псевдоаналитическое в $\mathbb{C}$. Из [5] следует, что для любого $f\in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ если $f\neq 0$ μ-п. в., то $\operatorname{Int} T(f)(\Gamma)\neq\varnothing$. В частности, это верно при $f=1$.

Чтобы получить (43), необходимо проделать вспомогательные, хотя и длинные, но достаточно простые вычисления, чем и займемся далее в этом разделе. Сначала аппроксимируем Γ ломаными L^n.

2.1. Случай 1: $z\notin\Gamma_\theta$**.** Обозначим через $\omega(\psi,\delta)$ модуль непрерывности функции ψ. Далее рассмотрим пространство $C(\overline{\mathscr{D}})$, где $\overline{\mathscr{D}}$ — замыкание открытой ограниченной области $\mathscr{D}\supset\Gamma_\theta$. Без ограничения общности можем считать, что $L^n\subset\mathscr{D}$ для всех n. При $f\in C(\overline{\mathscr{D}})$ полагаем $\|f\| = \sup\limits_{\overline{\mathscr{D}}}|f|$.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{D}$ — область, содержащая $\Gamma=\Gamma_\theta$, $f\in C(\overline{\mathscr{D}})$, $z\notin\Gamma_\theta$. Тогда существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что для $n>n_0$*

$$\int\limits_{L^n}\frac{f(\zeta)\,d\mu_n(\zeta)}{\zeta-z} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{f\big(z_{k-1}^n\big)}{z_{k-1}^n-z} + R_n(z), \tag{9}$$

где $d\mu_n(\zeta) := \cos^n\theta|d\zeta|$ и

$$|R_n(z)|\le\frac{8\lambda^n\|f\|}{\delta^2(z)} + \frac{2\omega(f,\lambda^n)}{\delta(z)},\quad \delta(z) := \operatorname{dist}(z,\Gamma_\theta). \tag{10}$$

Доказательство. Очевидно, что для достаточно больших n

$$\operatorname{dist}(z,L^n)(=\inf_{w\in L^n}|z-w|) > \frac{\delta(z)}{2} > 0. \tag{11}$$

Поскольку $L^n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} s_k^n$, можем записать

$$\int\limits_{L^n}\frac{f(\zeta)\,d\mu_n(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n}\frac{f(\zeta)\,d\mu_n(\zeta)}{\zeta-z} = \cos^n\theta\sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n}\frac{f(\zeta)|d\zeta|}{\zeta-z}. \tag{12}$$

Ясно, что $\arg s_k^n=\theta_{n,k}$ и $d\zeta = e^{i\theta_{n,k}}|d\zeta|$ на s_k^n. Тогда в силу (12) получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n}\frac{f(\zeta)|d\zeta|}{\zeta-z} &= \sum_{k=1}^{2^n}e^{-i\theta_{n,k}}\int\limits_{s_k^n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{k=1}^{2^n}e^{-i\theta_{n,k}}f\big(z_{k-1}^n\big)\int\limits_{s_k^n}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\ &\quad+\sum_{k=1}^{2^n}e^{-i\theta_{n,k}}\int\limits_{s_k^n}\frac{f(\zeta)-f\big(z_{k-1}^n\big)}{\zeta-z}\,d\zeta.\end{aligned} \tag{13}$$

Для $z\notin s_k^n$ можем записать

$$\int\limits_{s_k^n}\frac{d\zeta}{\zeta-z} = \ln\left(\frac{z_k^n-z}{z_{k-1}^n-z}\right) = \ln\left(1+\frac{z_k^n-z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n-z}\right). \tag{14}$$

Заметим, что если $z \notin s_k^n$ фиксировано, то $\left|\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right| < 1$ для всех достаточно больших n. Следовательно, для таких n получим

$$\ln\left(1 + \frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1}\left(\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right)^{p+1}$$
$$= \frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1}\left(\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right)^{p+1}$$
$$= \frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z} - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right)^{p} = \frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z} + \rho_{n,k}(z), \tag{15}$$

где $\rho_{n,k}(z) = -\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right)^p$. Тем самым

$$|\rho_{n,k}(z)| \le \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p}\left|\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right|^p \le \sum_{p=2}^{\infty} \left|\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}\right|^p \tag{16}$$

$$\le \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\lambda^{np}}{\operatorname{dist}(z, L^n)^p} \le \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\lambda^{np}}{\left(\frac{\delta(z)}{2}\right)^p} = \sum_{p=2}^{\infty} \left(\frac{2\lambda^n}{\delta(z)}\right)^p. \tag{17}$$

Очевидно, что для всех достаточно больших n имеем $\lambda^n < \frac{\delta(z)}{4}$, а значит, $1 - \frac{2\lambda^n}{\delta(z)} > \frac{1}{2}$. В силу (16) получим

$$|\rho_{n,k}(z)| \le \sum_{p=2}^{\infty} \left(\frac{2\lambda^n}{\delta(z)}\right)^p = \frac{2^2\lambda^{2n}}{\delta^2(z)} \frac{1}{1 - \frac{2\lambda^n}{\delta(z)}} \le \frac{8\lambda^{2n}}{\delta^2(z)} \tag{18}$$

для всех $1 \le k \le 2^n$.

Ввиду (12), (13), (15) имеем

$$\int\limits_{L^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu_n(\zeta)}{\zeta - z} = \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\left(\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z} + \rho_{n,k}(z)\right)$$
$$+ \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} \int\limits_{s_k^n} \frac{f(\zeta) - f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)}{\zeta - z}\,d\zeta = \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\frac{z_k^n - z_{k-1}^n}{z_{k-1}^n - z}$$
$$+ \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\rho_{n,k}(z) + \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} \int\limits_{s_k^n} \frac{f(\zeta) - f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{19}$$

Вспоминая, что $z_k^n = z_{k-1}^n + \lambda^n e^{\theta_{n,k}}$ (3), получим

$$\int\limits_{L^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu_n(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)}{z_{k-1}^n - z} + R_n(z), \tag{20}$$

где

$$R_n(z) = \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\rho_{n,k}(z) + \cos^n\theta \sum_{k=1}^{2^n} e^{-i\theta_{n,k}} \int\limits_{s_k^n} \frac{f(\zeta) - f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{21}$$

Оценим $R_n(z)$:

$$\begin{aligned}|R_n(z)| &\le \cos^n\theta\sum_{k=1}^{2^n}\bigl|f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\bigr||\rho_{n,k}(z)| + \cos^n\theta\sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n}\left|\frac{f(\zeta)-f\bigl(z_{k-1}^n\bigr)}{\zeta - z}\right|d\zeta \\ &\le \frac{8\lambda^{2n}}{\delta^2(z)}\|f\|2^n\cos^n\theta + \omega(f,\lambda^n)\frac{2}{\delta(z)}\bigl|s_k^n\bigr|2^n\cos^n\theta \\ &= \frac{8\lambda^{2n}}{\delta^2(z)}\|f\|\lambda^{-n} + \omega(f,\lambda^n)\frac{2}{\delta(z)}\lambda^n\lambda^{-n} = \frac{8\lambda^n\|f\|}{\delta^2(z)} + \frac{2\omega(f,\lambda^n)}{\delta(z)},\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Замечание 4. Очевидно, что $R_n \to 0$ равномерно на каждом компакте, не пересекающемся с Γ_θ.

Теорема 5. *Пусть $F \in C(\overline{\mathscr{D}})$ и $z \notin \Gamma_\theta$ фиксирована. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{L^n} F\,d\mu_n = \int\limits_{\Gamma_\theta} F\,d\mu. \tag{22}$$

Доказательство. Сохраним предыдущие обозначения. Для любого натурального n определим ступенчатые функции

$$F_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{2^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\chi_{\widetilde{\Gamma_k^n}}, \quad \widetilde{\Gamma_k^n} = \Gamma_k^n \setminus \bigl\{z_k^n\bigr\}. \tag{23}$$

где $\chi_{\widetilde{\Gamma_k^n}}$ — характеристическая функция $\widetilde{\Gamma_k^n} = \Gamma_\theta \cap \triangle_k^n \setminus \bigl\{z_k^n\bigr\}$. Заметим, что $F_n(\zeta) = F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)$ при $\zeta \in \widetilde{\Gamma_k^n}$. Очевидно, что $\int\limits_{\Gamma_k^n} = \int\limits_{\widetilde{\Gamma_k^n}}$. Ясно, что F_n μ-измерима, а значит, в силу ограниченности μ-интегрируема. Более того, $F_n \to F$ поточечно всюду на Γ_θ, кроме вершин z_k^n, тем самым μ-п. в. Поскольку последовательность $\{F_n\}$ равномерно ограничена, можем использовать теорему Лебега о мажорируемой сходимости, откуда получим

$$\int\limits_{\Gamma} F\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma} F_n\,d\mu. \tag{24}$$

В силу (23) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} F_n\,d\mu(\zeta) &= \sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{\Gamma_k^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\,d\mu = \sum_{k=1}^{2^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\int\limits_{\Gamma_k^n} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\mu\Gamma_k^n = \sum_{k=1}^{2^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr).\end{aligned} \tag{25}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{L^n} F(\zeta)\,d\mu_n = \sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n} F(\zeta)\,d\mu_n = \sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n} F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\,d\mu_n + \sum_{k=1}^{2^n}\int\limits_{s_k^n}\bigl(F(\zeta) - F\bigl(z_{k-1}^n\bigr)\bigr)\,d\mu_n$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} F\big(z_{k-1}^n\big) \int\limits_{s_k^n} d\mu_n + \gamma_n = \sum_{k=1}^{2^n} F\big(z_{k-1}^n\big)\mu_n s_k^n + \gamma_n$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} F\big(z_{k-1}^n\big)\lambda^n \cos^n\theta + \gamma_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} F\big(z_{k-1}^n\big) + \gamma_n, \quad (26)$$

где, очевидно,

$$|\gamma_n| \le \sum_{k=1}^{2^n} \int\limits_{s_k^n} \big|F(\zeta) - F\big(z_{k-1}^n\big)\big|\, d\mu_n(\zeta) \le \omega(F,\lambda^n) \sum_{k=1}^{2^n} \int\limits_{s_k^n} d\mu_n(\zeta)$$

$$= \omega(F,\lambda^n) \sum_{k=1}^{2^n} \mu_n\big(s_k^n\big) = \omega(F,\lambda^n) \to 0, \quad n\to\infty. \quad (27)$$

Ввиду (25) и (26) получаем

$$\int\limits_{\Gamma} F_n\, d\mu = \int\limits_{L^n} F\, d\mu_n - \gamma_n, \quad (28)$$

откуда в силу (24) и (27) следует (22), что завершает доказательство. □

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{D}$ — открытое множество, содержащее $\Gamma = \Gamma_\theta$. Пусть $f \in C(\overline{\mathscr{D}})$ и $z \notin \Gamma_\theta$. Тогда для любого n*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = \int\limits_{L^n} \frac{f(\zeta)\, d\mu_n(\zeta)}{\zeta - z} + r_n, \quad (29)$$

где

$$|r_n| \le 2\omega(F,\lambda^n), \quad F = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \quad d\mu_n(\zeta) = \cos^n\theta |d\zeta|.$$

Доказательство. Сохраним предыдущие обозначения. Пусть $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, $z \notin \Gamma$. Ясно, что $F \in C(\overline{\mathscr{D}})$. В силу (28) можем записать

$$\int\limits_{\Gamma} F\, d\mu = \int\limits_{\Gamma} F_n\, d\mu + \int\limits_{\Gamma} (F - F_n)\, d\mu = \int\limits_{L^n} F\, d\mu_n - \gamma_n + \int\limits_{\Gamma} (F - F_n)\, d\mu = \int\limits_{L^n} F\, d\mu_n + r_n, \quad (30)$$

где $r_n = -\gamma_n + \int\limits_{\Gamma} (F - F_n)\, d\mu$ и

$$|r_n| \le |\gamma_n| + \int\limits_{\Gamma} |(F - F_n)|\, d\mu \le \omega(F,\lambda^n) + \sum_{k=1}^{2^n} \int\limits_{\Gamma_k^n} \big|F - F\big(z_{k-1}^n\big)\big|\, d\mu$$

$$\le \omega(F,\lambda^n) + \omega(F,\lambda^n) \sum_{k=1}^{2^n} \mu\big(\Gamma_k^n\big) = \omega(F,\lambda^n) + \omega(F,\lambda^n) \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = 2\omega(F,\lambda^n). \quad □$$

2.2. Случай 2: $z \in \Gamma_\theta$**.** Необходимо вычислить $\int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$, где z — вершина L^n, $1 < k < 2^n - 1$. Пусть $\mathscr{D}$ — область, содержащая $\Gamma = \Gamma_\theta$, $0 < \theta \le \frac{\pi}{8}$.

Теорема 7. *Пусть* $0<\theta\le\frac{\pi}{8}$ *и* $n>2$. *Пусть* $z=z_k^n$, $1<k<2^n-1$, *— вершина* L^n, $f\in C(\overline{\mathscr{D}})$. *Тогда для любого натурального* $p\ge 1$

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{2^{n+p}}\left(\sum_{s=1}^{2^p(k-1)}\frac{f\big(z_{s-1}^{n+p}\big)}{z_{s-1}^{n+p}-z}+\sum_{s=2^p(k+1)}^{2^{n+p}}\frac{f\big(z_{s-1}^{n+p}\big)}{z_{s-1}^{n+p}-z}\right)+R_{n,p}^{\Gamma}(z,f),\quad (31)$$

где

$$\big|R_{n,p}^{\Gamma}(z,f)\big|\le 8\lambda^{p-n}\|f\|+\frac{2\omega(f,\lambda^{n+p})}{\lambda^n}+\frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}\|f\|+2\omega(F,\lambda^{n+p}),\qquad (32)$$

$$F(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z},\ \zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_D,\quad \Gamma_D=\big(\Gamma_k^n\cup\Gamma_{k+1}^n\big)\setminus\big\{z_{k-1}^n,z_{k+1}^n\big\}.$$

Доказательство. Сохраним предыдущие обозначения. Имеем $z\in\triangle_k^n\cap\triangle_{k+1}^n$, где $1<k<2^n-1$, $n>2$. Из $\bigcup\limits_{m=1}^{2^n}\triangle_m^n$ удалим $\triangle_D=\big(\triangle_k^n\cup\triangle_{k+1}^n\big)\setminus\big\{z_{k-1}^n,z_{k+1}^n\big\}$. Пусть $\Gamma_D=\big(\Gamma_k^n\cup\Gamma_{k+1}^n\big)\setminus\big\{z_{k-1}^n,z_{k+1}^n\big\}$.

В силу леммы 1 получим

$$\int\limits_{\Gamma_D}\frac{|f(\zeta)|\,d\mu(\zeta)}{|\zeta-z|}\le\frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}\|f\|_\infty.\qquad (33)$$

Используем теоремы 3 и 6, чтобы аппроксимировать

$$\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_D}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}.\qquad (34)$$

Пусть $L_D^n=L^n\setminus(L^n\cap\triangle_D)$ и $p\in\mathbb{N}$. В силу (29) и (9) (см. также (21)) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_D}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}&=\int\limits_{L_D^n}\frac{f(\zeta)\,d\mu_n(\zeta)}{\zeta-z}+r_{n+p}\\&=\frac{1}{2^{n+p}}\left(\sum_{s=1}^{2^p(k-1)}\frac{f\big(z_{s-1}^{n+1}\big)}{z_{s-1}^{n+p}-z}+\sum_{s=2^p(k+1)}^{2^{n+p}}\frac{f\big(z_{s-1}^{n+1}\big)}{z_{s-1}^{n+p}-z}\right)+R_{n+p}(z)+r_{n+p},\end{aligned}\quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}|R_{n+p}(z)+r_{n+p}|&\le\frac{8\lambda^{n+p}\|f\|}{\delta^2(z)}+\frac{2\omega(f,\lambda^{n+p})}{\delta(z)}+2\omega(F,\lambda^{n+p})\\&\le\frac{8\lambda^{n+p}\|f\|}{\lambda^{2n}}+\frac{2\omega(f,\lambda^{n+p})}{\lambda^n}+2\omega(F,\lambda^{n+p})\\&\qquad 8\lambda^{p-n}\|f\|+2\lambda^{-n}\omega(f,\lambda^{n+p})+2\omega(F,\lambda^{n+p})\end{aligned}\quad (36)$$

и $F(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ при $\zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_D$. Ввиду (33), (35) и (36) получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}&=\int\limits_{\Gamma_D}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}+\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_D}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\\&=\frac{1}{2^{n+p}}\left(\sum_{s=1}^{2^p(k-1)}\frac{f\big(z_{s-1}^{n+p}\big)}{z_{s-1}^{n+p}-z}+\sum_{s=2^p(k+1)}^{2^{n+p}}\frac{f\big(z_{s-1}^{n+p}\big)}{z_{s-1}^{n+p}-z}\right)+R_{n,p}^{\Gamma}(z,f),\end{aligned}\quad (37)$$

где

$$R^{\Gamma}_{n,p}(z,f) = \int\limits_{\Gamma_D} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z} + R_{n+p}(z) + r_{n+p},$$

тем самым приходим к оценке

$$|R^{\Gamma}_{n,p}(z,f)| \le 8\lambda^{p-n}\|f\| + 2\lambda^{-n}\omega(f,\lambda^{n+p}) + \frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}\|f\| + 2\omega(F,\lambda^{n+p}), \quad (38)$$

что завершает доказательство. $\square$

Замечание 8. Теорема 7 может быть также доказана при $k \in \{0,1,2^n-1, 2^n\}$. Если $k=0$ или $k=2^n$, то удалим только один треугольник, а именно, $\triangle^n_1$ и $\triangle^n_{2^n}$ соответственно. Если $k=1$, то удалим $\triangle^n_1 \cup \triangle^n_2$, тогда как при $k=2^n-1$ удалим $\triangle^n_{2^n-1} \cup \triangle^n_{2^n}$. Простые детали опускаем.

Для $f=1$ из (31) и (32) получим важную формулу (39) с простой оценкой погрешности (40).

Пусть $0<\theta\le\frac{\pi}{8}$ и $n>2$. Пусть $z=z^n_k \in L^n$, $1<k<2^n-1$, $f=1$. Тогда для любого натурального $p\ge 1$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2^{n+p}}\left(\sum_{s=1}^{2^p(k-1)} \frac{1}{z^{n+p}_{s-1}-z} + \sum_{s=2^p(k+1)}^{2^{n+p}} \frac{1}{z^{n+p}_{s-1}-z}\right) + R^{\Gamma}_{n,p}(z,1), \quad (39)$$

$$\left|R^{\Gamma}_{n,p}(z,1)\right| \le 10\lambda^{p-n} + \frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \quad (40)$$

Доказательство. Ввиду (32) для $f=1$ получим

$$\left|R^{\Gamma}_{n,p}(z,1)\right| \le 8\lambda^{p-n} + \frac{2\omega(1,\lambda^{n+p})}{\lambda^n} + \frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2} + 2\omega(F,\lambda^{n+p}), \quad (41)$$

где

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z},\ \zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_D, \quad \Gamma_D = \left(\Gamma^n_k \cup \Gamma^n_{k+1}\right)\setminus\left\{z^n_{k-1}, z^n_{k+1}\right\}.$$

Очевидно, что $\omega(1,\lambda^{n+p})=0$. Легко проверить, что при $z=z^n_k$ и $\zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_D$ имеем

$$\omega\left(\frac{1}{\zeta - z}, \lambda^{n+p}\right) \le \lambda^{p-n}. \quad (42)$$

Оценка (42) немедленно следует из неравенства

$$\left|\frac{1}{\zeta_1 - z} - \frac{1}{\zeta_2 - z}\right| = \left|\frac{\zeta_2-\zeta_1}{(\zeta_1-z)(\zeta_2-z)}\right| \le \frac{\lambda^{n+p}}{\lambda^{2n}} = \lambda^{p-n},$$

где $\zeta_1,\zeta_2\in\Gamma\setminus\Gamma_D$. Окончательно

$$\left|R^{\Gamma}_{n,p}(z,1)\right| \le 10\lambda^{p-n} + \frac{8\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2},$$

т. е. приходим к (40). $\square$

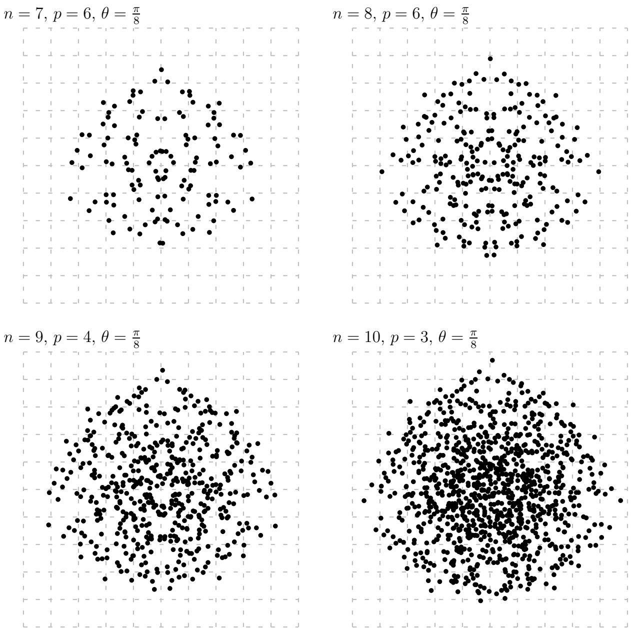

Рис. 3. Графическое представление множества G_n.

3. Графическое изображение $T(1)(\Gamma)$

В этом разделе приведем приближенное графическое изображение множества

$$T(1)(\Gamma) = \left\{ \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} : z \in \Gamma \right\}$$

с использованием (39).

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $p \geq 1$ фиксировано. Полагая $z = z_k^n$ и опуская остаток $R^{\Gamma}_{n,p}\big(z_k^n, 1\big)$ в (39), получим приближенное значение w_k величины $T(1)\big(z_k^n\big)$ (с известной ошибкой (40)):

$$T(1)\big(z_k^n\big) \approx w_k := \frac{1}{2^{n+p}} \left(\sum_{s=1}^{2^p(k-1)} \frac{1}{z_{s-1}^{n+p} - z_k^n} + \sum_{s=2^p(k+1)}^{2^{n+p}} \frac{1}{z_{s-1}^{n+p} - z_k^n} \right). \tag{43}$$

Пусть $G_n = \{w_k, 1 < k < 2^n - 1\}$. Результаты вычислений показаны на рис. 3.

Напомним, что в силу основного результата Мори [5, теорема 11] должно быть $\operatorname{Int} T(1)(\Gamma) \neq \varnothing$ (см. также [1, теоремы 5, 6]). Приведенные рисунки в каком-то смысле призваны графически подтвердить этот факт, тем более что $T(1)$ не удовлетворяет условиям теоремы 5 из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B. A.* Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 380. P. 177–187.
2. *Harrison J., Norton A.* The Gauss–Green theorem for fractal boundaries // Duke Math. J. 1992. V. 67, N 3. P. 575–588.
3. *Хавин В. П.* Один аналог ряда Лорана // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1961. С. 121–131.

4. *Пономарев С. П.* О некоторых свойствах кривых Ван Коха // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1305–1321.

5. *Mori A.* On quasi-conformality and pseudo-analyticity // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 84, N 1,2. P. 56–77.

6. *Пономарев С. П.* К вопросу об AC-устранимости квазиконформных кривых // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 3. С. 566–568.

7. *Lehto O., Virtanen K. I.* Quasikonforme Abbildungen. Second ed. Berlin; New York: Springer-Verl., 1965.

Статья поступила 25 марта 2012 г.

Пономарев Станислав Петрович (Stanislav Ponomarev),
Institute of Mathematics, Pomeranian Academy in Słupsk
Arciszewskiego 22b, 76-200 Słupsk, Poland
p35st9@poczta.onet.pl

Aneta Gospodarczyk (Господарчик Анета)
University of Gdaësk, Institute of Mathematics,
Gdaësk, Poland
agospo@mat.ug.edu.pl