Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 514

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГРАФА ДЕЛОНЕ

А. М. Гурин

Аннотация. Установлено одно необходимое и достаточное условие конгруэнтности двух изоморфных графов Делоне.

Ключевые слова: комбинаторное строение, изоморфные графы, область Вороного, область Делоне, граф Делоне.

Введение. *Конгруэнтность* или равенство двух многоугольников A и B (многогранников M_1 и M_2) означает, что существует движение пространства, переводящее один из многоугольников (многогранников) в другой. Говоря о *комбинаторном* строении многогранника M или графа $G(V,L)$, будем подразумевать, что каждой вершине из V и ребру из L присвоен индивидуальный символ и указано правило, по которому каждая вершина соединена ребрами с остальными вершинами. Одинаковое комбинаторное строение или *изоморфность* многогранников M_1 и M_2 или графов $G_1(V,L)$ и $G_2(V,L)$ означает, что указано взаимно однозначное соответствие между вершинами и ребрами многогранников M_1 и M_2 или графов $G_1(V,L)$ и $G_2(V,L)$ такое, что соответствующие вершины ограничивают соответствующие ребра.

Теорема Коши [1] утверждает, что если два выпуклых многогранника M_1 и M_2 одинакового комбинаторного строения имеют конгруэнтные соответствующие многоугольники граней, то многогранники M_1 и M_2 конгруэнтны между собой.

Согласно лемме Коши [1] если два выпуклых многогранника одинакового комбинаторного строения имеют равные соответствующие плоские углы граней, то и соответствующие двугранные углы многогранников равны. Комбинаторно эквивалентные выпуклые многогранники с равными соответствующими плоскими углами могут отличаться друг от друг длинами соответствующих по изоморфизму ребер. Если соответствующие по изоморфизму ребра равны, то согласно теореме Коши получим пару конгруэнтных многогранников.

Обратимся к выпуклым n-угольникам, где $n \geq 3$, вписанным в окружности.

Лемма 1. *Пусть два выпуклых многоугольника A и B с вершинами A_i и B_i, где $i = 1,\dots,n$, удовлетворяют двум условиям.*

1. *Многоугольники вписаны в окружности с радиусами соответственно r_1 и r_2.*

2. *Все пары сторон A_iA_{i+1} и B_iB_{i+1} многоугольников A и B с равными индексами равны между собой.*

Тогда многоугольники A и B конгруэнтны.

Доказательство. Совместим центры окружностей, в которые вписаны многоугольники A и B. Вообще говоря, возможны два варианта для значения величин радиусов окружностей: либо $r_1 = r_2$, либо $r_1 \neq r_2$.

Пусть $r_1 = r_2$. Тогда можно совместить равные друг другу стороны A_1A_2 и B_1B_2. Возможны два варианта: A_1 совпадает с B_1; A_1 совпадает с B_2. Обратимся к первому варианту. Совмещенные стороны многоугольников вместе с радиусами, направленными в вершины сторон, образуют два равных треугольника.

Перейдем к соседним аналогичным треугольникам с равными основаниями, соответственно A_2A_3 и B_2B_3. Они одинаково составлены из равных сторон, следовательно, равны и также совместятся друг с другом. В результате получим совмещение пары треугольников. Таким образом, имеем начало итерационного процесса совмещения треугольников с равными основаниями по условию леммы и равными боковыми сторонами по предположению. Итерационный процесс закончится при полном обходе всех сторон рассматриваемых многоугольников и даст разбиение многоугольников на равные треугольники. Многоугольники выпуклые, поэтому порядок расположения их вершин при обходе вокруг центра описанной окружности одинаков. (Многоугольники выпуклые, поэтому процесс итерации приведет к последовательному совмещению вершин и исходящих из них углов многоугольников, следовательно, многоугольники конгруэнтны.) Тем самым многоугольники A и B конгруэнтны.

При втором варианте многоугольник B отразим от серединного перпендикуляра к стороне A_1A_2 и придем к первому варианту. Таким образом, многоугольник A конгруэнтен многоугольнику B.

Пусть $r_1 \neq r_2$. В этом случае обратимся к двум последовательностям равнобедренных треугольников, которые попарно имеют равные основания, а боковые стороны треугольников одной последовательности имеют длину, большую, чем боковые стороны треугольников второй. Следовательно, суммы двух последовательностей углов, которые своей вершиной инцидентны центру общей окружности, будут различными, что невозможно для выпуклых многоугольников. Лемма 1 доказана.

Аналогично для многогранников справедлива

Лемма 2. *Пусть два выпуклых многогранника M_1 и M_2 имеют одинаковое комбинаторное строение, вписаны в сферы и соответствующие ребра многогранников M_1 и M_2 попарно равны между собой. Тогда многогранники M_1 и M_2 конгруэнтны.*

Доказательство. Поскольку многогранники M_1 и M_2 вписаны в сферы, грани их вписаны в окружности. Согласно лемме 1 равенство соответствующих ребер соответственных граней влечет за собой равенство граней. Таким образом, получили условие теоремы Коши для двух выпуклых многогранников. Следовательно, многогранники M_1 и M_2 конгруэнтны. Лемма 2 доказана.

Найдем условие конгруэнтности двух графов Делоне. Обратимся к множеству K точек Делоне — Александрова [2], расположенному в евклидовом пространстве произвольной размерности. Множество точек Делоне — Александрова характеризуется двумя условиями: во-первых, расстояние между произвольной парой точек из K больше некоторого положительного числа r; во-вторых, существует положительное число R такое, что в любом шаре радиуса R найдется хотя бы одна точка множества K.

Для каждой точки из множества точек K найдем область ближайших точек пространства, где они расположены, так называемые области Вороного [3].

Для построения области Вороного той или иной точки K в пространстве произвольной размерности достаточно выполнить три действия: соединить ее со всеми остальными точками из K отрезками прямых, через середины отрезков провести гиперплоскости, ортогональные отрезкам, найти общую часть всех полупространств, содержащих указанную точку. В пространстве произвольной размерности области Вороного суть выпуклые многогранники.

Граф $G(K, L)$ называют *графом Делоне* (ГД), если множество L состоит лишь из тех отрезков, ортогональные плоскости к которым в их серединах образуют одну из граней области Вороного.

Рассмотрим сферу с центром в произвольной вершине области Вороного с достаточно малым радиусом, исключающим наличие внутри сферы точек множества ГД. Увеличим непрерывно радиус сферы до касания ее с ближайшей точкой k_i множества K. Согласно правилу построения областей Вороного ближайшая точка k_i множества K будет не одна и выпуклая оболочка множества точек k_i, попавших на поверхность сферы, даст многогранник Делоне [4].

В [4] приведен аналогичный алгоритм построения многогранника Делоне методом пустого шара, где центр шара взят в произвольном месте. Метод пустого шара принадлежит Делоне.

Основная теорема. *Пусть два графа Делоне G_1 и G_2 изоморфны* (*комбинаторно эквивалентны*). *Пусть соответствующие ребра графов G_1 и G_2 равны между собой. Тогда графы G_1 и G_2 конгруэнтны.*

Доказательство. Поскольку графы G_1 и G_2 изоморфны между собой и являются графами Делоне, по определению установлено и взаимно однозначное соответствие для пар областей Вороного и многогранников Делоне, один из которых взят из G_1, а второй — из G_2.

Обратимся к многогранникам Делоне. Пары по изоморфизму многогранников Делоне обладают свойствами пар многогранников леммы 2. Следовательно, многогранники в каждой паре конгруэнтны между собой.

Покажем, что все в целом многогранники Делоне G_1 можно совместить с соответствующими многогранниками Делоне G_2 единым движением (параллельным переносом и поворотом) одного из ГД. Для этого выберем произвольный многогранник Делоне $M1_1$ одного графа Делоне и совместим его с соответствующим ему многогранником Делоне $M2_1$ из второго графа Делоне. Рассмотрим соседние им по граням соответствующие многогранники Делоне ГД. Обозначим их через $M1_i$ для G_1 и через $M2_i$ для G_2.

По условию теоремы каждый многогранник Делоне $M1_i$ имеет изоморфный себе (комбинаторно эквивалентный) многогранник Делоне $M2_i$ из G_2. По лемме 2 они конгруэнтны. При совмещении многогранников $M1_1$ и $M2_1$ многогранники $M1_2$ и $M2_2$ тоже совпадут, так как каждый из них имеет общую грань с многогранниками $M1_1$ и $M2_1$, которые совпадают при совмещении многогранников $M1_1$ и $M2_1$. Получили блок BK из двух многогранников.

Обратимся к следующему многограннику из числа $M1_i$, который имеет общую грань с одним из многогранников блока BK. Предпишем ему номер 3. Начатое построение блока BK из соседних по грани многогранников $M1_i$ состоит в процедуре последовательного присоединения к исходному блоку BK счетного числа многогранников из $M1_i$. Аналогично для многогранников $M2_i$.

Предположим, что после присоединения n-го многогранника $M1_i$ к блоку BK получили конгруэнтные блоки в двух графах. Присоединим к этому блоку $(n + 1)$-й многогранник из числа $M1_i$. Аналогично $M2_i$. Так же, как и на первом шаге итерации получения блока BK, новые блоки будут конгруэнтны. Следовательно, согласно принципу математической индукции все пары многогранников $M1_i$ и $M2_i$ двух ГД будут совмещены единым преобразованием одного из графов, а значит, и графы Делоне конгруэнтны друг другу. Теорема доказана.

Замечание 1. Многогранниками Делоне ГД могут быть правильногранные многогранники [5]. В этом случае ГД отвечает та или иная упаковка равных шаров, а множество точек K — множество центров шаров.

Замечание 2. *Триангуляцией* называется планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками. Триангуляция называется *выпуклой*, если минимальный многоугольник, охватывающий весь граф, выпуклый. Триангуляция удовлетворяет условию Делоне, если внутри окружности, описанной вокруг любого треугольника триангуляции, нет ни одной вершины графа. Триангуляция называется *триангуляцией Делоне*, если она является выпуклой и удовлетворяет условию Делоне [6]. Одним из основных свойств триангуляции Делоне является ее двойственность диаграмме Вороного, найденной на множестве вершин триангуляции Делоне. Следовательно, найденное нами новое свойство диаграммы Вороного применимо и для триангуляции Делоне [7].

Благодарности. При подготовке статьи учтены полезные пожелания участников конференции А. В. Погорелова и участников конференции Б. Н. Делоне, текст статьи детально обсуждался на семинарах А. А. Зыкова и Л. Н. Ромакиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, уг 1950. (2-е изд.: Выпуклые многогранники. Т. 2. Избранные труды. Новосибирск: Наука, 2007.)
2. *Делоне Б. Н., Падуров Н. Н., Александров А. Д.* Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
3. *Voronoi G.* Nouvelles applications des paramèters continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire. Recherches sur les parallélloèdres primitifs // J. Reine Angew. Math. 1908. Bd 134. S. 198–287.
4. *Delaunay B. N.* Sur la sphère vide // Изв. АН СССР. Сер. ОМЕН. 1934. V. 7, N 6. P. 793–800.
5. *Гурин А. М., Залгаллер В. А.* К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Тр. Санкт-Петербургского мат. о-ва. 2008. Т. 14. С. 215–292.
6. *Делоне Б. Н.* О пустой сфере // Изв. АН СССР. Сер. ОМЕН. 1934. Т. 4. С. 793–800.
7. *Скворцов А. В.* Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002.

Статья поступила 22 марта 2012 г., окончательный вариант — 24 июля 2012 г.

Гурин Алексей Михайлович
Физико-технический институт низких температур НАН Украины,
пр. Ленина, 47, Харьков 61103, Украина
gurin@ilt.kharkov.ua