Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.956

ОПЕРАТОРЫ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ГЕЛЬФОНДА — ЛЕОНТЬЕВА В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА S

В. В. Городецкий, О. В. Мартынюк

Аннотация. Исследуются свойства обобщенных пространств типа S, а также операторов обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева конечного и бесконечного порядков в таких пространствах.

Ключевые слова: пространство типа S, оператор обобщенного дифференцирования, целая функция.

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов в известной монографии [1] предложили метод построения функциональных пространств бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $\mathbb{R}$, на которые накладываются определенные условия убывания на бесконечности и роста производных с увеличением порядка, выражаемые неравенствами $|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, где $\{c_{kn}\}$ — двойная последовательность положительных чисел. Если эти числа меняются произвольным образом вместе с φ, то получаем пространство Л. Шварца S быстро убывающих на $\mathbb{R}$ функций. Если $c_{kn} = l_k m_n$, где $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — некоторые последовательности, то имеем пространства $S_{l_k}^{m_n}$, до настоящего времени полностью не исследованные. Наиболее детально изучен случай, когда $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha > 0$, $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$; соответствующие пространства при этом обозначают символом S_α^β.

Известные пространства типа W, введенные Б. Л. Гуревичем [2] (см. также [3]), в которых для характеристики поведения функций на бесконечности вместо степенных используются выпуклые функции, также вкладываются в пространства $S_{l_k}^{m_n}$ при конкретном подборе последовательностей $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{m_n, n \in Z_+\}$ (см. [4]). Пространства S_α^β, а также пространства типа W широко используются при исследовании проблемы о классах единственности и классах корректности задачи Коши для уравнений с частными производными с постоянными (или только зависящими от времени) коэффициентами. Представляет определенный научный интерес более детальное изучение пространств $S_{l_k}^{m_n}$, являющихся обобщением пространств S_α^β (исследование топологической структуры, свойств функций, основных операций в указанных пространствах). В пп. 1–3 даются ответы именно на эти вопросы.

В теории аналитических в круге функций изучается вопрос о представлении линейных непрерывных отображений в виде дифференциальных или интегральных операторов, операторов обобщенного дифференцирования и интегрирования. Разные аспекты этой проблемы исследовали Дальсарт, Лионс, Ю. Ф. Коробейник, Н. И. Нагнибида, В. В. Напалков, В. А. Ткаченко, В. В. Подпорин, С. С. Линчук и другие математики. Важный класс операторов обобщенного дифференцирования составляют операторы Гельфонда — Леонтьева, введенные в середине XX столетия при изучении разложений целых функций в обобщенные ряды Фурье. Свойства таких операторов исследовали и продолжают исследовать математики в пространстве A_∞ однозначных и целых в $\mathbb{C}$ функций с топологией компактной сходимости (A_∞ — не нормированное пространство, но в то же время A_∞ является пространством Фреше). Примерами других пространств, состоящих из целых функций, могут служить пространства S_α^β, $\{\alpha,\beta\}\subset(0,1)$, а также пространства типа W. Функции из таких пространств на действительной оси вместе со всеми своими производными при $|x|\to\infty$ убывают быстрее, чем $\exp(-a|x|)$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$. Топология таких пространств отлична от топологии пространства A_∞. В пп. 4, 5 рассматриваются операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева конечного и бесконечного порядков в пространствах $S_{l_k}^{m_n}$, ибо, насколько нам известно, ранее этот вопрос не изучался. Это позволит значительно расширить класс эволюционных уравнений, для которых естественной средой исследования задачи Коши и нелокальных по времени задач являются пространства типа S.

1. Пространства S^{m_n}

Рассмотрим последовательность $\{m_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ положительных чисел, обладающих следующими свойствами:

1) $m_n\le m_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{Z}_+$; $m_0=1$;

2) $\forall\alpha>0\ \exists c_\alpha>0\ \forall n\in\mathbb{Z}_+\quad m_n\ge c_\alpha\cdot\alpha^n$;

3) $\exists M>0\ \exists h>0\ \forall n\in\mathbb{Z}_+\quad m_{n+1}\le Mh^n m_n$;

4) $\exists\gamma>0\ \forall n\in\mathbb{N}\quad m_n^2\le\gamma m_{n-1}m_{n+1}$;

5) $\forall A>0\ \exists L>0\ \forall\{n,l\}\subset\mathbb{Z}_+\quad m_n\cdot m_l\le AL^{n+l}m_{n+l}$.

Примерами указанных последовательностей могут служить последовательности Жевре $m_n=n^{n\beta}$ и $m_n=(n!)^\beta$, $n\in\mathbb{Z}_+$, где $\beta>0$ — фиксированный параметр. Отметим, что последовательности $\{m_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$, как доказано в [5], можно строить с помощью непрерывных функций $G:[0,\infty)\to(0,\infty)$ таких, что

1′) $G(\lambda)\ge1$, $\lambda\in[0,\infty)$; $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}G(\lambda)=+\infty$;

2′) функция G непрерывно дифференцируемая и монотонно возрастающая на $[0,\infty)$;

3′) $\exists c>0\ \exists\alpha_0>0\ \forall\lambda\in(0,\infty)\quad G(\lambda)/\lambda\ge cG(\alpha_0\lambda)$;

4′) функция $\lambda G'(\lambda)/G(\lambda)$ монотонная на $[0,\infty)$;

5′) $\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>0\ \exists\lambda_0=\lambda_0(\varepsilon)>0\ \forall\lambda\ge\lambda_0\quad G(\lambda)\ge c_\varepsilon e^{\varepsilon\lambda}$; при этом $m_n=\sup\limits_{\lambda\ge1}(\lambda^n/G(\lambda))$ и имеют место неравенства [5]

$$\sup_n\frac{\lambda^k}{m_n}\le G(\lambda)\le\lambda\sup_n\frac{\lambda^n}{m_n},\quad \lambda\in[1,+\infty). \tag{1}$$

Например, функция $\exp(\lambda^{1/\beta})$, $\lambda\in[0,\infty)$, где $\beta\in(0,1)$ — фиксированный параметр, удовлетворяет условиям 1′–5′, а соответствующая последовательность $\{m_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ имеет вид $m_n=(\beta e)^{n\beta}n^{n\beta}$. Далее предполагаем, что последовательность $\{m_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ построена по функции G, удовлетворяющей условиям 1′–5′.

Символом S^{m_n} обозначим совокупность всех функций $\varphi\in S$, удовлетворяющих условию

$$\exists B>0\,\forall k\in\mathbb{Z}_+\,\exists c_k>0\,\forall n\in\mathbb{Z}_+\,\forall x\in\mathbb{R}\quad |x^k\varphi^{(n)}(x)|\le c_kB^nm_n$$

(постоянные c_k, $B>0$ зависят от φ). Топологическая структура в S^{m_n} определяется следующим образом. Символом $S^{m_n,B}$ обозначим совокупность функций $\varphi \in S^{m_n}$ таких, что

$$\forall \overline{B} > B \, \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} \quad |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_{k\overline{B}} \overline{B}^n m_n.$$

Иначе говоря, $S^{m_n,B}$ состоит из тех функций $\varphi \in S^{m_n}$, которые при любом $\delta > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_{k\delta}(B+\delta)^n m_n, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Это множество превращается в полное счетно-нормированное совершенное пространство, если систему норм в нем ввести по формулам

$$\|\varphi\|_{k\delta} = \sup_{x,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(B+\delta)^n m_n}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,\ \delta \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}. \tag{2}$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично тому, как это сделано для пространства $S^{\beta,B}$, построенного по последовательности Жевре $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$ (см. [1]).

При $B_1 < B_2$ пространство S^{m_n,B_1} является частью пространства S^{m_n,B_2} и каждая последовательность $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся в пространстве S^{m_n,B_1}, сходится в пространстве S^{m_n,B_2}. Следовательно, можно построить объединение счетно-нормированных пространств $S^{m_n,B}$ по всем индексам $B \in \mathbb{N}$. Так как каждая функция $\varphi \in S^{m_n}$ принадлежит некоторому $S^{m_n,B}$, объединение пространств $S^{m_n,B}$ совпадает с пространством S^{m_n}.

Положим $\rho_0(x) = \sup\limits_n(|x|^n/m_n)$, $|x| \ge 1$; $\rho(x) = 1$, если $|x| < 1$, и $\rho(x) = \rho_0(x)$, если $|x| \ge 1$. Отметим, что ρ — непрерывно дифференцируемая [5] четная на $\mathbb{R}$ функция, монотонно возрастающая на промежутке $[1, +\infty)$ и монотонно убывающая на $(-\infty, -1]$, $\rho(x) \ge 1$, $x \in \mathbb{R}$. Из свойств $3'$ и 1 вытекают неравенства

$$\sup_n \frac{x^n}{m_n} \equiv \rho_0(x) \ge \frac{G(x)}{x} \ge cG(\alpha_0 x) \ge cc_\varepsilon e^{\varepsilon x}, \quad x \ge x_0 > 0.$$

Следовательно, $\rho(x)/|x|^n \ge c'_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}/|x|^n$, $|x| \ge x_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда получаем, что $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \rho(x)/|x|^n = +\infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Положим $\rho_n := \inf\limits_{x \ne 0} \Omega_n(x)$, $\Omega_n(x) := \rho(x)/|x|^n$, $x \ne 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $\lim\limits_{|x|\to 0} \Omega_n(x) = +\infty$, $n \ge 1$, $\lim\limits_{|x|\to 0} \Omega_0(x) = 1$ и, как показано выше, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \Omega_n(x) = +\infty$, функция $\Omega_n(x)$, $x \ne 0$, достигает своего инфимума. Например, если $m_n = n^{n\beta}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(x) \sim \exp(|x|^{1/\beta})$, а $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta} e^{n\beta}$. Последовательность $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ обладает следующими свойствами: (а) монотонно убывает; (б) $\exists \omega > 1\ \forall n \ge 1\ \rho_{n-1}/\rho_n \le \omega$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$.

Докажем свойство (а). Легко видеть, что фактически $\rho_n = \inf\limits_{|x|\ge 1}(\rho_0(x)/|x|^n)$. Поскольку $\Omega_{n+1}(x) = \rho(x)/|x|^{n+1}$, $x \ne 0$, имеем

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{1}{|x|}\Omega_n(x) \le \Omega_n(x), \quad |x| \ge 1.$$

Отсюда вытекает, что свойство (а) выполняется. Далее, $\rho_{n-1} = \inf\limits_{|x|\ge 1}\left(\frac{\rho_0(x)}{|x|^{n-1}}\right)$, где $\rho_0(x) = \sup\limits_n(|x|^n/m_n)$, $|x| \ge 1$. Зафиксируем x, $|x| \ge 1$. Тогда для любого

$0 < \varepsilon < \rho_0(x)$ найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon, x)$ такой, что $|x|^{n_1}/m_{n_1} < \rho_0(x) - \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \rho_0(x)/q$, $q > 1$. Тогда

$$\rho_0(x) - \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\rho_0(x) < \frac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}}, \quad |x| \geq 1,$$

или

$$\rho_0(x) < \frac{q}{q-1} \cdot \frac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}} \equiv \tilde{\alpha}_0 \frac{|x|^{n_1}}{m_{n_1}}, \quad \tilde{\alpha}_0 > 1.$$

Отсюда получаем неравенства

$$\rho_{n-1} \leq \frac{\rho_0(x)}{|x|^{n-1}} \leq \tilde{\alpha}_0 \frac{|x|^{n_1}}{|x|^{n-1} m_{n_1}} = \tilde{\alpha}_0 \frac{\rho_0(x)}{|x|^n} \frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}}, \quad |x| \geq 1.$$

Оценим выражение $|x|^{n_1+1}/(\rho_0(x) m_{n_1})$:

$$\frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}} = \left(\frac{\rho_0(x)}{|x|^{n_1+1}} m_{n_1}\right)^{-1} \leq \left(\inf_{|x|\geq 1} \frac{\rho_0(x)}{|x|^{n_1+1}} m_{n_1}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho_{n_1+1} \cdot m_{n_1}}.$$

Поскольку

$$\rho_{n_1+1} = \inf_{|x|\geq 1} \frac{\rho_0(x)}{|x|^{n_1+1}} = \left(\sup_{|x|\geq 1} \frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x)}\right)^{-1}, \quad \frac{1}{\rho_{n_1+1}} = \sup_{|x|\geq 1} \frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x)},$$

для любого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ найдется x_0, $|x_0| \geq 1$, такое, что $\frac{1}{\rho_{n_1+1}} < \frac{|x_0|^{n_1+1}}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0$. Так как $m_{n_1} \geq 1$, то

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{n_1+1}}{\rho_0(x) m_{n_1}} < \frac{1}{m_{n_1}}\left(\frac{|x_0|^{n_1+1}}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0\right) &\leq \frac{|x_0|^{n_1}}{m_{n_1}} \frac{|x_0|}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0 \\ &\leq \rho_0(x_0) \frac{|x_0|}{\rho_0(x_0)} + \varepsilon_0 = |x_0| + \varepsilon_0 \leq |x_0| + 1.\end{aligned}$$

Тогда $\rho_{n-1} \leq \tilde{\alpha}_0(|x_0| + 1) \inf\limits_{|x|\geq 1} (\rho_0(x)/|x|^n) \equiv \omega \rho_n$, где $\omega = \tilde{\alpha}_0(|x_0|+1) > 1$, что и требовалось доказать.

Последовательность $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно убывает и ограничена снизу ($\rho_n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$), поэтому она сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \inf\limits_n \{\rho_n\} = a_0$. Убедимся в том, что $a_0 = 0$. Предположим, что $a_0 > 0$. Тогда $\rho_n \geq a_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и для $\varepsilon = a_0/2$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что $\rho_{n_0} < \frac{3}{2} a_0$. Поскольку $\rho_n \leq \rho_{n_0}$, $n \geq n_0$, то $a_0 \leq \rho_n < \frac{3}{2} a_0$, $n \geq n_0$. Кроме того, для $\varepsilon = a_0/2$ существует x_ε, $|x_\varepsilon| \geq 1$, такое, что $\rho_n \leq \rho(x_\varepsilon)/|x_\varepsilon|^n < \rho_n + a_0/2$, $n \geq n_0$. Следовательно, $a_0 \leq \rho(x_\varepsilon)/|x_\varepsilon|^n < 2a_0$, $n \geq n_0$, или $a_0 |x_\varepsilon|^n \leq \rho(x_\varepsilon) < 2a_0 |x_\varepsilon|^n$ для любого $n \geq n_0$. Так как $\rho(x_\varepsilon) = \sup\limits_n (|x_\varepsilon|^n / m_n)$, для любого $\nu_k \in (0, a_0/2)$, $k \in \mathbb{N}$, найдется номер n_k такой, что $|x_\varepsilon|^{n_k}/m_{n_k} > \rho(x_\varepsilon) - \nu_k > a_0 |x_\varepsilon|^{n_k} - \nu_k$, или

$$m_{n_k} < \frac{|x_\varepsilon|^{n_k}}{a_0 |x_\varepsilon|^{n_k} - \nu_k} = \left(a_0 - \frac{\nu_k}{|x_\varepsilon|^{n_k}}\right)^{-1} \leq \frac{1}{a_0 - \nu_k}, \quad |x_\varepsilon| \geq 1.$$

Поскольку $a_0 - \nu_k > a_0 - a_0/2 = a_0/2$, $k \geq 1$, то $m_{n_k} \leq 2/a_0$, $k \geq 1$. Таким образом, у монотонно возрастающей неограниченной последовательности $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ существует ограниченная сверху подпоследовательность. Полученное противоречие доказывает, что $a_0 = 0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Из последнего соотношения вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\rho_n = -\infty$. Отсюда приходим к выводу, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\rho_n/n = a$, где $a \in (-\infty, 0]$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\rho_n/n = -\infty$. Поскольку $\sqrt[n]{\rho_n} = \exp(\ln n/n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = a_1$, где $a_1 = e^a > 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$. Предположив, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = a_1$, и рассуждая аналогично предыдущему, придем к тому, что у последовательности $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, удовлетворяющей условию 2, существует подпоследовательность, которая этому условию не удовлетворяет.

Используя свойство (в) последовательности $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, установим одно важное свойство функции ρ, которым будем пользоваться в дальнейшем, а именно:

$$\rho(x_1)\rho(x_2) \le \rho(x_1+x_2), \quad \{x_1, x_2\} \subset (1, +\infty).$$

Для его доказательства достаточно установить, что $\rho(x_1)\rho(x_2)\rho^{-1}(x_1+x_2) \le 1$, $\{x_1, x_2\} \subset (1, +\infty)$. Пусть $x_1 \le x_2$. Поскольку ρ монотонно возрастает на $(1, +\infty)$, то $\rho(x_1) \le \rho(x_2)$. Следовательно,

$$\rho(x_1)\rho(x_2)\rho^{-1}(x_1+x_2) \le \rho^2(x_2)\rho^{-1}(x_1+x_2).$$

По определению $\rho(x_2) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \bigl(x_2^n/m_n\bigr)$, $x_2 \in (1, +\infty)$. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_k = \beta_k\rho(x_2), k \in \mathbb{N}\}$, где последовательность $\{\beta_k, k \in \mathbb{N}\}$ положительных чисел монотонно стремится к нулю, причем $\beta_1 < 1$. Тогда для заданного $\varepsilon_k > 0$ найдется номер $n_k = n_k(\varepsilon_k)$ такой, что

$$\frac{x_2^{n_k}}{m_{n_k}} > \rho(x_2) - \varepsilon_k = \rho(x_2) - \beta_k\rho(x_2), \quad k \ge 1,$$

т. е. $\rho(x_2) < x_2^{n_k}(1-\beta_k)^{-1}m_{n_k}^{-1}$. Соответственно $\rho(x_1+x_2) \ge (x_1+x_2)^{n_k}m_{n_k}^{-1}$, $k \ge 1$. С учетом этих неравенств найдем, что

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1+x_2)} \le \frac{\rho^2(x_2)}{\rho(x_1+x_2)} \le \frac{x_2^{2n_k}m_{n_k}}{(1-\beta_k)^2m_{n_k}^2(x_1+x_2)^{n_k}} \le \frac{x_2^{n_k}}{(1-\beta_k)^2m_{n_k}}, \quad k \ge 1$$

(здесь учтено, что $x_1 + x_2 \ge x_2$). Кроме того, $\rho(\alpha) \ge (\alpha^n/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для любого $\alpha > 0$, или $m_n \ge (\alpha^n/\rho(\alpha))$ для любых $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Следовательно,

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1+x_2)} \le \frac{x_2^{n_k}}{(1-\beta_k)^2} \inf_{\alpha>0} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha^{n_k}}, \quad k \ge 1.$$

Однако $\inf\limits_{\alpha>0}(\rho(\alpha)/\alpha^{n_k}) := \rho_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, причем последовательность $\{\rho_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ обладает свойством (в). Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists n_{k_0} = n_{k_0}(\varepsilon)\, \forall n_k \ge n_{k_0} \quad \rho_{n_k} < \varepsilon^{n_k}.$$

Возьмем $\varepsilon = (1-\beta_1)^2x_2^{-1}$. Для всех $n_k \ge n_{k_0}$, $k \ge k_0$, выполняются неравенства

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1+x_2)} \le \frac{x_2^{n_k}}{(1-\beta_k)^2}\rho_{n_k} \le \frac{x_2^{n_k}(1-\beta_1)^{2n_k}}{(1-\beta_k)^2x_2^{n_k}} \le \frac{(1-\beta_1)^2}{(1-\beta_k)^2} \le 1,\ \{x_1, x_2\} \subset (1, +\infty),$$

что и требовалось доказать.

Из указанного свойства функции ρ следует, что функция $\ln\rho$ удовлетворяет неравенству выпуклости:

$$\forall\{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty) \quad \ln\rho(x_1) + \ln\rho(x_2) \le \ln\rho(x_1+x_2).$$

Остановимся еще на одном специальном представлении элементов последовательности $\{\rho_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$. С этой целью для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $\varphi_k(x) := x^{-k}\rho(x)$, $x \in (0,\infty)$, дифференцируемую на $(0,\infty)$; φ_k достигает своего инфимума на промежутке $(0,\infty)$, который найдем с помощью методов дифференциального исчисления: $\varphi_k'(x) = x^{-(k+1)}(x\rho'(x) - k\rho(x))$. Приравнивая φ_k' к нулю, получим, что $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$, где $\mu(x) := \rho'(x)/\rho(x)$. Функция μ неотрицательная и непрерывная на $[0,\infty)$. Поскольку $\ln\mu(x) = \int\limits_0^x \mu(\xi)\,d\xi$, в силу теоремы о среднем значении имеем соотношение $\ln\rho(x) = \mu(\tilde{x})\cdot x$, $0 < \tilde{x} < x$, т. е. $\mu(\tilde{x}) = \ln\rho(x)/x$. Из свойств функции ρ вытекает, что $\ln\rho(x)$ при $x \to +\infty$ возрастает быстрее любой линейной функции, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mu(x) = +\infty$. Предположим, что выполняется условие $\rho'(2)/\rho(2) = \mu(2) > 1$. Тогда уравнение $x\mu(x) = k$ имеет единственное решение $\nu_k < k+1$, $k \in \mathbb{N}$ $(1 < \nu_1 < 2)$. Отметим, что последовательность $\{\nu_k, k \in \mathbb{N}\}$ возрастает и не ограничена; при этом $\inf\limits_{x>0}(x^{-k}\rho(x)) = \nu_k^{-k}\rho(\nu_k)$. Таким образом, $\rho_k = \nu_k^{-k}\rho(\nu_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Далее будем предполагать, что последовательность $\{\nu_k, k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию (A) $\lim\limits_{k\to\infty} k/\nu_k^2 = 0$.

Рассмотрим пространство S^{m_n}, где последовательность $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ имеет специальный вид, а именно $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, последовательность $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ обладает свойствами (а)–(в) (можно непосредственно убедиться в том, что тогда последовательность $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ обладает свойствами 1–5).

Теорема 1. *Функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $S^{n!\rho_n}$ тогда и только тогда, когда она аналитически продолжается в комплексную плоскость до целой функции $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию*

$$\exists b > 0\,\forall k \in \mathbb{Z}_+\,\exists c_k > 0\,\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \quad |z^k\varphi(z)| \le c_k\rho(by), \tag{3}$$

где

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho_0(y), & |y| \ge 1, \end{cases} \qquad \rho_0(y) = \sup_n \frac{|y|^n}{n!\rho_n}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi \in S^{n!\rho_n}$, т. е.

$$\exists B > 0\,\forall k \in \mathbb{Z}_+\,\exists c_k > 0\,\forall n \in \mathbb{Z}_+\,\forall x \in \mathbb{R} \quad |x^k\varphi^{(n)}(x)| \le c_k B^n n!\rho_n.$$

Тогда функция $\varphi(x)$ может быть аналитически продолжена во всю комплексную плоскость. Действительно, остаточный член в формуле Тейлора

$$\varphi(x+h) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}h^m + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}h^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $|x - \xi| < |h|$, допускает оценку

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!}|h|^n \le c_0 B^n\rho_n|h|^n = c_0(B|h|\sqrt[n]{\rho_n})^n. \tag{4}$$

Поскольку $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \ge n_0\ \rho_n < \varepsilon^n$. Зафиксируем произвольным образом $|h| > 0$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{2}(B|h|)^{-1}$. Тогда $|\varphi^{(n)}(\xi)|\,|h|^n/n! \le c_0 2^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, откуда и вытекает, что ряд Тейлора функции $\varphi(x)$ сходится к $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\varphi(x+h) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(x)}{m!}h^m.$$

Из оценки (4) следует, что ряд Тейлора функции φ остается сходящимся и для комплексных значений h. Стало быть, φ продолжается до целой функции $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$; при этом $x^k\varphi(x+iy) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(iy)^n x^k \varphi^{(n)}(x)/n!$ и $|x^k\varphi(x+iy)| \leq c_k \sum\limits_{n=0}^{\infty}|y|^n B^n \rho_n$. Поскольку найдется постоянная $d_0 > 0$ такая, что $\rho(y) \leq d_0\rho(2by)$, то

$$|y|^n B^n \rho_n = |y|^n B^n \inf_{y\neq 0}\frac{\rho(y)}{|y|^n} \leq d_0|y|^n B^n \inf_{y\neq 0}\frac{\rho(2by)}{(2By)^n}$$
$$\leq d_0|y|^n B^n \frac{\rho(2By)}{2^n B^n |y|^n} = \frac{d_0}{2^n}\rho(by), \quad b = 2B, \ y \neq 0.$$

Тогда

$$|x^k\varphi(x+iy)| \leq c_k\rho(by)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_0}{2^n} = c_k'\rho(by), \quad y \neq 0. \tag{5}$$

Аналогично находим, что

$$|y^k\varphi(x+iy)| \leq c_0\sum_{n=0}^{\infty}|y|^{n+k}B^n\rho_n \leq \frac{c_0\omega^k}{B^k}\sum_{n=0}^{\infty}|y|^{n+k}B^{n+k}\rho_{n+k}$$
$$\leq \frac{c_0 d_0\omega^k}{(2B)^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\rho(2By) = c_k'\rho(by), \quad \omega > 1, \ b = 2B, \ y \neq 0. \tag{6}$$

При оценке выражения $|y^k\varphi(x+iy)|$ воспользовались свойством (б) последовательности $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, из которого следует существование постоянной $\omega > 1$ такой, что $\rho_n \leq \omega^k\rho_{n+k}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Учитывая (5), (6), а также неравенства $|x+iy|^k \leq 2^{k/2}(|x|^k + |y|^k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, придем к тому, что

$$|z^k\varphi(z)| \leq \tilde{c}_k\rho(by), \quad z = x+iy \in \mathbb{C}, \ y \neq 0, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $y = 0$, то это неравенство очевидно.

Достаточность. Пусть функция $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость до целой функции $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию (3). Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ положим $\varphi_k(z) = z^k\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$. В силу интегральной формулы Коши

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\varphi_k(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где Γ_R — окружность радиуса R с центром в точке $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\left|\varphi_k^{(n)}(x)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\max_{\xi\in\Gamma_R}\frac{|\varphi_k(\xi)|}{|\xi - x|^{n+1}}\oint\limits_{\Gamma_R}ds \leq c_k n! b^n \inf_R\frac{\rho(bR)}{(bR)^n}$$
$$\leq d_0' c_k n! b^n \inf_R\frac{\rho(R)}{R^n} = \tilde{c}_k b^n n!\rho_n, \quad \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}, \ d_0' > 0.$$

Отсюда следует, что $\{\varphi^{(n)}, x^k\varphi\} \subset L_2(\mathbb{R})$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$. Действительно,

$$\|\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}}|\varphi^{(n)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\{(1+x^2)|\varphi^{(n)}(x)|^2\}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}\right)^{1/2}$$
$$\leq \sqrt{\pi}(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi^{(n)}(x)|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi^{(n)}(x)|^2)^{1/2} \leq c_0' b^n n!\rho_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $c_0' = \sqrt{\pi\big(\tilde{c}_0^2 + (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_0 b^{-1}\omega)^2\big)}$ (здесь воспользовались соотношениями $x\varphi^{(n)} = (x\varphi)^{(n)} - n\varphi^{(n-1)} = \varphi_1^{(n)} - n\varphi_0^{(n-1)}$, а также неравенством $\rho_{n-1} \le \omega\rho_n$, $\omega > 1$, вытекающим из свойства (б) последовательности $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$). Аналогично

$$\|x^k\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |x^k\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \sqrt{\pi}\big(\sup_{x\in\mathbb{R}}\{(1+x^2)\,|x^k\varphi(x)|^2\}\big)^{1/2}$$

$$\le \sqrt{\pi\big(\tilde{c}_k^2 + \tilde{c}_{k+1}^2\big)} \equiv c_k', \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

т. е. $x^k\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пользуясь формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций, неравенством Коши — Буняковского, а также тем, что функции $\varphi_k^{(n)}$ ограничены на $\mathbb{R}$ при k, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi^{(n)}$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, найдем, что

$$\begin{aligned}
\|x^k\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= (x^k\varphi^{(n)}, x^k\varphi^{(n)})_{L_2(\mathbb{R})} = |((x^{2k}\varphi^{(n)})^{(n)}, \varphi)_{L_2(\mathbb{R})}| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{r} C_n^j \frac{(2k)!}{(2k-j)!}(x^{2k-j}\varphi^{(2n-j)}, \varphi)_{L_2(\mathbb{R})}\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{r} C_n^j \frac{(2k)!}{(2k-j)!}(x^{2k-j}\varphi, \varphi^{(2n-j)})_{L_2(\mathbb{R})}\right| \\
&\le \sum_{j=0}^{r} \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2k)!}{(2k-j)!}\|x^{2k-j}\varphi\|_{L_2(\mathbb{R})} \cdot \|\varphi^{(2n-j)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \\
&\le c_0' \sum_{j=0}^{r} \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(2k)!}{(2k-j)!} c''_{2k-j} b^{2n-j}(2n-j)!\rho_{2n-j},
\end{aligned}$$

где $r = \min\{2k, n\}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Из свойства (б) последовательности $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ вытекает, что последовательность $m_n = n!\rho_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяет условию $m_n \le \omega m_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\omega > 1$. Действительно,

$$m_n = n!\rho_n \le \omega n!\rho_{n+1} \le \omega(n+1)n!\rho_{n+1} = \omega(n+1)!\rho_{n+1} = \omega m_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
m_{2n-j} &\le \omega m_{2n-j+1} \le \omega^2 m_{2n-j+2} \le \dots \le \omega^j m_{2n} \le \omega^r m_{2n} \\
&\le \omega^{2k+n} m_{2n}, \quad \omega > 1; \quad 0 \le j \le r.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\rho_{2n} \le \rho_n^2$, придем к неравенствам

$$(2n-j)!\rho_{2n-j} \le \omega^{2k+n}(2n)!\rho_{2n} \le \omega^{2k+n}2^n n!\rho_n^2, \quad 0 \le j \le r.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|x^k\varphi^{(n)}\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &\le c_0' 2^n (n!)^2 \rho_n^2 \omega^{2k+n} b^{2n}(2k)! \sum_{j=0}^{r} \frac{b^{-j}}{j!} c''_{2k-j} \\
&\le c_0' 2^n (n!)^2 \rho_n^2 b^{2n}(2k)!\omega^{2k+n} \tilde{c}_k'' \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{b}^j}{j!} = a_k b_1^{2n}(n!)^2\rho_n^2.
\end{aligned}$$

Поскольку полунормы

$$\rho_{k,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(n)}(x)|, \quad \rho'_{k,n}(\varphi) = \left(\int_{\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(n)}(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

эквивалентны, этим доказано, что функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию (3), принадлежит пространству $S^{n!\rho_n}$.

2. Пространства S_{l_k}

Рассмотрим последовательность $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ положительных чисел, обладающую свойствами 1–5 (см. п. 1). Считаем также, что эта последовательность построена по функции G, удовлетворяющей условиям $1'$–$5'$. Символом S_{l_k} обозначим совокупность бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\exists A > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+\, \exists c_n > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R} \quad |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_n A^k l_k. \tag{7}$$

Положим $\gamma(x) = 1$, если $|x| < 1$, и $\gamma(x) = \inf\limits_k (l_k/|x|^k)$, если $|x| \ge 1$. Поскольку $\gamma(x) = 1/\tilde\gamma(x)$, где $\tilde\gamma(x) = 1$, $|x| < 1$, и $\tilde\gamma(x) = \sup\limits_k (|x|^k/l_k)$, если $|x| \ge 1$, а свойства функции $\tilde\gamma$ изучены ранее, отсюда получаем, что γ — непрерывно дифференцируемая четная на $\mathbb{R}$ функция, монотонно убывающая на промежутке $[1, +\infty)$ и монотонно возрастающая на $(-\infty, -1]$, $0 < \gamma(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}$. Например, если $l_k = k^{k\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, то γ удовлетворяет неравенствам [1]

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\} \le \gamma(x) \le c \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\}, \quad c = e^{\alpha e/2}.$$

Разделив обе части неравенства (7) на $|x|^k$, $x \ne 0$, и перейдя в правой части к нижней грани по k, придем к утверждению: *функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ принадлежит пространству S_{l_k} тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию*

$$\exists a > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}_+\, \exists c_n > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi^{(n)}(x)| \le c_n \gamma(ax).$$

Символом $S_{l_k,A}$, $A > 0$, обозначим совокупность тех функций $\varphi \in S_{l_k}$, которые при любом $\rho > 1$ удовлетворяют неравенствам

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_{n\rho}(A+\rho)^k l_k, \quad x \in \mathbb{R},\ \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Из сформулированного выше утверждения следует, что $S_{l_k,A}$ совпадает с пространством $K\{M_p\}$, введенным в [1] с фиксированной последовательностью весовых функций $M_p(x) = \bigl(\gamma\bigl(a\bigl(1-\frac{1}{p}\bigr)x\bigr)\bigr)^{-1}$, $p \in \{2,3,\dots\}$, т. е. к пространству $S_{l_k,A}$ можно применять все результаты, касающиеся общих пространств $K\{M_p\}$. При этом S_{l_k} совпадает с объединением пространств $S_{l_k,A}$ по всем A.

3. Пространства $S_{l_k}^{m_n}$ и $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$

Рассмотрим последовательности $\{m_n = n!\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{l_k = k!d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, где последовательности $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ обладают свойствами (а)–(в). Символом $S_{l_k}^{m_n}$ обозначим совокупность всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\exists c, A, B > 0\, \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R} \quad |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c A^k B^n l_k m_n. \tag{8}$$

Теорема 2. *Функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $S_{l_k}^{m_n}$ тогда и только тогда, когда она аналитически продолжается в комплексную плоскость до целой функции $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющей условию*

$$\exists a, b, c > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \quad |\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by), \tag{9}$$

где

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_k \frac{l_k}{|x|^k}, & |x| \ge 1, \end{cases} \quad \rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_n \frac{|y|^n}{m_n}, & |y| \ge 1. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, при этом используется утверждение, сформулированное в п. 2.

Обозначим через $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ совокупность функций $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}$, для которых при любых $\delta > 0$, $\rho > 0$ справедливы неравенства

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_{\delta\rho}(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Это множество превращается в полное счетно-нормированное совершенное пространство, если в нем систему норм ввести с помощью соотношений

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^n l_k m_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Доказательство этого факта проводится аналогично тому, как это сделано в [1] для пространства $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$, построенного по последовательностям Жевре $m_n = n^{n\beta}$, $l_k = k^{k\alpha}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, при этом $S_{l_k}^{m_n}$ совпадает с объединением счетно-нормированных пространств $S_{l_k,A}^{m_n,B}$ по всем индексам $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$.

Символом $S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ обозначим совокупность целых функций $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, являющихся продолжением в $\mathbb{C}$ функций из пространства $S_{l_k}^{m_n}$. Из теоремы 2 следует, что функции $\varphi \in S_{l_k}^{m_n}(\mathbb{C})$ удовлетворяют условию (9).

Замечание 1. Во введенных пространствах определены и ограничены (следовательно, и непрерывны) многие линейные операторы, важные для анализа. В первую очередь это операторы умножения на x и на все многочлены, на некоторые бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие определенным условиям (в частности, на функции из рассматриваемых пространств), операторы дифференцирования, сдвига и растяжения.

4. Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева в пространствах $S_{m_k}^{m_n}$

Напомним, что оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева (который обозначим символом $D^m(F, \cdot)$, $m \in \mathbb{N}$ фиксировано) в пространстве A_R, $0 < R \le +\infty$, — пространстве однозначных и аналитических в круге $K_R = \{z : |z| < R\}$ функций с топологией компактной сходимости — определяется с помощью фиксированной аналитической функции $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $F \in A_R$, следующим образом [6]. Если $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ — произвольная функция из пространства A_R, то по определению

$$D^m(F, \varphi)(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k \frac{a_{k-m}}{a_k} z^{k-m}, \tag{10}$$

при этом предполагается, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k-m]{|a_{k-m}/a_k|} = 1$.

Отметим известные свойства оператора $D^m(F,\cdot)$ [6]:
1) $D^m(F,\varphi_1+\varphi_2) = D^m(F,\varphi_1) + D^m(F,\varphi_2)$;
2) $D^m(F,c\varphi) = cD^m(F,\varphi)$, $c = \mathrm{const}$;
3) $D^m(e^z,\varphi) = d^m\varphi/dz^m$;
4) $D^m(F,D^n(F,\varphi)) = D^{m+n}(F,\varphi)$.

Эти свойства указывают на то, что $D^m(F,\varphi)$ действительно можно понимать как обобщенную производную порядка m функции φ, порожденную функцией $F(z)$ (вместо функции e^z).

Пусть $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — целая функция, коэффициенты $\{a_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$ которой удовлетворяют условию

$$\exists\alpha>0\,\exists L>1\,\forall k\ge m\quad \left|\frac{a_k}{a_{k+m}}\right| \le \alpha L^{k+m} \tag{11}$$

($m\in\mathbb{N}$ фиксировано).

Определим формально оператор обобщенного дифференцирования в пространстве $S_{m_k}^{m_n}$ по формуле (10), где $z = x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ — произвольная функция из пространства $S_{m_k}^{m_n}$.

Теорема 3. *Оператор обобщенного дифференцирования $D^m(F,\cdot)$ определен корректно в $S_{m_k}^{m_n}$ для произвольного фиксированного $m\in\mathbb{N}$ и непрерывно отображает это пространство в себя.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $\varphi\in S_{m_k}^{m_n}$, которая в силу теоремы 2 допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, и пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\tilde b_k z^k$, $z\in\mathbb{C}$, — ее степенной ряд. Положим по определению

$$\psi_m(z) \equiv D^m(F,\varphi)(z) := \sum_{k=m}^{\infty}\tilde b_k \frac{a_{k-m}}{a_k} z^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty}\tilde b_{k+m}\frac{a_k}{a_{k+m}} z^k, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Докажем, что $\psi_m(x)\in S_{m_k}^{m_n}$ при каждом $m\in\mathbb{N}$. Для этого достаточно доказать, что $\psi_m(z)\in S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$. Прежде всего отметим, что ψ_m также целая функция, ибо из условия (11) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k/a_{k+m}|}<\infty$; тогда радиусы сходимости указанных степенных рядов совпадают и равны бесконечности.

Функция φ целая, поэтому возьмем произвольно фиксированную точку $z_0 = x_0+iy_0$, $y_0>0$, и представим φ в виде сходящегося в $\mathbb{C}$ ряда: $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ или

$$\varphi(z+z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{12}$$

при этом коэффициенты b_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, функции φ вычисляются по формуле Коши:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi, \quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

где Γ_R — окружность радиуса R с центром в точке z_0. Поскольку $\varphi\in S_{m_k}^{m_n}$, в силу теоремы 2 выполняется условие

$$\exists a,b,c>0\,\forall z=x+iy\in\mathbb{C}\quad |\varphi(z)|\le c\gamma(ax)\rho(by), \quad \gamma = 1/\rho. \tag{13}$$

Используя (13) и свойства функций γ, ρ, найдем, что

$$|b_k| \le R^{-k} \max_{\xi\in\Gamma_R} |\varphi(\xi)| \le cR^{-k}\gamma(a\tilde{x}_0)\rho(b(y_0+R)),$$

где $\tilde{x}_0$ — точка максимума функции $\gamma(ax)$, $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$.

Непосредственно убеждаемся в том, что существует $\tilde{c} > 0$, для которого $\gamma(a\tilde{x}_0) \le \tilde{c}\gamma(ax_0)$. Кроме того, поскольку функция ρ монотонно возрастает на промежутке $[1, +\infty)$, для $y_0 \ge b$ выполняется неравенство $b(y_0+R) \le (b+R)y_0$. Следовательно, $\rho(b(y_0+R)) \le \rho((b+R)y_0)$, $y_0 \ge b$. Тогда для $y_0 > 0$ справедливо неравенство $\rho(b(y_0+R)) \le c_R\rho((b+R)y_0)$, $c_R > 1$. Таким образом,

$$|b_k| \le \tilde{c}R^{-k}\gamma(ax_0)\rho((b+R)y_0) = \tilde{c}R^{-k}((b+R)y_0)^k \inf_{\eta>0}(\eta^{-k}\rho(\eta)) \cdot \gamma(ax_0)$$
$$\le \tilde{c}(1+b/R)^k y_0^k \gamma(ax_0), \quad \tilde{c} = cc_R.$$

Аналогично рассматривается случай $y_0 < 0$. Если $y_0 = 0$ (т. е. $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$), то коэффициенты b_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяют неравенствам $|b_k| \le cb^k\rho_k\gamma(ax_0)$. Если учесть, что $\rho_k = \nu_k^{-k}\rho(\nu_k)$ (см. п. 1), то

$$|b_k| \le \tilde{c}\beta^k|y_0|^k\nu_k^{-k}\rho(\nu_k)\gamma(ax_0), \quad x_0 \ne 0,$$

где $\beta = 1 + b/R$ (если положить $R = b$, то $\beta = 2$).

Оценим $\rho(\nu_k)$. Поскольку $\rho(\nu_k) = \exp\left(\int_0^{\nu_k} \mu(\xi)\,d\xi\right)$, вследствие теоремы о среднем значении имеем

$$\forall k \ge 1\ \exists y_k \in (0, \nu_k) \quad \rho(\nu_k) = \exp(\nu_k\mu(y_k)).$$

Функция μ возрастающая и непрерывная на $[0, \infty)$, поэтому $\rho(\nu_k) \le \exp(\nu_k\mu(\nu_k)) = \exp(k+1)$. Следовательно,

$$|b_k| \le \tilde{c}_1(\beta e^k)|y_0|^k\nu_k^{-k}\gamma(ax_0), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{14}$$

В (12) положим $z = z_0$, в результате получим, что $\varphi(2z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z_0^k$. Поскольку $z_0 \in \mathbb{C}$ произвольное, имеем разложение $\varphi(2z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. С другой стороны, $\varphi(2z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\tilde{b}_k z^k$. Следовательно, $\tilde{b}_k = 2^{-k}b_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая (11), а также неравенства (14), найдем, что

$$|\psi_m(z)| \le \tilde{c}_1 \sum_{k=0}^{\infty} (\beta eL/2)^{k+m}\nu_{k+m}^{-(k+m)}|y|^{k+m}|z|^k\gamma(ax). \tag{15}$$

Поскольку $\nu_{k+m} \ge \nu_k$, $\nu_{k+m} \ge \nu_m$, то $\nu_{k+m}^{-(k+m)} \le \nu_k^{-k}\nu_m^{-m}$. Предположим, что $|x| \ge \Delta_1$, $|y| \ge \Delta_2$, где $\Delta_1 > 1$, $\Delta_2 > 1$ такие, что $1/\Delta_1 + 1/\Delta_2 \le 1$. Тогда $|x|^{-k} + |y|^{-k} \le 1$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. $|x|^k + |y|^k \le |x|^k|y|^k$. С учетом последнего неравенства имеем $|y|^{k+m}|z|^k \le (\sqrt{2})^k|x|^k|y|^{2k+m} \le (\sqrt{2})^k|x|^k|y|^{2(k+m)}$. Кроме того, воспользовавшись свойствами последовательности $\{\rho_p, p \in \mathbb{Z}_+\}$, а также формулой Стирлинга, придем к неравенству

$$m_{2(k+m)} = (2(k+m))!\rho_{2(k+m)} \le \sqrt{2\pi}e(4e)^{k+m}\left((k+m)/\nu_{k+m}^2\right)^{k+m}.$$

Последовательность $\{p/\nu_p^2, p \in \mathbb{N}\}$ монотонно стремится к нулю при $p \to +\infty$ (см. условие (A) в п. 1), а последовательность $\{\nu_p, p \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно возрастает, поэтому

$$\big((k+m)/\nu_{k+m}^2\big)^{k+m} \le \nu_1^{-2} 4^k \big(k/\nu_k^2\big)^k, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

$$|y|^{2(k+m)} = \frac{|y|^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}} m_{2(k+m)}. \tag{17}$$

Учитывая (15)–(17), придем к соотношениям

$$|\psi_m(z)| \le \omega_0 \tilde{c}_1 (2\beta e^2 L)^m \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k \left(\sup \frac{(B|y|)^{2(k+m)}}{m_{2(k+m)}}\right) |x|^k \gamma(ax)$$
$$= \omega_1 B_1^m \left(\frac{1}{\nu_m}\right)^m \rho(By) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_k}\right)^{3k} k^k |x|^k \gamma(ax),$$

где $B = \sqrt{2\sqrt{2}L\beta}e$, $B_1 = 2\beta e^2 L$. Воспользуемся тем, что $\gamma = 1/\rho = \exp\{-\ln\rho\}$. Функция $\ln\rho$ удовлетворяет неравенству выпуклости (см. п. 1):

$$\ln\rho(y_1) + \ln\rho(y_2) \le \ln\rho(y_1 + y_2) \quad \forall \{y_1, y_2\} \subset [0, +\infty).$$

Тогда

$$\gamma(ax) = e^{-\ln\rho(ax)} \le e^{-\ln\rho(\frac{a}{2}x)} \cdot e^{-\ln\rho(\frac{a}{2}x)} \le \gamma\left(\frac{a}{2}x\right)\gamma\left(\frac{a}{2}x\right), \quad x \ge 0.$$

С помощью методов дифференциального исчисления находим, что

$$\sup_{x \ge 0}\left(x^k \gamma\left(\frac{a}{2}x\right)\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^k \nu_k^k \gamma(\nu_k) \le \left(\frac{2}{a}\right)^k \nu_k^k \tag{18}$$

(здесь $\gamma(\nu_k) \le 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$). Из (18) вытекает неравенство

$$\nu_k^{-3k} k^k |x|^k \gamma(ax) \le (2/a)^k \big(k/\nu_k^2\big)^k \gamma(ax/2).$$

Отсюда и из признака Коши сходимости положительных рядов (при выполнении условия (A)) следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \nu_k^{-3k} k^k \sup\limits_{x \ge 0}\big(x^k \gamma\big(\frac{a}{2}x\big)\big)$. Таким образом, функция ψ_m удовлетворяет неравенству

$$|\psi_m(z)| \le \omega_2 K(m) \gamma(a_1 x) \rho(b_1 y), \quad \gamma = 1/\rho,\ z = x + iy,\ |x| \ge \Delta_1,\ |y| \ge \Delta_2,$$

где $b_1 = B$, $a_1 = a/2$, $K(m) = B_1^m \nu_m^{-m}$, постоянные ω_2, a_1, b_1, $B_1 > 0$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$. Аналогичное неравенство ψ_m удовлетворяет и в точке $z = x + iy$, где $|x| \le \Delta_1$, $|y| \le \Delta_2$. Таким образом, $\psi_m(z)$ — элемент пространства $S_{m_k}^{m_n}(\mathbb{C})$, т. е. $\psi_m(x) \in S_{m_k}^{m_n}$. Этим доказано, что оператор $D^m(F, \cdot)$ определен корректно на $S_{m_k}^{m_n}$ и отображает это пространство в себя.

Аналогично доказываем, что каждое ограниченное множество из $S_{m_k}^{m_n}$ оператор $D^m(F, \cdot)$ отображает в ограниченное множество этого же пространства.

Теорема доказана.

Замечание 2. Рассуждая аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 3, непосредственно убеждаемся в том, что в случае пространства $S_{l_k}^{m_n}$ при выполнении условия $\rho'/\rho = \tilde{\gamma}'/\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$, имеет место аналог теоремы 3.

Примером оператора $D^m(F,\cdot)$, действующего в пространстве $S^{m_n}_{m_k}$, может служить оператор обобщенного дифференцирования, построенный по целой функции

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\equiv 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{Q(1)Q(2)\dots Q(k)},$$

где Q — полином: $Q(x)=a_px^p+\dots+a_1x$, причем $Q(k)\neq 0$, $k\in\{1,2,\dots\}$ (если $Q(k)=k$, то $F(z)=e^z$). В этом случае [6, с. 75]

$$D^m(F,\varphi)=\sum_{k=m}^{mp}\frac{\Delta_k^{(m)}}{k!}z^{k-m}\varphi^{(k)}(z),$$

где коэффициенты $\Delta_k^{(m)}$ имеют специальный вид. Можно также показать, что коэффициенты a_k, $k\in\mathbb{N}$, удовлетворяют условию (11) с постоянной $L=\gamma L_0>1$, $\gamma=\max\{1,a_0p\cdot 2^p\}$, $L_0=e^{c_0}>1$, $c_0>0$.

5. Операторы обобщенного дифференцирования бесконечного порядка

Пусть $g(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mz^m$, $z\in\mathbb{C}$, — некоторая целая функция. Будем говорить, что в пространстве $S^{m_n}_{m_k}$ определен *оператор обобщенного дифференцирования бесконечного порядка* $g(D(F,\cdot))\equiv\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_mD^m(F,\cdot)$, если для любой основной функции $\varphi\in S^{m_n}_{m_k}$ ряд

$$g(D(F,\varphi))(x):=\sum_{m=0}^{\infty}c_mD^m(F,\varphi)(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

представляет собой функцию из пространства $S^{m_n}_{m_k}$.

Теорема 4. *Если целая функция g удовлетворяет условию*

$$\exists a,b,c,>0\,\forall z=x+iy\in\mathbb{C}\quad |g(z)|\le c\rho(ax)\rho(by),\tag{19}$$

то в пространстве $S^{m_n}_{m_k}$ определен оператор $A_g:=g(D(F,\cdot))$, непрерывно отображающий $S^{m_n}_{m_k}$ в $S^{m_n}_{m_k}$.

Доказательство. Пусть $\psi(x):=g(D(F,\varphi))(x)$, $\varphi\in S^{m_n}_{m_k}$. Поскольку $\big(\psi(x)\in S^{m_n}_{m_k}\big)\Leftrightarrow\big(\psi(z)\in S^{m_n}_{m_k}(\mathbb{C})\big)$, докажем, что $\psi(z)\in S^{m_n}_{m_k}(\mathbb{C})$. При доказательстве теоремы 3 установлено, что $D^m(F,\varphi)\in S^{m_n}_{m_k}$ (для каждого $m\in\mathbb{N}$), при этом имеет место неравенство

$$|D^m(F,\varphi)(z)|\le c_0\beta_1^m\nu_m^{-m}\gamma(a_1x)\rho(b_1y),\quad \gamma=1/\rho,\ z=x+iy\in\mathbb{C},\tag{20}$$

где постоянные c_0, β_1, a_1, $b_1>0$ не зависят от m. Коэффициенты ряда Тейлора c_m, $m\in\mathbb{Z}_+$, функции g вычисляются по формуле Коши

$$c_m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{g(z)}{z^{m+1}}dz,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

где Γ_R — окружность радиуса R с центром в точке $z_0=0$. Пусть $\tilde a=\max\{a,b\}$. Отсюда и из (20) вытекают соотношения

$$|c_m|\le c\inf_{R>0}(R^{-m}\rho^2(\tilde aR))\le c\inf_{R>0}(R^{-m}\rho(2\tilde aR))=c(2\tilde a)^m\inf_{R>0}(R^{-m}\rho(R))$$

(здесь мы воспользовались неравенством $\rho^2(\tilde{a}R) \leq \rho(2\tilde{a}R)$). Далее, как и при доказательстве теоремы 3, находим, что $|c_m| \leq c(2\tilde{a}e)^m \nu_m^{-m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. С учетом (20) имеем

$$|\psi(z)| \leq c \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2\tilde{a}e\beta_1}{\nu_m^2}\right)^m \gamma(a_1 x)\rho(b_1 y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Поскольку $\nu_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (2\tilde{a}e\beta_1)^m \nu_m^{-2m}$ сходится. Таким образом, $|\psi(z)| \leq \tilde{c}\gamma(a_1 x)\rho(b_1 y)$, $\gamma = 1/\rho$, $z \in \mathbb{C}$. Отсюда и из теоремы 2 получаем, что $\psi(x) \in S_{m_k}^{m_n}$, а оператор A_g отображает каждое ограниченное множество пространства $S_{m_k}^{m_n}$ в ограниченное множество этого же пространства.

Теорема доказана.

Например, функция $g(z) = e^{\alpha z}$, $z \in \mathbb{C}$, где $\alpha > 0$ — фиксированный параметр, удовлетворяет условию (19). Действительно,

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \quad |e^{\alpha z}| = |e^{\alpha(x+iy)}| = e^{\alpha x} \leq e^{\alpha|x|}.$$

Для любой выпуклой функции M при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $|x| \leq M(\varepsilon x) + M(\varepsilon y) + d$, $d = d(\varepsilon) > 0$. Поскольку $\ln\rho$ — выпуклая на $[0, \infty)$ и четная на $\mathbb{R}$ функция, для $\alpha \in (0, 1)$

$$|e^{\alpha z}| \leq e^{|x|} \leq ce^{\ln\rho(x)}e^{\ln\rho(y)} = c\rho(\varepsilon x)\rho(\varepsilon y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Если $\alpha \geq 1$, то $\alpha M(x) \leq M(\alpha x)$, $x \in [0, \infty)$. Следовательно,

$$|e^{\alpha z}| \leq e^{\alpha|x|} \leq ce^{\alpha\ln\rho(\varepsilon x) + 2\ln\rho(\varepsilon y)} \leq ce^{\ln\rho(\alpha\varepsilon x) + \ln\rho(\alpha\varepsilon y)}$$
$$= c\rho(\alpha\varepsilon x)\rho(\alpha\varepsilon y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Отсюда получаем, что для $e^{\alpha z}$ условие (19) выполняется, т. е. в пространстве $S_{m_k}^{m_n}$ определен и непрерывен оператор $e^{\alpha D(F,\cdot)} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha^m D^m(F,\cdot)/m!$, отображающий $S_{m_k}^{m_n}$ в себя. Если $B := D^p(F,\cdot)$, где $p \geq 2$ фиксировано, то аналогично предыдущему устанавливаем, что в $S_{m_k}^{m_n}$ определен и непрерывен оператор $e^{\alpha B} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha^m B^m/m!$, а также оператор $e^{tP(A)}$, где $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{p_0} \alpha_k D^k(F,\cdot)$, $t > 0$. Такие операторы возникают при исследовании задачи Коши для эволюционного уравнения вида $\partial u/\partial t = P(A)u$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, поскольку формальное решение такого уравнения имеет вид $ce^{tP(A)}\varphi$, $\varphi \in S_{m_k}^{m_n}$, $c = \text{const}$.

Полученные результаты позволят в дальнейшем развить теорию задачи Коши для эволюционных уравнений с операторами обобщенного дифференцирования в пространствах типа S, а также в пространствах, топологически сопряженных к ним.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Гуревич Б. Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99, № 6. С. 893–896.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

4. *Готинчан Т. І., Атаманюк Р. М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. Вип. 111. Математика. Чернівці: Рута, 2001. С. 21–26.

5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984.

6. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 29 мая 2012 г.

Городецкий Василий Васильевич, Мартынюк Ольга Васильевна
Черновицкий национальный университет, факультет прикладной математики,
кафедра алгебры и информатики,
ул. М. Коцюбинского, 2, Черновцы 58012, Украина
`alfaolga@rambler.ru`