Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.95

НОВЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ар. С. Терсенов

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле для сингулярных анизотропных эллиптических уравнений с нелинейным источником. Получены новые априорные оценки, показывающие, что разрешимость задачи Дирихле в классе ограниченных решений существенно зависит от размерности области, в которой она исследуется.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, задача Дирихле.

§ 1. Введение и основные результаты

Статья посвящена исследованию задачи Дирихле для анизотропного эллиптического уравнения вида

$$-\sum_{i=1}^{N}\mu_i(|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} = c(\mathbf{x})g(u) + f(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1.2}$$

где $\mu_i > 0$ и $p_i > 1$, $i = 1, \dots, N$. Без ограничения общности будем считать, что

$$\Omega \subset \{\mathbf{x} : -l_i \le x_i \le l_i,\ i = 1, \dots, N\}.$$

Относительно функции g предполагаем, что она удовлетворяет следующему условию:

$$g(0) = 0, \quad |g(\xi)| \le g(\eta) \quad \text{для любых } \xi, \eta \text{ таких, что } |\xi| \le \eta. \tag{1.3}$$

Например, функции $g(u) = \ln(|u|+1)$, $g(u) = |u|^{q-1}u$, $g(u) = |u|^q$ или $g(u) = e^u - 1$ удовлетворяют условию (1.3).

К настоящему времени можно отметить неуклонно возрастающий интерес к анизотропным эллиптическим уравнениям и большое количество работ, посвященных данной тематике. Проблемы, связанные с разрешимостью различных краевых задач, а также с исследованием качественных свойств этих решений, изучались в [1–32].

На протяжении всей статьи будем считать, что функция f не обращается в нуль тождественно в области Ω. Литература, посвященная исследованию анизотропных эллиптических уравнений при данных предположениях, не так обширна, как в случае, когда в правой части уравнения (1.1) функция f вообще отсутствует. Задача типа (1.1), (1.2) с функцией f, не обращающейся в нуль тождественно, а также ее параболические аналоги исследованы в работах [3–8, 11–13, 23, 24, 29–33].

В [30] в несингулярном случае $p_i \geq 2$, $i = 1, \dots, N$ (сингулярный случай см. в [29]), уравнение (1.1) аппроксимируется последовательностью неравномерно эллиптических невырождающихся уравнений. На основе априорных оценок решения и градиента решения регуляризованной задачи и последующего перехода к пределу получены достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2) в классе $W^{1,\infty}$. Одним из ключевых условий в [30] является существование положительной постоянной M такой, что выполнено следующее неравенство:

$$(c_0 g(M) + f_0) \left(\frac{3l^2 + 2l}{2}\right)^{p-1} < \mu(p-1)M^{p-1}. \tag{1.4}$$

Здесь $p = p_{i_0} = \max\{p_1, \dots, p_N\}$, $\mu = \mu_{i_0}$, $l = l_{i_0}$, $c_0 = \|c(\mathbf{x})\|_{L^\infty}$ и $f_0 = \|f(\mathbf{x})\|_{L^\infty}$. Если такая постоянная существует, то для любого решения $u \in W^{1,\infty}$ задачи (1.1), (1.2) имеем $\|u\|_{L^\infty} \leq M_0$, где $M_0 = \inf\{M : M$ удовлетворяет $(1.4)\}$.

Заметим, что если $c(x) \leq 0$ и $g(u)$ — неубывающая функция, то из доказательства леммы 1 в [30] вытекает, что (1.4) может быть заменено следующим условием:

$$f_0 < \left(\frac{3l^2 + 2l}{2}\right)^{1-p} \mu(p-1)M^{p-1}. \tag{1.5}$$

Таким образом, задача (1.1), (1.2) в этом случае имеет решение из класса $W^{1,\infty}$ для произвольной функции $f(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$. Отметим также некоторые другие случаи, в которых имеется аналогичная разрешимость. Например, если $g(u) = |u|^{q-1}u$ или $g(u) = |u|^q$ и $p - 1 > q$, то для произвольной функции $f(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$ существует положительная постоянная M, которая удовлетворяет условию (1.4). Как следствие получаем существование обобщенного решения из класса $u \in W^{1,\infty}$ (см. теорему 1 в [30]). Если же $q \geq p - 1$, то существование такой постоянной M зависит от соотношений между параметрами задачи, т. е. от того, как соотносятся друг с другом значения постоянных p_i, l_i, μ_i, $i = 1, \dots, N$, c_0, f_0, и также от поведения функции g. Таким образом, при определенных условиях на гладкость коэффициентов и на форму области из существования положительной постоянной M, удовлетворяющей (1.4), вытекает разрешимость задачи (1.1), (1.2) в классе ограниченных функций.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы показать, что в сингулярном случае, т. е. в случае, когда в уравнении присутствуют члены с $p_i < 2$, размерность играет существенную роль в существовании постоянной M, а следовательно, и в существовании слабого ограниченного решения задачи (1.1), (1.2).

Без ограничения общности будем считать, что $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_K < 2 \leq p_{K+1} \leq \dots \leq p_N$, где $1 \leq K \leq N$ — некоторое фиксированное натуральное число. Положим

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{K} \mu_i(p_i - 1)(2l_i + \delta)^{p_i - 2}\right]^{1/K}}{\left[\frac{3l_N^2}{2} + l_N + \frac{1}{K}\sum\limits_{i=1}^{K}\left(\frac{3l_i^2}{2} + \delta l_i\right)\right]^{\bar{p}_\sigma - 1}}, \\ B(\delta) &= \frac{\mu_N(p_N - 1)}{\left[\frac{3l_N^2}{2} + l_N + \frac{1}{K}\sum\limits_{i=1}^{K}\left(\frac{3l_i^2}{2} + \delta l_i\right)\right]^{p_N - 1}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\bar{p}_\sigma = \frac{1}{K}\sum\limits_{i=1}^{K} p_i$, δ — фиксированная положительная постоянная. В случае, когда $K = N$, будем считать, что

$$A(\delta) = \frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{N} \mu_i(p_i-1)(2l_i+\delta)^{p_i-2}\right]^{1/N}}{\left[\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{3l_i^2}{2}+\delta l_i\right)\right]^{\bar{p}_\sigma-1}}, \quad B(\delta) = 0.$$

Для того чтобы исключить случаи, когда задача (1.1), (1.2) разрешима в указанном классе для произвольной $f(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$ (согласно (1.4)), предположим, что $|g(u)| > C|u|^{p_N-1}$ при $|u| \geq u_0$, где u_0 — некоторая положительная константа, а $C = \frac{B(0)}{c_0}$. В случае, когда $g(u)$ является неубывающей функцией, будем дополнительно предполагать, что либо $c(\mathbf{x}) \geq 0$, либо $c(\mathbf{x})$ не имеет определенного знака.

Введем в рассмотрение функцию

$$F(M,\delta) \equiv \frac{1}{A(\delta)}(c_0 g(M) M^{1-\bar{p}_\sigma} - B(\delta) M^{p_N-\bar{p}_\sigma} + f_0 M^{1-\bar{p}_\sigma}).$$

Из (1.6) легко видеть, что функция $F(M,\delta)$ является возрастающей функцией относительно δ. Обозначим через M_0 точку, в которой функция $F(M,0)$ достигает своего минимума (существование положительного минимума у функции $F(M,0)$ будет показано ниже). Предположим теперь, что

$$F(M_0,0) < K^{2-\bar{p}_\sigma}. \tag{1.7}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{F} = \{M \in (0,\infty) : F(M,0) < K^{2-\bar{p}_\sigma}\}, \quad M_* = \inf \mathfrak{F}, \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{F}_\delta = \{M \in (0,\infty) : F(M,\delta) < K^{2-\bar{p}_\sigma}\}, \quad M_\delta = \inf \mathfrak{F}_\delta. \tag{1.9}$$

Определение. Будем говорить, что функция $u(\mathbf{x})$ является *обобщенным решением задачи* (0.1), (0.2), если $u(\mathbf{x}) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ и

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \mu_i |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \phi_{x_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega (c(\mathbf{x}) g(u) + f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \forall \phi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p_N}(\Omega).$$

Предположим, что область, в которой исследуется задача (1.1), (1.2), удовлетворяет условию

(A) область Ω строго выпукла и части границы $\partial\Omega \in C^2$, лежащие в полупространствах $x_i \leq 0$ и $x_i \geq 0$, $i = 1,\dots,N$, могут быть представлены в виде

$$x_i = F_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N) \quad \text{и} \quad x_i = G_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_N)$$

соответственно, где функции F_i и G_i не зависят от переменной x_i.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема 1.1. *Предположим, что $c(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$, $f(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega)$, $g(u)$ — непрерывная по Гёльдеру функция на промежутке $[-M_*, M_*]$ и выполнены* *условия* (1.3), (1.7), (A). *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *такое, что*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \le M_* \quad \textit{и} \quad \|u_{x_i}\|_{L_\infty(\Omega)} \le (1+2l_i)\left(\frac{\Phi_0}{\mu_i(p_i-1)}\right)^{\frac{1}{p_i-1}}, \quad i=1,\ldots,N,$$

где

$$\Phi_0 = c_0 g(M_*) + f_0.$$

Доказательство теоремы 1.1 базируется на априорной оценке решения регуляризованной задачи (см. лемму 2.2) и градиента решения регуляризованной задачи (см. леммы 2, 3 в [30]) с последующим предельным переходом, описанным в теореме 1 из [30].

Замечание 1.1 (О влиянии размерности на разрешимость задачи (1.1), (1.2)). Из условия (1.7) и определения функции $F(M,\delta)$ следует, что для произвольного фиксированного $f_0 = \|f(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)}$ можно подобрать параметры задачи таким образом, чтобы (1.7) выполнялось. В частности, так будет, если потребовать малость области Ω или малость c_0. Покажем, что выполнение условия (1.7), а следовательно, и разрешимость можно получать также и за счет размерности задачи. Пусть $l_- \le l_i \le l_+$, $\mu_- \le \mu_i \le \mu_+$, $p_- \le p_i \le p_+$ $(p_N = p_+)$, $i=1,\ldots,N$. Тогда легко видеть, что имеют место неравенства

$$A_0 \equiv \frac{\mu_-(p_- - 1)}{(2l_+)^{2-\bar p_\sigma}\left(3l_+^2 + l_+\right)^{\bar p_\sigma - 1}} \le A(0) \le \frac{\mu_+(p_+ - 1)}{(2l_-)^{2-\bar p_\sigma}\left(3l_-^2 + l_-\right)^{\bar p_\sigma - 1}} \equiv A_1,$$

$$B_0 \equiv \frac{\mu_-(p_- - 1)}{\left(3l_+^2 + l_+\right)^{p_+ - 1}} \le B(0) \le \frac{\mu_+(p_+ - 1)}{\left(3l_-^2 + l_-\right)^{p_+ - 1}} \equiv B_1.$$

Из этих неравенств вытекает, что постоянные A_0, A_1, B_0, B_1 не зависят явно от размерности задачи. Зафиксируем теперь c_0, A_0, A_1, B_0, B_1 и предположим, что $A_0 \le A(0) \le A_1$, $B_0 \le B(0) \le B_1$. Тогда для произвольного фиксированного $f_0 = \|f(\mathbf{x})\|_{L^\infty(\Omega)}$ можно определить такое $K = K(A(0), B(0), \bar p_\sigma, p_N, c_0)$, что неравенство (1.7) будет выполняться. Таким образом, в сингулярном случае при указанных выше предположениях условие (1.7) определяет число показателей $1 < p_i < 2$ (и как следствие размерность), которое гарантирует существование ограниченного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2). Проиллюстрируем это на нижеследующих примерах.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i=1}^{N}(|u_{x_i}|^{-\frac{1}{2}}u_{x_i})_{x_i} = u + f_0 \quad \text{в } \Omega. \tag{1.10}$$

Здесь $\mu_i = 1$, $p_i = \frac{3}{2}$, $i=1,\ldots,N$, $\bar p_\sigma = \frac{3}{2}$, $q=1$. Пусть $l_i = l$, $i=1,\ldots,N$. Выберем l таким, чтобы $A(0)=2$. Из (1.6) следует, что $A(0)=2$ при $l = \frac{1}{2\sqrt[3]{6}}$. Так как все члены сингулярны, то $B=0$, и функция $F(M,0)$ примет вид

$$F(M,0) = \frac{1}{2}(M^{\frac{1}{2}} + f_0 M^{-\frac{1}{2}}).$$

Легко получить, что минимальное значение функция $F(M,0)$ принимает в точке $M_0 = f_0$ и, следовательно, $F(M_0,0) = f_0^{\frac{1}{2}}$. Из условия (1.7) вытекает, что задача Дирихле для уравнения (1.10) разрешима при условии, что $f_0 < N$.

Таким образом, для произвольных значений f_0 если выбрать $N > f_0$, то существует обобщенное решение $u(x) \in W^{1,\infty}$ задачи Дирихле для уравнения (1.10). Постоянная M_* является меньшим из двух корней многочлена

$$M^2 + (2f_0 - 4N)M + f_0^2,$$

следовательно, для решения имеет место оценка

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2N - f_0 - 2\sqrt{N(N - f_0)}.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i=1}^{N-1} \mu_i(|u_{x_i}|^{-\frac{1}{2}} u_{x_i})_{x_i} + \mu_N(|u_{x_N}| u_{x_N})_{x_N} = c_0 u^4 + f_0 \quad \text{в } \Omega. \tag{1.11}$$

Здесь $p_i = \frac{3}{2}$, $i = 1, \dots, N-1$, $p_N = 3$, $\bar{p}_\sigma = \frac{3}{2}$, $q = 4$, $c_0 > 0$. Вычислив для заданной области Ω коэффициенты $A(0)$ и $B(0)$, получим, что функция $F(M, 0)$ в этом случае принимает вид

$$F(M, 0) = \frac{1}{A(0)}(c_0 M^{\frac{7}{2}} - B(0) M^{\frac{3}{2}} + f_0 M^{-\frac{1}{2}}).$$

После несложных вычислений получаем, что нахождение точки минимума функции $F(M, 0)$ сводится к вычислению корней многочлена четвертого порядка вида

$$7c_0 M^4 - 3B(0) M^2 - f_0.$$

Отсюда легко получаем, что минимальное значение функция $F(M, 0)$ достигает в точке

$$M_0 = \sqrt{\frac{3B(0) + \sqrt{9B^2(0) + 28c_0 f_0}}{14c_0}}.$$

Из условия (1.7) вытекает, что задача Дирихле для уравнения (1.11) разрешима, если $F(M_0, 0) < \sqrt{N-1}$. Если $F(M_0, 0) < 1$, то задача Дирихле имеет решение для любой размерности. Очевидно, что при достаточно больших f_0 имеем $F(M_0, 0) \geq 1$. Следовательно, для произвольных (достаточно больших) значений f_0 если выбрать $N > F^2(M_0, 0) + 1$, то существует обобщенное решение $u(x) \in W^{1,\infty}$ задачи Дирихле для уравнения (1.11). Постоянная M_* определяется как минимум из решений уравнения

$$c_0 M^4 - B(0) M^2 - A(0)\sqrt{N-1}\sqrt{M} + f_0 = 0.$$

§ 2. Априорная оценка решения регуляризованной задачи

Как говорилось выше, доказательство теоремы 1.1 базируется на априорной оценке решения задачи Дирихле для следующей регуляризации исходного уравнения (1.1):

$$-\sum_{i=1}^{N} \mu_i \Big(\big(u_{x_i}^\alpha + \varepsilon\big)^{\frac{p_i - 2}{\alpha}} u_{x_i} \Big)_{x_i} = c_\varepsilon(\mathbf{x}) g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{2.1}$$

Здесь постоянная $\alpha \in (0,1)$ такова, что $\big(u_{x_i}^\alpha\big)^{\frac{p_i-2}{\alpha}} = |u_{x_i}|^{p_i - 2}$, $\varepsilon > 0$, $c_\varepsilon(\mathbf{x})$, $f_\varepsilon(\mathbf{x})$ принадлежат пространству непрерывных по Гёльдеру функций таких, что

$$c_\varepsilon(\mathbf{x}) \to c(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad f_\varepsilon(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}) \text{ в норме } L_\infty \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где без ограничения общности предполагаем, что

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}|c_\varepsilon(x)| = c_0, \quad \max_{x\in\overline{\Omega}}|f_\varepsilon(x)| = f_0,$$

и, наконец,

$$g_M(z) = \begin{cases} g(z) & \text{для } |z| \le M, \\ g(M) & \text{для } z > M, \\ g(-M) & \text{для } z < -M. \end{cases} \tag{2.2}$$

В этой априорной оценке, по сути, заключается новизна полученного в данной статье результата.

Рассмотрим регуляризованную задачу (2.1), (1.2). Перепишем уравнение (2.1) в недивергентном виде

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})u_{x_ix_i} = c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{2.3}$$

где $a_{i\varepsilon}(z) = \mu_i(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p_i-2}{\alpha}-1}((p_i-1)z^\alpha+\varepsilon)$. Для начала покажем, что коэффициенты $a_{i\varepsilon}(z)$, $i=1,\dots,N$, являются неубывающими функциями по параметру ε. Положим $\alpha_0 = \max\limits_{1<p_i<2}(p_i-1)$.

Лемма 2.1. *Для произвольных $z \ne 0$ существует число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha,\alpha_0,z)$ такое, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$ коэффициенты $a_{i\varepsilon}(z)$, $i=1,\dots,N$, являются неубывающими функциями по параметру ε.*

Доказательство. Дифференцируя функции $a_{i\varepsilon}(z)$, $i=1,\dots,N$, по параметру ε, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}a_{i\varepsilon}(z) &= \mu_i\left(\frac{p_i-2}{\alpha}-1\right)(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p_i-2}{\alpha}-2}((p_i-1)z^\alpha+\varepsilon) + \mu_i(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p_i-2}{\alpha}-1} \\ &= \mu_i(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p_i-2}{\alpha}-2}\left[\left(\frac{p_i-2}{\alpha}-1\right)((p_i-1)z^\alpha+\varepsilon) + z^\alpha+\varepsilon\right].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Приведем подобные члены в (2.4):

$$\frac{d}{d\varepsilon}a_{i\varepsilon}(z) = \frac{\mu_i}{\alpha}(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p_i-2}{\alpha}-2}\big[(p_i^2 - p_i(3+\alpha) + 2 + 2\alpha)z^\alpha + (p_i-2)\varepsilon\big]. \tag{2.5}$$

В силу указанного выбора постоянной α имеем $z^\alpha > 0$. Остается показать, что

$$\big(p_i^2 - p_i(\alpha+3) + 2 + 2\alpha\big)z^\alpha + (p_i-2)\varepsilon \ge 0. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что

$$P(p_i) \equiv p_i^2 - p_i(\alpha+3) + 2 + 2\alpha \ge 0 \quad \text{при } p_i \in (1, 1+\alpha] \cup [2, +\infty).$$

Более того, $P(2) = 0$, $P(1+\alpha) = 0$, $P > 0$ при $p_i \in (1, 1+\alpha) \cup (2, +\infty)$. Следовательно, если $p_i \ge 2$, то, очевидно, (2.6) выполняется. Если же $1 < p_i < 2$, то выбираем $\alpha > \alpha_0 = \max\limits_{1<p_i<2}(p_i-1)$ так, чтобы $p_i \in (1, 1+\alpha)$. Перепишем неравенство (2.6) в виде

$$(p_i-2)(p_i-1-\alpha)z^\alpha + (p_i-2)\varepsilon \ge 0. \tag{2.7}$$

В силу того, что $z^\alpha > 0$ и $p_i \in (1, 1+\alpha) \cup (2, +\infty)$, для всех $\varepsilon \le \varepsilon_{0i} = (1+\alpha-p_i)z^\alpha$ неравенство (2.6) выполняется также и в случае $1 < p_i < 2$. Таким образом, функции $a_{i\varepsilon}(z)$, $i=1,\dots,N$, неубывающие по ε для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0 = (1+\alpha-\alpha_0)z^{\alpha}$ при $p_i > 1$, $i=1,\dots,N$. Лемма 2.1 доказана. $\square$

Как говорилось выше, без ограничения общности будем считать, что $1 < p_1 \le p_2 \le \dots \le p_K < 2 \le p_{K+1} \le \dots \le p_N$, где $1 \le K \le N$ — фиксированное натуральное число. Введем в рассмотрение функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $r(\mathbf{x})$, которые определим следующим образом:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\widetilde{M}\left(\frac{l_i^2 - x_i^2}{2} + (\delta + l_i)(l_i + x_i)\right), \tag{2.8}$$

$$r(\mathbf{x}) = \widetilde{M}\left(\frac{l_N^2 - x_N^2}{2} + (1 + l_N)(l_N + x_N)\right), \tag{2.9}$$

где

$$\widetilde{M} = \frac{M}{\frac{3}{2}l_N^2 + l_N + \frac{1}{K}\sum\limits_{i=1}^{K}\left(\frac{3}{2}l_i^2 + \delta l_i\right)}. \tag{2.10}$$

Если $K = N$, то полагаем

$$r(\mathbf{x}) = 0, \quad \widetilde{M} = \frac{M}{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{3}{2}l_i^2 + \delta l_i\right)}.$$

Нетрудно установить следующие свойства функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $r(\mathbf{x})$:

$$\sigma(\mathbf{x}) \ge 0, \quad r(\mathbf{x}) \ge 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\widetilde{M}}{K}\delta \le \sigma_{x_i} = \frac{\widetilde{M}}{K}(-x_i + \delta + l_i) \le \frac{\widetilde{M}}{K}(2l_i + \delta), \quad i = 1,\dots,K, \tag{2.12}$$

$$(\sigma_{x_i})^{p_i-2} \ge \left(\frac{\widetilde{M}}{K}\right)^{p_i-2}(2l_i + \delta)^{p_i-2}, \quad \sigma_{x_i x_i} = -\frac{\widetilde{M}}{K}, \quad i = 1,\dots,K, \tag{2.13}$$

$$r_{x_N} = \widetilde{M}(-x_N + 1 + l_N) \ge \widetilde{M}, \quad (r_{x_N})^{p_N-1} \ge \widetilde{M}^{p_N-1}, \quad r_{x_N x_N} = -\widetilde{M}. \tag{2.14}$$

Перейдем теперь к доказательству априорной оценки регуляризованной задачи.

Лемма 2.2. *Предположим, что условия* (1.3), (1.7) *выполнены. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \le \varepsilon_0 = (1 + \alpha - \alpha_0)\left(\frac{\widetilde{M}}{K}\delta_0\right)^{\alpha}$ для любого классического решения задачи* (2.1), (1.2) *имеет место следующая оценка:*

$$|u(\mathbf{x})| \le M_{\delta_0}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Введем оператор

$$Lu \equiv -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})u_{x_i x_i}.$$

Тогда (2.3) примет вид

$$L(u) = c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{2.16}$$

Положим $H(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$. Из леммы 2.1 и формул (2.13), (2.14) вытекает, что

$$- a_{i\varepsilon}(H_{x_i})H_{x_ix_i} = \mu_i\big(H_{x_i}^{\alpha} + \varepsilon\big)^{\frac{p_i-2}{\alpha}-1}\big((p_i-1)H_{x_i}^{\alpha} + \varepsilon\big)|H_{x_ix_i}|$$
$$\geq \mu_i(p_i-1)|H_{x_i}|^{p_i-2}\|H_{x_ix_i}|, \quad i = 1,\dots,N. \quad (2.17)$$

Действительно, в силу условий (2.12), (2.14) функции $a_{i\varepsilon}(H_{x_i}(\mathbf{x}))$, $i = 1,\dots,N$, удовлетворяют условиям леммы 2.1 для любых $\widetilde{M}$, $\delta > 0$, если выбрать $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = (1+\alpha-\alpha_0)\big(\frac{\widetilde{M}}{K}\delta\big)^{\alpha}$. Используя свойства (2.11)–(2.14), получаем

$$-a_{i\varepsilon}(H_{x_i})H_{x_ix_i} = -a_{i\varepsilon}(\sigma_{x_i})\sigma_{x_ix_i} \geq \mu_i(p_i-1)(2l_i+\delta)^{p_i-2}\left(\frac{\widetilde{M}}{K}\right)^{p_i-1}, \ i = 1,\dots,K, \quad (2.18)$$

$$-a_{i\varepsilon}(H_{x_i})H_{x_ix_i} = 0, \quad i = K+1,\dots,N-1, \quad (2.19)$$

$$-a_{i\varepsilon}(H_{x_N})H_{x_Nx_N} = -a_{i\varepsilon}(r_{x_N})r_{x_Nx_N} \geq \mu_N(p_N-1)\widetilde{M}^{p_N-1}. \quad (2.20)$$

Из (2.18) следует, что

$$-\sum_{i=1}^{K} a_{i\varepsilon}(H_{x_i})H_{x_ix_i} = -\sum_{i=1}^{K} a_{i\varepsilon}(\sigma_{x_i})\sigma_{x_ix_i} \geq \sum_{i=1}^{K}\mu_i(p_i-1)(2l_i+\delta)^{p_i-2}\left(\frac{\widetilde{M}}{K}\right)^{p_i-1}$$
$$\geq K\left(\prod_{i=1}^{K}\mu_i(p_i-1)(2l_i+\delta)^{p_i-2}\left(\frac{\widetilde{M}}{K}\right)^{p_i-1}\right)^{\frac{1}{K}}$$
$$\geq K\left(\prod_{i=1}^{K}\mu_i(p_i-1)(2l_i+\delta)^{p_i-2}\right)^{\frac{1}{K}}\frac{\widetilde{M}^{\frac{\sum_{i=1}^{K}p_i-K}{K}}}{K^{\frac{\sum_{i=1}^{K}p_i-K}{K}}}$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{K}\mu_i(p_i-1)(2l_i+\delta)^{p_i-2}\right)^{\frac{1}{K}} K^{2-\bar{p}_\sigma}\widetilde{M}^{\bar{p}_\sigma-1}, \quad \bar{p}_\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{K}p_i}{K}. \quad (2.21)$$

Принимая во внимание соотношения (2.18)–(2.21) и обозначения (1.6), (2.10), заключаем, что

$$L(H) = -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(H_{x_i})H_{x_ix_i} \geq A(\delta)K^{2-\bar{p}_\sigma}M^{\bar{p}_\sigma-1} + B(\delta)M^{p_N-1}. \quad (2.22)$$

Рассмотрим функцию $v(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x})$. Очевидно,

$$L(u) - L(H) = -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})u_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(H_{x_i})H_{x_ix_i}$$
$$= -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})v_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{N}(a_{i\varepsilon}(H_{x_i}) - a_{i\varepsilon}(u_{x_i}))H_{x_ix_i}.$$

С другой стороны, в силу (2.16), (2.22)

$$L(u) - L(H) = c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) - L(H)$$
$$\leq c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) - A(\delta)K^{2-\bar{p}_\sigma}M^{\bar{p}_\sigma-1} - B(\delta)M^{p_N-1}.$$

Следовательно,

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})v_{x_ix_i} \le \sum_{i=1}^{N} \left(a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) - a_{i\varepsilon}(H_{x_i})\right) H_{x_ix_i} + c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) - A(\delta)K^{2-\bar p_\sigma}M^{\bar p_\sigma - 1} - B(\delta)M^{p_N-1}. \quad (2.23)$$

Предположим, что в точке $X \in \Omega$ функция $v(\mathbf{x})$ достигает своего положительного максимума. Тогда в этой точке имеем

$$v > 0, \quad u > H \ge 0, \quad v_{x_i} = 0, \quad v_{x_ix_i} \le 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Из последних двух соотношений вытекает, что

$$u_{x_i} = H_{x_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^{N}(a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) - a_{i\varepsilon}(H_{x_i}))H_{x_ix_i} = 0.$$

Более того,

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})v_{x_ix_i}|_X \ge 0.$$

С другой стороны,

$$-\sum_{i=1}^{n} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})v_{x_ix_i}|_X \le c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) - A(\delta)K^{2-\bar p_\sigma}M^{\bar p_\sigma-1} - B(\delta)M^{p_N-1}|_X \le c_0 g(M) + f_0 - A(\delta)K^{2-\bar p_\sigma}M^{\bar p_\sigma-1} - B(\delta)M^{p_N-1}. \quad (2.24)$$

Здесь используется тот факт, что для положительных u имеем $0 < g_M(u) \le g(M)$. Рассмотрим последний член в выражении (2.24). Для того чтобы получить желаемое противоречие, покажем, что имеет место следующее неравенство:

$$c_0 g(M) + f_0 - A(\delta)K^{2-\bar p_\sigma}M^{\bar p_\sigma-1} - B(\delta)M^{p_N-1} < 0. \quad (2.25)$$

Запишем (2.25) в виде

$$\frac{1}{A(\delta)}(c_0 g(M)M^{1-\bar p_\sigma} - B(\delta)M^{p_N-\bar p_\sigma} + f_0 M^{1-\bar p_\sigma}) < K^{2-\bar p_\sigma}. \quad (2.26)$$

Положим

$$F(M,\delta) \equiv \frac{1}{A(\delta)}(c_0 g(M)M^{1-\bar p_\sigma} - B(\delta)M^{p_N-\bar p_\sigma} + f_0 M^{1-\bar p_\sigma}).$$

В силу предположения о том, что функция $g(u)$ удовлетворяет неравенству вида $|g(u)| > C|u|^{p_N-1}$ при $|u| \ge u_0$, где u_0 — некоторая положительная константа, а $C = \frac{B(\delta)}{c_0}$, вытекает, что

$$\lim_{M\to 0} F(M,\delta) = \lim_{M\to\infty} F(M,\delta) = \infty \quad \text{для любого } \delta \ge 0,$$

следовательно, для каждого фиксированного $\delta \ge 0$ функция $F(M,\delta)$ достигает своего минимума на интервале $(0,\infty)$. Обозначим через M_0 точку, в которой достигает своего минимума функция $F(M,0)$. Заметим, что $F(M,\delta)$ является возрастающей по δ функцией и, следовательно, $F(M_0,0) \le F(M,0) < F(M,\delta)$

для всех $\delta > 0$. В силу непрерывности функции $F(M,\delta)$ если $F(M_0, 0) < K^{2-\bar{p}_\sigma}$, то существует такое δ_0, что имеет место следующее неравенство:

$$F(M_0, 0) < F(M_0, \delta_0) < K^{2-\bar{p}_\sigma}. \tag{2.27}$$

Таким образом, из соотношений (1.7), (2.24)–(2.27) при $\delta = \delta_0$ и всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$ вытекает, что

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) v_{x_i x_i}|_X < 0.$$

Это противоречит предположению о том, что функция $v(\mathbf{x})$ достигает положительного максимума в точке X. В силу однородных краевых условий на границе $\partial\Omega$ имеем $v = -H \le 0$. Учитывая тот факт, что $v(\mathbf{x})$ не может достигать положительного максимума внутри области Ω, заключаем, что

$$v(\mathbf{x}) \le 0 \quad \text{или } u(\mathbf{x}) \le H(\mathbf{x}) \text{ в } \overline{\Omega}.$$

Получим теперь оценку снизу. Рассмотрим функцию $w(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} L(u) + L(H) &= -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) u_{x_i x_i} - \sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(H_{x_i}) H_{x_i x_i} \\ &= -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) w_{x_i x_i} - \sum_{i=1}^{N} \left(a_{i\varepsilon}(H_{x_i}) - a_{i\varepsilon}(u_{x_i})\right) H_{x_i x_i}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} L(u) + L(H) &= c_\varepsilon(\mathbf{x}) g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) + L(H) \\ &\ge c_\varepsilon(\mathbf{x}) g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) + A(\delta) K^{2-\bar{p}_\sigma} M^{\bar{p}_\sigma - 1} + B(\delta) M^{p_N - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) w_{x_i x_i} &\ge \sum_{i=1}^{N} (a_{i\varepsilon}(H_{x_i}) - a_{i\varepsilon}(u_{x_i})) H_{x_i x_i} \\ &\quad + c_\varepsilon(\mathbf{x}) g_M(u) + f_\varepsilon(\mathbf{x}) + A(\delta) K^{2-\bar{p}_\sigma} M^{\bar{p}_\sigma - 1} + B(\delta) M^{p_N - 1}. \end{aligned}$$

Предположим, что в некоторой точке $X_1 \in \Omega$ функция $w(\mathbf{x})$ достигает отрицательного минимума. Тогда в этой точке

$$w < 0, \quad u < -H \le 0, \quad w_{x_i} = 0, \quad w_{x_i x_i} \ge 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.28}$$

В силу выбора постоянной α коэффициенты $a_{i\varepsilon}(z)$ удовлетворяют равенствам $a_{i\varepsilon}(z) = a_{i\varepsilon}(-z)$, $i = 1, \dots, N$. Из последних двух соотношений в (2.28) вытекает, что в точке X_1 выполняются следующие равенства:

$$u_{x_i} = -H_{x_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^{N} \left(a_{i\varepsilon}(H_{x_i}) - a_{i\varepsilon}(u_{x_i})\right) H_{x_i x_i} = 0. \tag{2.29}$$

Более того,

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i}) v_{x_i x_i}|_{X_1} \le 0.$$

В то же время легко видеть, что в силу (2.29)

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})w_{x_ix_i}|_{X_1} \geq c_\varepsilon(\mathbf{x})g_M(u)+f_\varepsilon(\mathbf{x})+A(\delta)K^{2-\bar{p}_\sigma}M^{\bar{p}_\sigma-1}+B(\delta)M^{p_N-1}|_{X_1}$$
$$\geq -c_0g(M)-f_0+A(\delta)K^{2-\bar{p}_\sigma}M^{\bar{p}_\sigma-1}+B(\delta)M^{p_N-1}. \quad (2.30)$$

Здесь использовано неравенство $c_\varepsilon(X_1)g_M(u(X_1)) \geq -c_0g(M)$. Если $c_\varepsilon(X_1) \geq 0$, то последнее неравенство вытекает из того, что $g_M(u) \geq -g(M)$. Если же $c_\varepsilon(X_1) < 0$, то это неравенство есть следствие того факта, что $g_M(u) \leq g(M)$. Стало быть, из (1.7), (2.27), (2.30) получаем, что при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i\varepsilon}(u_{x_i})w_{x_ix_i}|_{X_1} > 0.$$

Это противоречит предположению о том, что функция $v(\mathbf{x})$ достигает отрицательного минимума в точке X_1.

В силу однородности краевых условий на границе $\partial\Omega$ имеем $w = H \geq 0$. Учитывая тот факт, что $w(\mathbf{x})$ не может иметь отрицательный минимум внутри области Ω, заключаем, что

$$w(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ или } u(\mathbf{x}) \geq -H(\mathbf{x}) \text{ в } \overline{\Omega}.$$

Следовательно,

$$-H(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}) \leq H(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

Используя функцию $\widetilde{H}(\mathbf{x}) \equiv H(-\mathbf{x})$ вместо $H(\mathbf{x})$, можно показать, что также имеет место оценка

$$-\widetilde{H}(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{x}) \leq \widetilde{H}(\mathbf{x}). \quad (2.32)$$

Эта оценка с небольшими изменениями, которые сейчас отметим, может быть получена аналогично тому, как была получена оценка (2.31). Рассмотрим функцию

$$\widetilde{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\widetilde{M}\left(\frac{l_i^2-x_i^2}{2}+(\delta+l_i)(l_i-x_i)\right)$$
$$+\widetilde{M}\left(\frac{l_N^2-x_N^2}{2}+(1+l_N)(l_N-x_N)\right).$$

Легко показать, что $\widetilde{H}_{x_ix_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\widetilde{M}}{K}$, $i = 1,\ldots,K$, $\widetilde{H}_{x_ix_i}(\mathbf{x}) = 0$, $i = K+1,\ldots,N-1$, $\widetilde{H}_{x_Nx_N}(\mathbf{x}) = -\widetilde{M}$, а также

$$-(2l_i+\delta)\frac{\widetilde{M}}{K} \leq \widetilde{H}_{x_i}(\mathbf{x}) \leq -\delta\frac{\widetilde{M}}{K},\ i=1,\ldots,K, \quad \widetilde{H}_{x_N}(\mathbf{x}) \leq -\frac{\widetilde{M}}{K}.$$

В силу выбора постоянной α заключаем, что

$$(\delta)^\alpha\left(\frac{\widetilde{M}}{K}\right)^\alpha \leq \widetilde{H}^\alpha_{x_i}(\mathbf{x}) \leq (2l_i+\delta)^\alpha\left(\frac{\widetilde{M}}{K}\right)^\alpha, \quad \widetilde{H}^\alpha_{x_N} \geq (\widetilde{M})^\alpha.$$

Из леммы 2.1 легко получить оценки, подобные оценкам (2.18)–(2.20). Используя (2.27), (2.31) и (2.32) приходим к оценке

$$|u(\mathbf{x})| \leq H(0) = \widetilde{H}(0) = \left[\frac{3l_N^2}{2}+l_N+\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{3l_i^2}{2}+\delta_0 l_i\right)\right]\widetilde{M} = M_0, \quad (2.33)$$

$$|u(\mathbf{x})| \le \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{3l_i^2}{2} + \delta_0 l_i\right)\right]\widetilde{M} = M_0 \quad \text{при } K = N,$$

где $M_0 \in \mathfrak{F}_{\delta_0}$. Очевидно, что для любой точки $M \in \mathfrak{F}_{\delta_0}$ имеет место неравенство (2.27). Следовательно, для любого достаточно малого $\eta > 0$ получаем оценку $|u(\mathbf{x})| \le M = M_{\delta_0} + \eta$, откуда немедленно вытекает окончательная оценка

$$|u(\mathbf{x})| \le M_{\delta_0}. \tag{2.34}$$

Лемма 2.2 доказана. □

§ 3. Теорема существования решения исходной задачи

Используя результаты § 2, докажем теорему 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Классическая разрешимость регуляризованной задачи вытекает из леммы 2.2, а также из лемм 2, 3 в [29], согласно известным результатам, касающимся разрешимости задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений [18]. Заметим, что в леммах 2, 3 из [29] доказываются априорные оценки градиента решения для задачи (2.1), (1.2). Для того чтобы доказать существование обобщенного решения исходной задачи, необходимо осуществить предельный переход по ε в регуляризованной задаче. Возможность такого предельного перехода доказана в теореме 1 из [30] для случая $p_i \ge 2$, $i = 1, \dots, N$. В сингулярном случае доказательство предельного перехода проводится аналогичным образом, поэтому приводить его в данной статье считаем излишним.

Докажем теперь, что для обобщенного решения, полученного предельным переходом, имеет место оценка $|u(\mathbf{x})| \le M_*$. Действительно, из леммы 2.2 следует, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$ решение u_ε регуляризованной задачи удовлетворяет оценке $|u_\varepsilon(\mathbf{x})| \le M_{\delta_0} = \inf \mathfrak{F}_{\delta_0}$. Также из леммы 2.2 и леммы 3 из [30] вытекает, что существует подпоследовательность, которую мы обозначим через $u_{\varepsilon_n}(\mathbf{x})$, такая, что $u_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) \to u(\mathbf{x})$ при $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n \le \varepsilon_0$, равномерно по норме пространства $\mathbf{C}_0$. Из (2.27) и монотонности функции $F(M,\delta)$ по δ получаем, что (2.27) имеет место для любого $\delta \le \delta_0$. Положим

$$\delta_n = \frac{K}{M_0}\left(\frac{\varepsilon_n}{1+\alpha-\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad n = 0, \dots, \tag{3.1}$$

причем легко видеть, что $\delta_n \le \delta_0$, $\delta_n \to 0$ при $\varepsilon_n \to 0$ и

$$|u_{\varepsilon_n}(\mathbf{x})| \le M_{\delta_n} = \inf \mathfrak{F}_{\delta_n}, \quad |u_{\varepsilon_m}(\mathbf{x})| \le M_{\delta_n} = \inf \mathfrak{F}_{\delta_n}, \quad m \ge n. \tag{3.2}$$

Таким образом, для функции $u(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} u_{\varepsilon_n}(\mathbf{x})$ будет выполняться

$$\|u(\mathbf{x})\|_{L^\infty} \le \lim_{n\to\infty} M_{\delta_n} = M_* = \inf \mathfrak{F}. \quad \square$$

Замечание 2.1. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^{N}(|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} = \lambda |u|^{p-2}u + f(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{3.3}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{3.4}$$

Здесь $q = p-1$, $\bar{p}_\sigma = p$, $g(u) = |u|^{p-2}u$. Заметим, что при $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ эту задачу можно рассматривать как задачу на собственные значения. Поскольку

$g(u) = |u|^{p-2}u$ является неубывающей функцией, задача (3.3), (3.4) разрешима для любой $f(\mathbf{x}) \in L^\infty$ при $\lambda \leq 0$. Как всегда, предполагаем, что $f(\mathbf{x})$ отлична от тождественного нуля. Пусть $\lambda > 0$ и $1 < p < 2$. Функция $F(M, 0)$ в данном случае принимает вид

$$F(M, 0) = \frac{1}{A(0)}(\lambda + f_0 M^{1-p}).$$

Из леммы 2.2 вытекает, что задача (3.3), (3.4) разрешима, если существует такое M, что $F(M, 0) = \frac{1}{A(0)}(\lambda + f_0 M^{1-p}) < N^{2-p}$. Легко видеть, что для любой функции $f(\mathbf{x}) \in L^\infty$ имеем $\inf F(M, 0) = \lim\limits_{M\to\infty} F(M, 0) = \frac{1}{A(0)}\lambda$. Таким образом, условие (1.7) можно переписать в виде

$$\inf F(M, 0) = \frac{1}{A(0)}\lambda < N^{2-p}. \tag{3.5}$$

Действительно, если неравенство (3.5) выполнено, то существует такое M, что также имеет место и неравенство $F(M, 0) = \frac{1}{A(0)}(\lambda + f_0 M^{1-p}) < N^{2-p}$. Отсюда следует, что задача (3.3), (3.4) разрешима для любой $f(\mathbf{x}) \in L^\infty$ при $\lambda < A(0)N^{2-p}$. Если зафиксировать $\max\limits_{1\leq i\leq N} l_i \leq \mathrm{const}$, то можно считать, что $A(0) \geq A_0$ для любого N. При таких предположениях становится ясно, что задача (3.3), (3.4) разрешима для любого λ при соответствующем выборе размерности.

Стоит отметить, что наш результат применим также к параболическому аналогу уравнения (1.1). Рассмотрим начально-краевую задачу для параболического аналога уравнения (1.1):

$$u_t - \sum_{i=1}^{N}(|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} = \lambda g(u) + f(\mathbf{x}, t) \quad \text{в } Q_T = \Omega \subset \mathbb{R}^N \times (0, T), \tag{3.6}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \tag{3.7}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega. \tag{3.8}$$

В [29] доказано существование ограниченного обобщенного решения задачи (3.6)–(3.8) при условии, что g является непрерывной функцией, удовлетворяющей условию (1.3), $f \in L^\infty(Q_T)$, Ω удовлетворяет условию внешней сферы и существует положительная постоянная M такая, что

$$(\lambda g(M + m) + f_0)\left(\frac{3l^2 + 2l}{2}\right)^{p-1} < (p-1)M^{p-1}, \tag{3.9}$$

где $p = p_{i_0} = \max\{p_1, \dots, p_N\}$, $l = l_{i_0}$, $f_0 = \|f(\mathbf{x})\|_{L^\infty}$, $m = \|u_0\|_{L^\infty}$. Легко показать, что аналогичный результат о разрешимости имеет место в случае, если условие (3.9) заменить слегка видоизмененным условием (1.7)

$$\widetilde{F}(M_0, 0) < K^{2-\bar{p}_\sigma}, \tag{3.10}$$

где

$$\widetilde{F}(M, \delta) \equiv \frac{1}{A(\delta)}(\lambda g(M + m)M^{1-\bar{p}_\sigma} - B(\delta)M^{p_N-\bar{p}_\sigma} + f_0 M^{1-\bar{p}_\sigma})$$

и M_0 — точка минимума функции $\widetilde{F}(M, 0)$. Отметим, что при выводе априорной оценки (2.15) мы не накладывали условие (A) на границу области Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alberico A., Cianchi A.* Comparison estimates in anisotropic variational problems // Manuscripta Math. 2008. V. 124, N 4. P. 481–503.
2. *Alves C. O., Hamidi A. El.* Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent // Differ. Integral Equ. 2008. V. 21, N 1. P. 25–40.
3. *Антонцев С. Н., Шмарев С. И.* О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 963–984.
4. *Antontsev S., Shmarev S.* Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal. 2006. V. 65, N 4. P. 728–761.
5. *Antontsev S., Shmarev S.* Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions // Handbook of differential equations. stationary partial differential equations. Amsterdam: Elsevier / North Holland, 2006. V. 3. P. 1–100.
6. *Antontsev S., Shmarev S.* Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity // Publ. Mat. 2009. V. 53, N 2. P. 355–399.
7. *Antontsev S., Shmarev S.* Localization solutions of anisotropic parabolic equations // Nonlinear Anal. 2009. V. 71, N 12. P. e725–e737.
8. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Renormalized solutions of an anisotropic reaction-diffusion-advection system with L1 data // Commun. Pure Appl. Anal. 2006. V. 5, N 4. P. 733–762.
9. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in R^N with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. 2005. V. 22, N 3. P. 207–227.
10. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Anisotropic nonlinear elliptic systems with measure data and anisotropic harmonic maps into spheres // Electron. J. Differ. Equ. 2006. V. 46. 30 p.
11. *Bendahmane M., Langlais M., Saad M.* On some anisotropic reaction-diffusion systems with L1-data modeling the propagation of an epidemic disease // Nonlinear Anal. 2003. V. 54, N 4. P. 617–636.
12. *Cianchi A.* Symmetrization in anisotropic elliptic problems // Comm. Partial Differ. Equ. 2007. V. 32, N 4–6. P. 693–717.
13. *D'Ambrosio L.* Liouville theorems for anisotropic quasilinear inequalities // Nonlinear Anal. 2009. V. 70, N 8. P. 2855–2869.
14. *Di Castro A. , Montefusco E.* Nonlinear eigenvalues for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations // Nonlinear Anal. 2009. V. 70, N 11. P. 4093–4105.
15. *Fragala I., Gazzola F., Kawohl B.* Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 2004. V. 21, N 5. P. 715–734.
16. *Fragala I., Gazzola F., Lieberman G.* Regularity and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations in convex domains // Discrete Contin. Dyn. Syst. (suppl.). 2005. P. 280–286.
17. *Garcia-Melian J., Rossi J. D., de Lis J. C. S.* Large solutions to an anisotropic quasilinear elliptic problem // Ann. Mat. Pura Appl. 2010. V. 189, N 4. P. 689–712.
18. *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verl., 1983.
19. *El Hamidi A., Rakotoson J.-M.* On a perturbed anisotropic equation with a critical exponent // Ric. Mat. 2006. V. 55, N 1. P. 55–69.
20. *El Hamidi A., Rakotoson J.-M.* Extremal functions for the anisotropic Sobolev inequalities // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 2007. V. 24, N 5. P. 741–756.
21. *El Hamidi A., Vetois J.* Sharp Sobolev asymptotics for critical anisotropic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. V. 192, N 1. P. 1–36.
22. *Li J. J.* Local behaviour of solutions of anisotropic elliptic equations // Nonlinear Anal. 1999. V. 35, N 5. P. 617–628.
23. *Liang Z.* The role of space dimension on the blow-up for a reaction-diffusion equation // Appl. Math. 2011. V. 2, N 5. P. 575–578.
24. *Lieberman G. M.* Gradient estimates for a new class of degenerate elliptic and parabolic equations // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. IV Ser. 1994. V. 21, N 4. P. 497–522.
25. *Lieberman G. M.* Gradient estimates for anisotropic elliptic equations // Adv. Differ. Equ. 2005. V. 10, N 7. P. 767–812.
26. *Mihailescu M., Pucci P., Radulescu V.* Nonhomogeneous boundary value problems in anisotropic Sobolev spaces // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2007. V. 345, N 10. P. 561–566.

27. *Mihailescu M., Pucci P., Radulescu V.* Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 340, N 1. P. 687–698.
28. *Mihailescu M., Radulescu V., Tersian S.* Eigenvalue problems for anisotropic discrete boundary value problem // J. Differ. Equ. Appl. 2009. V. 15, N 6. P. 557–567.
29. *Starovoitov V., Tersenov Al. S.* Singular and degenerate anisotropic parabolic equations with a nonlinear source // Nonlinear Anal. 2010. V. 72, N 6. P. 3009–3027.
30. *Tersenov Al., Tersenov Ar.* The problem of Dirichlet for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations // J. Differ. Equ. 2007. V. 235, N 2. P. 376–396.
31. *Vetois J.* Asymptotic stability convexity and Lipschitz regularity of domains in the anisotropic regime // Commun. Contemp. Math. 2010. V. 12, N 1. P. 35–53.
32. *Vetois J.* A priori estimates for solutions of anisotropic elliptic equations // Nonlinear Anal. 2009. V. 71, N 9. P. 3881–3905.
33. *Vetois J.* The blow-up of critical anisotropic equations with critical directions // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2011. V. 18, N 2. P. 173–197.

Статья поступила 13 июля 2011 г.

Терсенов Арис Саввич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
aterseno@math.nsc.ru