Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО–ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова

Аннотация. Для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева — Бицадзе и неизвестной правой частью в прямоугольной области изучена краевая задача с нелокальным граничным условием, которое выражает равенство функции тока на боковых сторонах прямоугольника. Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда. Установлены критерий единственности решения и устойчивость решения по граничным данным.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, обратная задача, спектральный метод, единственность, существование, устойчивость.

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа с неизвестной правой частью:

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x), \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$ — заданные действительные числа, и поставим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L[0, 1]; \tag{3}$$

$$Lu = f(x), \quad (x, y) \in D_- \cup D_+; \tag{4}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{6}$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \psi(0) = \psi(1), \quad \varphi'(0) = \psi'(0) = 0, \tag{8}$$

$D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались многими авторами. Отметим прежде всего работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2–4], В. К. Иванова [5] и их учеников. Более подробно об этом написано в монографии А. М. Денисова [6].

В последние годы в работах А. И. Кожанова (см., например, [7, 8]) предложен новый метод исследования обратных задач путем сведения их к прямым локальным или нелокальным задачам для различных классов дифференциальных уравнений в частных производных.

В [9, 10] методом спектральных разложений получены новые теоремы единственности и существования решения прямых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа [11, 12].

Обратная задача (2)–(7) при $b = 0$ впервые изучена в работе авторов [13]. При этом исходная задача сводилась к нахождению решения соответствующей задачи для функции $v(x, y) = u_y(x, y)$. В данной работе используется другой подход построения решения, что позволяет снять некоторые ограничения на искомую функцию и тем самым расширить класс функций, в котором ищется решение. Установлены при всех $b > 0$ необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи (2)–(7). При построении решения поставленной задачи в виде суммы биортогонального ряда возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость такого ряда. В связи с этим найдены достаточные условия сходимости ряда в классе (2). Также в работе установлена устойчивость решения по граничным данным по нормам пространств W_2^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $C(\overline{D})$.

2. Формальное построение решения задачи

Решая задачу (2)–(7) в случае $f(x) \equiv 0$ методом разделения переменных $u(x, y) = X(x)T(y)$, получим для функции $X(x)$ следующую спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

$$X(0) = X(1), \quad X'(0) = 0, \tag{10}$$

где μ — постоянная разделения. Как известно [12–14], спектральная задача (9), (10) несамосопряженная и имеет следующую систему собственных чисел и собственных и присоединенных функций:

$$\mu_k = (2\pi k)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{11}$$

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k-1}(x) = \cos 2\pi kx, \quad X_{2k}(x) = x \sin 2\pi kx \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{12}$$

Согласно теореме Келдыша [15] система корневых функций (12) задачи (9), (10) полна в $L_2[0, 1]$. Но для решения задачи (2)–(7) одной полноты системы функций (12) недостаточно, т. е. система (12) должна обладать свойством базисности. Тогда по этой системе можно однозначно разложить в ряд любую функцию из $L_2[0, 1]$. Для этого рассмотрим сопряженную задачу

$$Y''(x) + \mu Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{13}$$

$$Y'(0) = Y'(1), \quad Y(1) = 0, \tag{14}$$

которая имеет те же собственные значения, но другую систему корневых функций:

$$Y_0(x) = 2(1 - x), \quad Y_{2k-1}(x) = 4(1 - x) \cos 2\pi kx, \quad Y_{2k}(x) = 4 \sin 2\pi kx. \tag{15}$$

Системы функций (12) и (15) образуют биортогональную систему и удовлетворяют необходимому и достаточному условию базисности в пространстве $L_2[0,1]$, которое было впервые установлено В. А. Ильиным [14].

Решение задачи (2)–(7) будем искать в виде сумм биортогональных рядов:

$$u(x,y) = T_0(y)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y)X_{2k}(x), \tag{16}$$

$$f(x) = f_0X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}X_{2k}(x), \tag{17}$$

где

$$T_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)(1-x)\,dx, \tag{18}$$

$$T_{2k-1}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos 2\pi kx\,dx, \tag{19}$$

$$T_{2k}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi kx\,dx, \tag{20}$$

$$f_{2k} = 4\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx\,dx, \quad f_{2k-1} = 4\int_0^1 f(x)(1-x)\cos 2\pi kx\,dx, \tag{21}$$

$$f_0 = 2\int_0^1 f(x)(1-x)\,dx. \tag{22}$$

На основании (18)–(20) введем функции

$$T_{0,\varepsilon}(y) = 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)(1-x)\,dx, \tag{23}$$

$$T_{2k-1,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)(1-x)\cos 2\pi kx\,dx, \tag{24}$$

$$T_{2k,\varepsilon}(y) = 4\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,y)\sin 2\pi kx\,dx, \tag{25}$$

где ε — достаточно малое число. Дифференцируя равенства (23)–(25) при $y \in (-\alpha,0)\cup(0,\beta)$ два раза и учитывая уравнение (1), получим

$$T''_{0,\varepsilon}(y) = 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (f(x) - u_{xx}(x,y) + b^2u(x,y))(1-x)\,dx, \quad y > 0, \tag{26}$$

$$T''_{0,\varepsilon}(y) = 2\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (u_{xx}(x,y) - b^2u(x,y) - f(x))(1-x)\,dx, \quad y < 0, \tag{27}$$

$$T''_{2k-1,\varepsilon}(y) = 4\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(f(x) - u_{xx}(x,y) + b^2u(x,y))(1-x)\cos 2\pi kx\,dx, \quad y>0, \tag{28}$$

$$T''_{2k-1,\varepsilon}(y) = 4\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(u_{xx}(x,y) - f(x) - b^2u(x,y))(1-x)\cos 2\pi kx\,dx, \quad y<0, \tag{29}$$

$$T''_{2k,\varepsilon}(y) = 4\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(f(x) - u_{xx}(x,y) + b^2u(x,y))\sin 2\pi kx\,dx, \quad y>0, \tag{30}$$

$$T''_{2k,\varepsilon}(y) = 4\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}(u_{xx}(x,y) - f(x) - b^2u(x,y))\sin 2\pi kx\,dx, \quad y<0. \tag{31}$$

В интегралах (26)–(31), интегрируя два раза по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (5), найдем дифференциальные уравнения для функций (18)–(20):

$$T''_0(y) - b^2T_0(y) = f_0, \quad y>0, \tag{32}$$

$$T''_0(y) + b^2T_0(y) = -f_0, \quad y<0, \tag{33}$$

$$T''_{2k}(y) - \lambda_k^2T_{2k}(y) = f_{2k}, \quad y>0, \tag{34}$$

$$T''_{2k}(y) + \lambda_k^2T_{2k}(y) = -f_{2k}, \quad y<0, \tag{35}$$

$$T''_{2k-1}(y) - \lambda_k^2T_{2k-1}(y) = f_{2k-1} - 4\pi kT_{2k}(y), \quad y>0, \tag{36}$$

$$T''_{2k-1}(y) + \lambda_k^2T_{2k-1}(y) = -f_{2k-1} + 4\pi kT_{2k}(y), \quad y<0, \tag{37}$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + (2\pi k)^2$.

Общие решения полученных уравнений имеют вид

$$T_0(y) = \begin{cases} a_0e^{by} + b_0e^{-by} - \frac{f_0}{b^2}, & y>0,\\ c_0\cos by + d_0\sin by - \frac{f_0}{b^2}, & y<0,\end{cases} \tag{38}$$

$$T_{2k}(y) = \begin{cases} a_ke^{\lambda_k y} + b_ke^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y>0,\\ c_k\cos\lambda_k y + d_k\sin\lambda_k y - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y<0,\end{cases} \tag{39}$$

$$T_{2k-1}(y) = \begin{cases} \tilde a_ke^{\lambda_k y} + \tilde b_ke^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} & \\ \qquad + \frac{2\pi k}{\lambda_k}y(-a_ke^{\lambda_k y} + b_ke^{-\lambda_k y}) - \frac{4\pi kf_{2k}}{\lambda_k^4}, & y>0,\\ \tilde c_k\cos\lambda_k y + \tilde d_k\sin\lambda_k y - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} & \\ \qquad + \frac{2\pi k}{\lambda_k}y(-d_k\cos\lambda_k y + c_k\sin\lambda_k y) - \frac{4\pi kf_{2k}}{\lambda_k^4}, & y<0,\end{cases} \tag{40}$$

где a_0, b_0, c_0, d_0, a_k, b_k, c_k, d_k, $\tilde a_k$, $\tilde b_k$, $\tilde c_k$, $\tilde d_k$ — произвольные постоянные.

Поскольку решение $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2), для функций (38)–(40) выполнены следующие условия сопряжения:

$$\begin{gathered} T_{2k}(0-0) = T_{2k}(0+0), \quad T'_{2k}(0-0) = T'_{2k}(0+0), \quad T_{2k-1}(0-0) = T_{2k-1}(0+0),\\ T'_{2k-1}(0-0) = T'_{2k-1}(0+0), \quad T_0(0-0) = T_0(0+0), \quad T'_0(0-0) = T'_0(0+0). \end{gathered} \tag{41}$$

Функции (38)–(40) удовлетворяют условиям (41) только тогда, когда

$$c_k = a_k + b_k,\ d_k = a_k - b_k,\ \tilde{c}_k = \tilde{a}_k + \tilde{b}_k,\ \tilde{d}_k = \tilde{a}_k - \tilde{b}_k,\ c_0 = a_0 + b_0,\ d_0 = a_0 - b_0.$$

Подставив найденные значения c_k, d_k, $\tilde{c}_k$, $\tilde{d}_k$, c_0, d_0 в (38)–(40), получим

$$T_0(y) = \begin{cases} a_0 e^{by} + b_0 e^{-by} - \frac{f_0}{b^2}, & y > 0, \\ (a_0 + b_0)\cos by + (a_0 - b_0)\sin by - \frac{f_0}{b^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{42}$$

$$T_{2k}(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y > 0, \\ (a_k + b_k)\cos \lambda_k y + (a_k - b_k)\sin \lambda_k y - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{43}$$

$$T_{2k-1}(y) = \begin{cases} \tilde{a}_k e^{\lambda_k y} + \tilde{b}_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} & \\ + \frac{2\pi k}{\lambda_k} y(-a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y}) - \frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, & y > 0, \\ (\tilde{a}_k + \tilde{b}_k)\cos \lambda_k y + (\tilde{a}_k - \tilde{b}_k)\sin \lambda_k y - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} & \\ + \frac{2\pi k}{\lambda_k} y((b_k - a_k)\cos \lambda_k y + (a_k + b_k)\sin \lambda_k y) - \frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, & y < 0. \end{cases} \tag{44}$$

Из равенств (18)–(20) с учетом граничных условий (6) и (7) будем иметь

$$\begin{gathered} T_0(-\alpha) = \psi_0, \quad T_0(\beta) = \varphi_0, \quad T_0'(-\alpha) = g_0, \\ T_{2k}(-\alpha) = \psi_{2k}, \quad T_{2k}(\beta) = \varphi_{2k}, \quad T_{2k}'(-\alpha) = g_{2k}, \\ T_{2k-1}(-\alpha) = \psi_{1k}, \quad T_{2k-1}(\beta) = \varphi_{1k}, \quad T_{2k-1}'(-\alpha) = g_{1k}, \end{gathered} \tag{45}$$

где

$$\varphi_{2k-1} = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\cos 2\pi k x\, dx, \quad \varphi_{2k} = 4\int_0^1 \varphi(x)\sin 2\pi k x\, dx, \tag{46}$$

$$\psi_{2k-1} = 4\int_0^1 \psi(x)(1-x)\cos 2\pi k x\, dx, \quad \psi_{2k} = 4\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi k x\, dx, \tag{47}$$

$$g_{2k-1} = 4\int_0^1 g(x)(1-x)\cos 2\pi k x\, dx, \quad g_{2k} = 4\int_0^1 g(x)\sin 2\pi k x\, dx, \tag{48}$$

$$\varphi_0 = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\, dx, \quad \psi_0 = 2\int_0^1 \psi(x)(1-x)\, dx, \quad g_0 = 2\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\, dx, \tag{49}$$

т. е. φ_0, φ_{2k}, φ_{2k-1} являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$ в биортогональный ряд

$$\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k} X_{2k}(x),$$

при этом в силу результатов из [15] справедлива двусторонняя оценка

$$R_2 \|\varphi(x)\|_{L_2}^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^2 \le R_1 \|\varphi(x)\|_{L_2}^2, \tag{50}$$

где

$$\|\varphi(x)\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 |\varphi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad R_1 = 16, \quad R_2 = 3/4.$$

Аналогичные оценки справедливы и для функций $\psi(x)$, $g(x)$.

Удовлетворяя функции (42)–(44) граничным условиям (45), получим относительно a_0, b_0, f_0, a_k, b_k, f_{2k}, $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$, f_{2k-1} системы

$$\begin{cases} a_0 e^{b\beta} + b_0 e^{-b\beta} - \frac{f_0}{b^2} = \varphi_0, \\ a_0(\cos b\alpha - \sin b\alpha) + b_0(\sin b\alpha + \cos b\alpha) - \frac{f_0}{b^2} = \psi_0, \\ ba_0(\cos b\alpha + \sin b\alpha) + bb_0(\sin b\alpha - \cos b\alpha) = g_0, \end{cases} \tag{51}$$

$$\begin{cases} a_k e^{\lambda_k\beta} + b_k e^{-\lambda_k\beta} - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} = \varphi_{2k}, \\ a_k(\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) - \frac{f_{2k}}{\lambda_k^2} = \psi_{2k}, \\ \lambda_k a_k(\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha) + \lambda_k b_k(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) = g_{2k}, \end{cases} \tag{52}$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_k e^{\lambda_k\beta} + \tilde{b}_k e^{-\lambda_k\beta} - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} = P_1, \\ \tilde{a}_k(\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha) + \tilde{b}_k(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) - \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^2} = P_2, \\ \lambda_k\tilde{a}_k(\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha) + \lambda_k\tilde{b}_k(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) = P_3, \end{cases} \tag{53}$$

где

$$\begin{gathered} P_1 = \varphi_{2k-1} + \frac{2\pi k}{\lambda_k}\beta(a_k e^{\lambda_k\beta} - b_k e^{-\lambda_k\beta}) + \frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, \\ P_2 = \psi_{2k-1} - \frac{2\pi k}{\lambda_k}\alpha[a_k(\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha)] + \frac{4\pi k f_{2k}}{\lambda_k^4}, \\ P_3 = g_{2k-1} + \frac{2\pi k}{\lambda_k}[a_k(\cos\lambda_k\alpha + \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha)] \\ +2\pi k\alpha[a_k(\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha) + b_k(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha)]. \end{gathered} \tag{54}$$

Решая системы (51)–(53) методом определителей, получим

$$a_0 = \frac{(\varphi_0 - \psi_0)(\sin b\alpha - \cos b\alpha) + \frac{g_0}{b}(\sin b\alpha + \cos b\alpha - e^{-b\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{55}$$

$$b_0 = \frac{(\psi_0 - \varphi_0)(\sin b\alpha + \cos b\alpha) + \frac{g_0}{b}(\sin b\alpha - \cos b\alpha + e^{b\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{56}$$

$$f_0 = \frac{-b^2\varphi_0 - b^2\psi_0(\sin b\alpha \operatorname{sh} b\beta - \cos b\alpha \operatorname{ch} b\beta) + bg_0(\sin b\alpha \operatorname{ch} b\beta + \cos b\alpha \operatorname{sh} b\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, \tag{57}$$

$$a_k = \frac{(\varphi_{2k} - \psi_{2k})(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) + \frac{g_{2k}}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \tag{58}$$

$$b_k = \frac{(\psi_{2k} - \varphi_{2k})(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) + \frac{g_{2k}}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + e^{\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \tag{59}$$

$$f_k = \lambda_k^2 \frac{-\varphi_{2k} - \psi_{2k}(\Delta_{\alpha\beta}(k) - 1) + \frac{g_{2k}}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha \operatorname{ch}\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha \operatorname{sh}\lambda_k\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \tag{60}$$

$$\tilde{a}_k = \frac{(P_1 - P_2)(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha) + \frac{P_3}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \tag{61}$$

$$\tilde{b}_k = \frac{(P_2 - P_1)(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) + \frac{P_3}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + e^{\lambda_k\beta})}{2\Delta_{\alpha\beta}(k)}, \tag{62}$$

$$\tilde{f}_k = \lambda_k^2 \frac{-P_1 - P_2(\Delta_{\alpha\beta}(k) - 1) + \frac{P_3}{\lambda_k}(\sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} \tag{63}$$

при условии, что при $k \in N_0 = N \cup \{0\}$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta + 1 \neq 0. \tag{64}$$

Подставляя найденные значения постоянных (55)–(63) в формулы (42)–(44), найдем формальное решение задачи (2)–(7) в виде суммы рядов (16) и (17).

3. Единственность решения обратной задачи

Пусть существуют два решения $\{u_1(x,y), f_1(x)\}$ и $\{u_2(x,y), f_2(x)\}$ задачи (2)–(7). Тогда разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (1), но с правой частью $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, условию (5) и однородным граничным условиям:

$$u(x,\beta) = 0, \quad u(x,-\alpha) = 0, \quad u_y(x,-\alpha) = 0. \tag{65}$$

Пусть при всех $k \in N_0$ выполнены условия (64). Поскольку ввиду (65) $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, то $\varphi_0 = \psi_0 = g_0 = 0$ и $\varphi_{2k-1} = \varphi_{2k} = \psi_{2k-1} = \psi_{2k} = g_{2k-1} = g_{2k} = 0$ при всех $k \in N$. В силу этого и условий (64) из равенств (55)–(63) следует, что $a_k = b_k = f_{2k} = \tilde{a}_k = \tilde{b}_k = f_{2k-1} = 0$ при всех $k \in N_0$. Отсюда на основании (42)–(44) и (18)–(22) при всех $y \in [-\alpha, \beta]$ имеем

$$2\int_0^1 u(x,y)(1-x)\,dx = 0, \quad 4\int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi kx\,dx = 0,$$

$$4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos 2\pi kx\,dx = 0, \quad 2\int_0^1 f(x)(1-x)\,dx = 0,$$

$$4\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx\,dx = 0, \quad 4\int_0^1 f(x)(1-x)\cos 2\pi kx\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Ввиду полноты системы функций (15) в пространстве $L_2[0,1]$ из последних равенств следует, что $u(x,y) = 0$ п. в. на [0,1] при любом $y \in [-\alpha, \beta]$ и $f(x) = 0$ п. в. на (0,1). В силу (2), (3) функция $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$ и $f(x) \in C(0,1)$, поэтому $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на (0,1).

Пусть при некоторых α, β и $k = p \in N_0$ нарушено условие (64), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда задача (2)–(7), где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = T_p(y)\cos 2\pi px, \quad f_p(x) = f_p \cos 2\pi px,$$

где

$$T_p(y) = \begin{cases} \lambda_p^{-2} f_p\left(\frac{\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p y + \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p y - \mathrm{sh}\,\lambda_p(y-\beta)}{\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta + \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta} - 1\right), & y > 0, \\ \lambda_p^{-2} f_p\left(\frac{\sin\lambda_p(\alpha+y) + \cos\lambda_p y\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta - \sin\lambda_p y\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta}{\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta + \sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta} - 1\right), & y < 0, \end{cases}$$

$f_p \neq 0$ — произвольная постоянная.

Таким образом, установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)–(7), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N_0$ выполнены условия* (64).

4. Обоснование существования решения обратной задачи

Решение задачи (2)–(7) при выполнении условий (64) для всех $k \in N_0$ получено формально в виде сумм биортогональных рядов (16) и (17). Поскольку $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, для обоснования существования решения задачи (2)–(7) помимо условий (64) необходимо показать, что существуют числа $\alpha, \beta > 0$ такие, что при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля. Для этого представим $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k\beta}\,\sin(\lambda_k\alpha - \varphi_k) + 1, \tag{66}$$

где $\varphi_k = \arcsin(\operatorname{ch}\lambda_k\beta/\sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k\beta}) \to \pi/4$ при $k \to +\infty$. Из представления (66) видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{\varphi_k}{\lambda_k} - \frac{(-1)^n}{\lambda_k}\arcsin(1/\sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k\beta}) + \frac{n}{2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий:*

1) $\alpha = p$ *натуральное,*

2) $\alpha = p/q$, $p, q \in N$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$,

то существует положительная постоянная C_0, возможно, зависящая от α, такая, что при больших k и любом фиксированном $\beta > 0$ справедлива оценка

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{2\pi k\beta} > 0. \tag{67}$$

Доказательство. При любых $k \in N$

$$0 < \lambda_k - 2\pi k = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + (2\pi k)^2} + 2\pi k} < \frac{b^2}{4\pi k}. \tag{68}$$

Пусть $\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \Delta_{\alpha\beta}(k)|_{b=0}$. Рассмотрим следующую разность:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) - \widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta})(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha)$$
$$+ \frac{1}{2}e^{2\pi k\beta}(\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + \cos 2\pi k\alpha - \sin 2\pi k\alpha) - \frac{1}{2}e^{-\lambda_k\beta}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha)$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-2\pi k\beta}(\sin 2\pi k\alpha + \cos 2\pi k\alpha).$$

Отсюда с учетом оценок $0 \leq e^x - 1 \leq 2x$ при $0 \leq x < 1$, $|\sin x| \leq x$ и (68) имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k) - \widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k)| \leq \frac{e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}}{2}|\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha|$$
$$+ \frac{1}{2}e^{2\pi k\beta}(|\sin\lambda_k\alpha - \sin 2\pi k\alpha| + |\cos\lambda_k\alpha - \cos 2\pi k\alpha|) + O(e^{-2\pi k\beta})$$
$$\leq \frac{e^{2\pi k\beta}}{\sqrt{2}}\left[(e^{(\lambda_k - 2\pi k)\beta} - 1) + 2\sqrt{2}\left|\sin\frac{(\lambda_k - 2\pi k)\alpha}{2}\right|\right] + O(e^{-2\pi k\beta})$$
$$\leq \frac{e^{2\pi k\beta}}{\sqrt{2}}[(\lambda_k - 2\pi k)2\beta + \sqrt{2}(\lambda_k - 2\pi k)\alpha] + O(e^{-2\pi k\beta})$$

$$\leq e^{2\pi k\beta}(\lambda_k - 2\pi k)(\alpha + \sqrt{2}\beta) + O(e^{-2\pi k\beta}) < C_1 \frac{e^{2\pi k\beta}}{k}, \quad (69)$$

где C_i здесь и далее суть положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β и b.

В силу (69) достаточно показать справедливость оценки (67) для

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 4\pi k\beta}\, \sin(2\pi k\alpha - \widetilde{\varphi}_k) + 1, \quad (70)$$

где $\widetilde{\varphi}_k = \varphi_k$ при $b = 0$. Пусть $\alpha = p \in N$. Тогда из (70) имеем

$$|\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k)| = \operatorname{ch} 2\pi k\beta - 1 = e^{2\pi k\beta}\left(\frac{1 + e^{-4\pi k\beta}}{2} - e^{-2\pi k\beta}\right)$$

$$> e^{2\pi k\beta}\left(\frac{1}{2} - e^{-2\pi k\beta}\right) > C_2 e^{2\pi k\beta} \quad (71)$$

при $k > k_0 > \left[\frac{1}{2\pi\beta}\ln\left(\frac{2}{1-2C_2}\right)\right]$, $0 < C_2 < 1/2$ и произвольном $\beta > 0$.

Пусть $\alpha = p/q$, где $p, q \in N$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$. В этом случае разделим $2kp$ на q с остатком: $2kp = sq + r$, $s, r \in N_0$, $0 \leq r < q$. Тогда выражение (70) примет вид

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 4\pi k\beta}(-1)^s \sin(\pi r/q - \widetilde{\varphi}_k) + 1. \quad (72)$$

Если $r = 0$, то данный случай сводится к уже рассмотренному выше $\alpha = p \in N$.

Пусть $0 < r < q$, и ясно, что $1 \leq r \leq q - 1$, $q \geq 2$. Поскольку $\widetilde{\varphi}_k < \frac{\pi}{4}$ и $\widetilde{\varphi}_k \to \frac{\pi}{4}$ при $k \to +\infty$, то $\widetilde{\varphi}_k = \frac{\pi}{4} - \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$. В силу этого существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что при всех $k > k_1$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \widetilde{\varphi}_k\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k\right)\right| \geq \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4}\right)\right| > 0$$

и

$$\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sqrt{2}e^{-2\pi k\beta} \geq C_3,$$

где $0 < C_3 \leq \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$. С учетом этих оценок из (72) получим

$$|\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta}(k)| \geq \frac{e^{2\pi k\beta}}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sqrt{2}e^{-2\pi k\beta}\right| \geq C_4 e^{2\pi k\beta}. \quad (73)$$

Из (71) и (73) следует справедливость оценки (67) при больших k.

При определенных условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ при условии (64) и (67) покажем, что функции $u(x, y)$ и $f(x)$, определенные соответственно рядами (16) и (17), удовлетворяют условиям (2)–(4). Формально из (16) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y)X'_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y)X'_{2k-1}(x), \quad (74)$$

$$u_y(x, y) = T'_0(y)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T'_{2k-1}(y)X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T'_{2k}(y)X_{2k-1}(x), \quad (75)$$

$$u_{xx}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y)X''_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y)X''_{2k-1}(x), \quad (76)$$

$$u_{yy}(x, y) = T''_0(y)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T''_{2k-1}(y)X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} T''_{2k}(y)X_{2k-1}(x). \quad (77)$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (64) *и* (67). *Тогда при больших* k *и любом* $y \in [-\alpha, \beta]$ *справедливы оценки*

$$|T_{2k}(y)| \le M_1 \left(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}| + \frac{1}{k}|g_{2k}| \right),$$

$$|T_{2k-1}(y)| \le M_2 \left(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}| + \frac{1}{k}(|g_{2k-1}| + |g_{2k}|) \right),$$

$$|T'_{2k}(y)| \le M_3(|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)),$$

$$|T'_{2k-1}(y)| \le M_4(|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)),$$

$$|T''_{2k}(y)| \le M_5 k(|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)),$$

$$|T''_{2k-1}(y)| \le M_6 k(|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)),$$

где M_i *здесь и далее суть положительные постоянные.*

Доказательство. Из (58)–(60) с учетом леммы 1 получим

$$|a_k| \le \frac{M_7}{ke^{2\pi k\beta}}(|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)), \tag{78}$$

$$|b_k| \le \frac{M_8}{k}(|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)), \tag{79}$$

$$|f_k| \le M_9 k(|g_{2k}| + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)). \tag{80}$$

Аналогично из равенств (61)–(63) и (54), воспользовавшись леммой 1, найдем следующие оценки:

$$|\tilde{a}_k| \le \frac{M_{10}}{ke^{2\pi k\beta}}(|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)), \tag{81}$$

$$|\tilde{b}_k| \le \frac{M_{11}}{k}(|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)), \tag{82}$$

$$|\tilde{f}_k| \le M_{12} k(|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)). \tag{83}$$

Из (78)–(80) и (81)–(83) вытекает справедливость требуемых в лемме оценок.

На основании леммы 2 ряды (16), (17) и (74)–(77) при $(x, y) \in \overline{D}$ мажорируются рядом

$$M_{15} \sum_{k=1}^{\infty} k(|g_{2k-1}| + |g_{2k}| + k(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|)). \tag{84}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $g(x) \in C^2[0,1]$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = 0$. *Тогда справедливы представления*

$$\varphi_{2k-1} = \frac{\varphi^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3} + \frac{3\varphi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \quad \varphi_{2k} = -\frac{\varphi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \tag{85}$$

$$\psi_{2k-1} = \frac{\psi^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3} + \frac{3\psi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \quad \psi_{2k} = -\frac{\psi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \tag{86}$$

$$g_{2k-1} = -\frac{g^{(2)}_{2k-1}}{(2\pi k)^2} - \frac{2g^{(2)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \quad g_{2k} = -\frac{g^{(2)}_{2k}}{(2\pi k)^2}, \tag{87}$$

где

$$\varphi_{2k}^{(3)} = 4\int_0^1 \varphi'''(x)\cos 2\pi kx\,dx, \quad \varphi_{2k-1}^{(3)} = 4\int_0^1 \varphi'''(x)(1-x)\sin 2\pi kx\,dx,$$

$$\psi_{2k}^{(3)} = 4\int_0^1 \psi'''(x)\cos 2\pi kx\,dx, \quad \psi_{2k-1}^{(3)} = 4\int_0^1 \psi'''(x)(1-x)\sin 2\pi kx\,dx,$$

$$g_{2k}^{(2)} = 4\int_0^1 g''(x)\sin 2\pi kx\,dx, \quad g_{2k-1}^{(2)} = 4\int_0^1 g''(x)(1-x)\cos 2\pi kx\,dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl|\varphi_k^{(3)}\bigr|^2 \le 16\|\varphi^{(3)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\bigl|\psi_k^{(3)}\bigr|^2 \le 16\|\psi^{(3)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}, \tag{88}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl|g_k^{(2)}\bigr|^2 \le 16\|g^{(2)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{89}$$

Доказательство. Рассмотрим интегралы (46)–(48). Интегрируя (46) и (47) по частям три раза, а (48) два раза с учетом условий леммы, получим требуемые представления (85)–(87). Справедливость оценок (88) и (89) следует из (50).

При выполнении условий леммы 3 ряд (84) оценивается сходящимся числовым рядом

$$M_{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\bigl(|g_k^{(2)}| + |\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}|\bigr). \tag{90}$$

Из сходимости ряда (90) в силу признака Вейерштрасса сходятся равномерно ряды (16), (74), (75) в замкнутой области $\overline{D}$, ряды (76), (77) в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$ и ряд (17) на промежутке $[0,1]$. Поэтому функция $u(x,y)$, определенная рядом (16), удовлетворяет условию (2), а функция $f(x)$, определенная рядом (17), удовлетворяет условию (3). Подставляя ряды (76), (77), (16), (17) в уравнение (1), убеждаемся, что функции $u(x,y)$ и $f(x)$, определенные равенствами (16) и (17) соответственно, удовлетворяют условию (4).

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 3 *и выполнены условия* (64) *и* (67). *Тогда существует единственное решение задачи* (2)–(7), *где функции $u(x,y)$ и $f(x)$ определяются соответствующими рядами* (16) *и* (17), *коэффициенты которых находятся по формулам* (42)–(44), (55)–(57), (58)–(60), (61)–(63).

5. Устойчивость решения

Положим

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |u(x,y)|^2\,dx\right)^{1/2}, \quad \|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}}|u(x,y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}|f^{(k)}(x)|^2\right)dx\right)^{1/2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (2)–(7) имеют место оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \le N_1(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}), \tag{91}$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \le N_2(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}), \tag{92}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \le N_3(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}), \tag{93}$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \le N_4(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}), \tag{94}$$

где постоянные N_i не зависят от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$.

Доказательство. Заметим, что ряд (16) является биортогональным разложением функции $u(x,y)$ при фиксированном $y \in [-\alpha,\beta]$ по системам (12) и (15). Поскольку функция $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, для нее справедлива оценка (50). Из (16) в силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
\|u(x,y)\|_{L_2}^2 &\le \frac{1}{R_2}\sum_{k=0}^{+\infty} T_k^2(y) \\
&= \frac{1}{R_2}\left[T_0^2(y) + \sum_{k=1}^{+\infty}\big(T_{2k-1}^2(y) + T_{2k}^2(y)\big)\right] \le \frac{N_5}{R_2}\left[|\varphi_0|^2 + |\psi_0|^2 + \left|\frac{1}{b}g_0\right|^2\right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(|\varphi_{2k-1}|^2 + |\varphi_{2k}|^2 + |\psi_{2k-1}|^2 + |\psi_{2k}|^2 + \left|\frac{1}{k}g_{2k-1}\right|^2 + \left|\frac{1}{k}g_{2k}\right|^2\right)\right] \\
&\le N_6\sum_{k=0}^{+\infty}(|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2 + |g_k|^2) \le N_1^2\big(\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2\big).
\end{aligned} \tag{95}$$

Из неравенства (95) вытекает справедливость оценки (91).

Используя оценку (50), а также формулы (17), (80) и (83) для непрерывной на $[0,1]$ функции $f(x)$, имеем

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_{L_2} \le (b^2\varphi_0)^2 + (b^2\psi_0)^2 + (bg_0)^2 + N_7\sum_{k=1}^{+\infty}[(k^2\varphi_{2k-1})^2 + (k^2\varphi_{2k})^2 \\
+ (k^2\psi_{2k-1})^2 + (k^2\psi_{2k})^2 + (kg_{2k-1})^2 + (kg_{2k})^2].
\end{aligned} \tag{96}$$

В силу условий теоремы 2 коэффициенты φ_{2k-1}, ψ_{2k-1}, φ_{2k}, ψ_{2k}, g_{2k-1} и g_{2k} можно представить в виде

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{\varphi_{2k-1}^{(2)}}{(2\pi k)^2} - \frac{2\varphi_{2k}^{(2)}}{(2\pi k)^3}, \quad \varphi_{2k} = -\frac{\varphi_{2k}^{(2)}}{(2\pi k)^2},$$

$$\psi_{2k-1} = -\frac{\psi_{2k-1}^{(2)}}{(2\pi k)^2} - \frac{2\psi_{2k}^{(2)}}{(2\pi k)^3}, \quad \psi_{2k} = -\frac{\psi_{2k}^{(2)}}{(2\pi k)^2},$$

$$g_{2k-1} = -\frac{g_{2k-1}^{(1)}}{2\pi k} - \frac{g_{2k}^{(1)}}{(2\pi k)^2}, \quad g_{2k} = -\frac{g_{2k}^{(1)}}{2\pi k},$$

$$\varphi_{2k-1}^{(2)} = 4\int_0^1 \varphi''(x)(1-x)\cos 2\pi kx, \quad \varphi_{2k}^{(2)} = 4\int_0^1 \varphi''(x)\sin 2\pi kx,$$

$$\psi_{2k-1}^{(2)} = 4\int\limits_0^1 \psi''(x)(1-x)\cos 2\pi kx, \quad \psi_{2k}^{(2)} = 4\int\limits_0^1 \psi''(x)\sin 2\pi kx,$$

$$g_{2k-1}^{(1)} = 4\int\limits_0^1 g'(x)(1-x)\sin 2\pi kx, \quad g_{2k}^{(1)} = 4\int\limits_0^1 g'(x)\cos 2\pi kx.$$

Тогда из оценки (96) имеем

$$\|f(x)\|_{L_2} \le N_8 \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\|\varphi''\|_{L_2}^2 + \|\psi''\|_{L_2}^2 + \|g'\|_{L_2}^2\big) \le N_2^2 \big(\|\varphi\|_{W_2^2}^2 + \|\psi\|_{W_2^2}^2 + \|g\|_{W_2^1}^2\big). \tag{97}$$

Из неравенства (97) вытекает справедливость оценки (92).

Пусть (x, y) — произвольная точка из $\overline{D}$. Из формулы (16) на основании леммы 2 будем иметь

$$|u(x,y)| \le N_9 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| + |\psi_{2k-1}| + |\psi_{2k}| + \frac{1}{k}|g_{2k-1}| + \frac{1}{k}|g_{2k}| \right). \tag{98}$$

Поскольку

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{\varphi_{2k-1}^{(1)}}{2\pi k} - \frac{\varphi_{2k}^{(1)}}{(2\pi k)^2}, \quad \varphi_{2k} = -\frac{\varphi_{2k}^{(1)}}{2\pi k},$$

$$\psi_{2k-1} = -\frac{\psi_{2k-1}^{(1)}}{2\pi k} - \frac{\psi_{2k}^{(1)}}{(2\pi k)^2}, \quad \psi_{2k} = -\frac{\psi_{2k}^{(1)}}{2\pi k},$$

$$\varphi_{2k-1}^{(1)} = 4\int\limits_0^1 \varphi'(x)(1-x)\sin 2\pi kx, \quad \varphi_{2k}^{(1)} = 4\int\limits_0^1 \varphi'(x)\cos 2\pi kx,$$

$$\psi_{2k-1}^{(1)} = 4\int\limits_0^1 \psi'(x)(1-x)\sin 2\pi kx, \quad \psi_{2k}^{(1)} = 4\int\limits_0^1 \psi'(x)\cos 2\pi kx,$$

из (98) получим

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| &\le N_{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\big(|\varphi_{2k-1}^{(1)}| + |\varphi_{2k}^{(1)}| + |\psi_{2k-1}^{(1)}| + |\psi_{2k}^{(1)}|\big) + N_9 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}(|g_{2k-1}| + |g_{2k}|) \\
&\le N_{10} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{2k-1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{2k}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_{2k-1}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_{2k}^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \right] \\
&\quad + N_9 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{2k-1}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{2k}|^2 \right)^{1/2} \right] \\
&\le N_{11}(\|\varphi'\|_{L^2} + \|\psi'\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}) \le N_3(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}).
\end{aligned} \tag{99}$$

При получении оценки (99) были использованы неравенство Коши — Буняковского и равенство $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

Оценка (93) непосредственно следует из полученного неравенства (99).

На основании формулы (17) при любом $x \in [0,1]$ в силу лемм 2 и 3 имеем

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leq N_{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| + |\psi_{2k-1}| + |\psi_{2k}|) + N_{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k(|g_{2k-1}| + |g_{2k}|) \\
&\leq N_{13} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\big(|\varphi_{2k-1}^{(3)}| + |\varphi_{2k}^{(3)}| + |\psi_{2k-1}^{(3)}| + |\psi_{2k}^{(3)}| + |g_{2k-1}^{(2)}| + |g_{2k}^{(2)}|\big) \\
&\leq N_{13} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{2k-1}^{(3)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{2k}^{(3)}|^2\right)^{1/2} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_{2k-1}^{(3)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_{2k}^{(3)}|^2\right)^{1/2}\right] \\
&\quad + N_{13} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{2k-1}^{(2)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{2k}^{(2)}|^2\right)^{1/2}\right] \\
&\leq N_{14}(\|\varphi'''\|_{L_2} + \|\psi'''\|_{L_2} + \|g''\|_{L_2}) \leq N_4(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}). \qquad (100)
\end{aligned}
$$

Из (100) вытекает оценка (94).

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
2. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.
3. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
4. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
5. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
6. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
7. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Вычисл. математика и мат. физика. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
8. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 740–743.
9. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
10. *Сабитов К. Б.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 55. С. 593–596.
11. *Сабитов К. Б., Сафин Э. М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2009. Т. 429, № 4. С. 451–454.
12. *Сабитов К. Б., Сафин Э. М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. № 4. С. 55–62.
13. *Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.

14. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1976. Т. 142. С. 148–155.
15. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
16. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
17. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

Статья поступила 11 августа 2010 г.

Сабитов Камиль Басирович, Мартемьянова Нина Викторовна
Поволжская гос. социально-гуманитарная академия,
ул. Антонова-Овсеенко, 26, Самара 443090
Sabitov_fmf@mail.ru, ninamartem@yandex.ru