Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 512.55

АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА, ГРАДУИРОВАННЫЕ КОНЕЧНЫМИ КОРНЕВЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА C_l

Д. Лю, Н. Ху

Аннотация. Изучаются алгебры Лейбница, градуированные конечными корневыми системам типа C_l.

Ключевые слова: Δ-градуированный, ассоциативная диалгебра, альтернативная диалгебра.

1. Введение

Пусть $\dot{\mathfrak{g}}$ — конечномерная расщепляемая простая алгебра Ли над полем K характеристики 0 с корневым разложением $\dot{\mathfrak{g}} = H \oplus \bigoplus\limits_{\mu\in\Delta} \dot{\mathfrak{g}}_\mu$ относительно расщепляющей подалгебры Картана H. Такая алгебра Ли $\dot{\mathfrak{g}}$ является K-аналогом конечномерной комплексной простой алгебры Ли. Начиная с 1992 г. структура Δ-градуированных алгебр Ли изучалась в различных статьях и играла ключевую роль в построении новых алгебр Ли, к примеру, расширенных аффинных алгебр Ли (см. [1, 2] и т. д.).

По определению из [3] алгебра Ли L над полем K характеристики 0 *градуирована* (*редуцированной*) *корневой системой* Δ или Δ-*градуирована*, если

(1) L содержит как подалгебру конечномерную простую алгебру Ли $\dot{\mathfrak{g}} = H \oplus \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta} \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$ с корневой системой Δ относительно расщепляющей подалгебры Картана $H = \dot{\mathfrak{g}}_0$;

(2) $L = \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta\cup\{0\}} L_\alpha$, где $L_\alpha = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x \ \forall h \in H\}$ при $\alpha \in \Delta\cup\{0\}$;

(3) $L_0 = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$.

Из [3, 4] видим, что структура Δ-градуированных алгебр Ли является тесно связанной со структурой ассоциативных, альтернативных и йордановых алгебр. Следующий результат был доказан в [4] с использованием структурной теории йордановых алгебр.

Теорема (распознавания для типа C_l) [4]. *Пусть L — Δ-градуированная алгебра Ли типа C_l.*

D. Liu is supported by NNSF (N 11071068, 10701019), ZJNSF (N D7080080, Y6100148), Qianjiang Excellence Project (N 2007R10031), "New Century 151 Talent Project" (2008) and "Innovation Team Foundation of the Department of Education" (N T200924) of Zhejiang Province. N. Hu is supported in part by the NNSF (N 10971065), PCSIRT и RFDP (MOE), National and Shanghai Leading Academic Discipline Projects (N B407).

(i) *Если* $l \geq 4$, *то существует унитальная ассоциативная алгебра* A *с инволюцией* $* : A \to A$ *такая, что* L *центрально изогенна алгебре* $\mathrm{sp}_{2l}(A;*)$ *симплектических* $(2l) \times (2l)$ *матриц над* A.

(ii) *Если* $l = 3$, *то* L *центрально изогенна симплектической алгебре Штейнберга* $\mathrm{st}\,\mathrm{sp}_6(A;*)$, *где* A *— альтернативная алгебра с инволюцией, у которой симметрические элементы* $\{a \in A \mid a^* = a\}$ *лежат в ассоциативном центре* A.

(iii) *Если* $l = 2$, *то* L *центрально изогенна конструкции Титса — Кантора — Кёхера унитальной йордановой алгебры* J, *которая содержит йорданову подалгебру симметрических* 2×2 *матриц, а единица* J *лежит в этой подалгебре.*

(iv) *Если* $l = 1$, *то* L *центрально изогенна конструкции Титса — Кантора — Кёхера унитальной йордановой алгебры* J.

Замечание. Две совершенные алгебры Ли (Лейбница) L_1 и L_2 называются *центрально изогенными*, если они имеют одинаковое центральное расширение (с точностью до изоморфизма).

В [5] Ж.-Л. Лодэй ввел неантикоммутативную версию алгебр Ли, у которых операция удовлетворяет соотношению Лейбница (см. (2.5)) и потому называется *алгеброй Лейбница*. Недавно в статьях [6–8] были введены понятия ассоциативной, альтернативной и йордановой диалгебр и исследованы связи этих диалгебр с алгебрами Лейбница.

Опираясь на теорию алгебр Ли, мы вводим понятие Δ-градуированной алгебры Лейбница (алгебра Лейбница, градуированная конечной корневой системой Δ), а затем определяем структуру таких алгебр. Полученные результаты могут быть использованы при классификации алгебр Лейбница.

В [9] структура Δ-градуированных алгебр Лейбница была определена в случаях, когда Δ является системой типа A, D, E. Цель настоящей статьи — определить структуру алгебр Лейбница типа C_l $(l \geq 3)$. Поскольку структурная теория альтернативных и йордановых диалгебр не развита, изучение подобных вопросов для других корневых систем встречает некоторые новые трудности.

Статья организована следующим образом. В п. 2 напоминаем некоторые понятия об алгебрах Лейбница и диалгебрах. В п. 3 определяется структура алгебр Лейбница, градуированных корневыми системами типа C_l $(l \geq 3)$. Всюду далее через K обозначаем некоторое поле характеристики 0. Все (ди)алгебры в данной статье рассматриваются над K.

2. Диалгебры и алгебры Лейбница

Напомним некоторые понятия из теорий ассоциативных диалгебр, альтернативных диалгебр, алгебр Лейбница и их (ко)гомологий, определенные в [5–7, 9–12].

2.1. Диалгебры.

Определение 2.1 [6]. *Диалгебра* $\mathscr{D}$ над K — это K-векторное пространство $\mathscr{D}$ с двумя операциями $\dashv, \vdash$: $\mathscr{D} \otimes \mathscr{D} \to \mathscr{D}$, называемыми *левым* и *правым произведениями.*

Диалгебра называется *унитальной*, если в ней есть выделенная бар-единица: элемент $1 \in \mathscr{D}$ (не обязательно единственный), который является единицей для левого и правого произведений, но только с бар-стороны, т. е. $1 \vdash a = a = a \dashv 1$ для любого $a \in \mathscr{D}$. *Морфизмом диалгебр* называют K-линейное отображение $f : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$, которое сохраняет произведения, т. е. $f(a \star b) = f(a) \star f(b)$, где $\star$ означает либо $\dashv$, либо $\vdash$.

Определение 2.2 [6]. Диалгебра $\mathscr{D}$ над K называется *ассоциативной*, если операции $\dashv$ и $\vdash$ удовлетворяю следующим аксиомам:

$$\begin{gathered} a \dashv (b \dashv c) = (a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \vdash c), \quad (a \vdash b) \dashv c = a \vdash (b \dashv c), \\ (a \vdash b) \vdash c = a \vdash (b \vdash c) = (a \dashv b) \vdash c. \end{gathered} \tag{As}$$

Альтернативные диалгебры впервые введены в [7], а позднее рассматривались также в [8, 13, 14].

Определение 2.3 [7]. Диалгебра $\mathscr{D}$ над K называется *альтернативной*, если операции $\dashv$ и $\vdash$ удовлетворяют следующим аксиомам:

$$\begin{gathered} (a,b,c)_{\dashv} = -(c,b,a)_{\vdash}, \quad (a,b,c)_{\dashv} = (b,c,a)_{\vdash}, \quad (a,b,c)_{\times} = -(a,c,b)_{\vdash}, \\ (a \vdash b) \vdash c = (a \dashv b) \vdash c, \quad a \dashv (b \vdash c) = a \dashv (b \dashv c), \end{gathered} \tag{Alt}$$

где $(a,b,c)_{\dashv} = (a \dashv b) \dashv c - a \dashv (b \dashv c)$, $(a,b,c)_{\vdash} = (a \vdash b) \vdash c - a \vdash (b \vdash c)$ и $(a,b,c)_{\times} = (a \vdash b) \dashv c - a \vdash (b \dashv c)$.

Из определения следуют следующие формулы для альтернативных диалгебр:

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(a,c,b)_{\dashv}, \tag{2.1}$$

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(b,a,c)_{\dashv}, \tag{2.2}$$

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(c,b,a)_{\dashv}. \tag{2.3}$$

Также имеем

$$(a,b,b)_{\dashv} = 0, \quad (a,a,b)_{\vdash} = 0, \quad (a,b,a)_{\times} = 0. \tag{2.4}$$

Примеры. 1. Очевидно, ассоциативной (альтернативной) диалгеброй является ассоциативная (альтернативная) алгебра, если $a \dashv b = a \vdash b = ab$.

2. Пусть C — ассоциативная (альтернативная) конформная алгебра (определение см. в [15]). Тогда пространство C, наделенное новыми операциями $a \vdash b = a_{(0)}b$, $a \dashv b = \sum\limits_{s \geq 0} \frac{1}{s!}(-T)^s\{a_{(s)}b\}$, $a, b \in C$, является ассоциативной (альтернативной) диалгеброй (см. [8, 13, 14]).

3. Тензорное произведение. Пусть $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ — ассоциативные диалгебры, тогда $\mathscr{D} \otimes \mathscr{D}'$ с умножением $(a \otimes a') \star (b \otimes b') = (a \star b) \otimes (a' \star b')$, $\star = \dashv, \vdash$, также является ассоциативной диалгеброй. В частности, если $\mathscr{D}$ — унитальная ассоциативная диалгебра, то $M_n(\mathscr{D}) = M_n(K) \otimes \mathscr{D}$ также унитальная ассоциативная диалгебра.

2.2. Алгебры Лейбница. *Алгеброй Лейбница* L [5] называют векторное пространство над K, наделенное K-билинейным отображением

$$[-,-] : L \times L \to L,$$

удовлетворяющим тождеству Лейбница

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y] \quad \forall x,y,z \in L. \tag{2.5}$$

Очевидно, любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница. Алгебра Лейбница является алгеброй Ли тогда и только тогда, когда $[x,x] = 0$ для всех $x \in L$.

Пусть L — алгебра Лейбница над K. Для любого $z \in L$ определим $\operatorname{ad} z \in \operatorname{End}_k L$ правилом

$$\operatorname{ad} z(x) = -[x,z] \quad \forall x \in L.$$

Из (2.5) следует, что

$$\operatorname{ad} z([x,y]) = [\operatorname{ad} z(x), y] + [x, \operatorname{ad} z(y)]$$

для всех $x, y \in L$. Это означает, что $\operatorname{ad} z$ является дифференцированием L. Такие дифференцирования L называем *внутренними*.

Для любой ассоциативной диалгебры $\mathscr{D}$ определим

$$[x,y] = x \dashv y - y \vdash x.$$

Тогда $\mathscr{D}$, наделенная такой скобкой, является алгеброй Лейбница. Обозначим ее через $\mathscr{D}_L$. Таким образом, $\mathrm{gl}_n(\mathscr{D}) := M_n(\mathscr{D})_L$ является алгеброй Лейбница, которая называется *общей линейной алгеброй Лейбница.*

Пусть L — алгебра Лейбница. Тогда M называется *правым L-модулем*, если M — K-векторное пространство, наделенное действием L:

$$[-,-] : M \times L \to M,$$

удовлетворяющим следующей аксиоме:

$$[m,[x,y]] = [[m,x],y] - [[m,y],x] \quad \forall x,y \in L,\ m \in M.$$

В этом случае будем также говорить, что $\varphi : L \to \operatorname{End}_K M$, $\varphi(x)(m) = [m,x]$, является *правым представлением* L.

Таким образом, для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ любой правый $\mathfrak{g}$-модуль в лейбницевом случае является в точности правым $\mathfrak{g}$-модулем в лиевом случае.

2.3. Алгебры Лейбница, градуированные конечными корневыми системами. Алгебры Лейбница, градуированные конечными корневыми системами, были впервые введены в [9].

Определение 2.4 [9]. Алгебра Лейбница L над полем K характеристики 0 называется *градуированной* (*редуцированной*) *корневой системой* Δ или *Δ-градуированной*, если

(1) L содержит как подалгебру конечномерную простую алгебру Ли $\dot{\mathfrak{g}} = H \oplus \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta} \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$, у которой Δ является корневой системой относительно расщепляющей подалгебры Картана $H = \dot{\mathfrak{g}}_0$;

(2) $L = \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta\cup\{0\}} L_\alpha$, где $L_\alpha = \{x \in L \mid \operatorname{ad} h(x) = -[x,h] = \alpha(h)x\ \forall h \in H\}$ при $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$;

(3) $L_0 = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$.

Замечания. 1. Из условий Δ-градуированности для алгебры Лейбница вытекает, что L является прямой суммой конечномерных неприводимых лейбницевых представлений алгебры $\dot{\mathfrak{g}}$, у которой старшие веса являются корнями, а потому являются либо длинными корнями, либо короткими корнями, либо 0.

2. Если L является Δ-градуированной, то L совершенна. Действительно, данный результат следует из равенства $L_\alpha = [L_\alpha, H]$ для всех $\alpha \in \Delta$ и (3).

3. Алгебра Штейнберга — Лейбница $\mathfrak{stl}(n,\mathscr{D})$ градуирована корневой системой типа A_{n-1}. Пусть $\mathscr{D}$ — коммутативная диалгебра, тогда алгебра Лейбница $\dot{\mathfrak{g}} \otimes \mathscr{D}$ и ее центральные расширения градуированы корневой системой типа $\dot{\mathfrak{g}}$ (см. [16]).

В [9] определена структура алгебр Лейбница, градуированных корневыми системами типов A, D, E с использованием методов, близких к методам из [3]. В действительности, мы имеем следующую теорему.

Теорема 2.5 (распознавания алгебр Лейбница типов A, D, E) [9]. *Пусть L — алгебра Лейбница над K, градуированная корневой системой Δ типа X_l $(l \geq 2)$ $(X_l = A_l, D_l, E_l)$.*

(1) *Если $X_l = A_l$, $l \geq 3$, то существует унитальная ассоциативная K-диалгебра R такая, что L центрально изогенна с $\mathfrak{sl}(l+1, R)$.*

(2) *Если $X_l = A_l$, $l = 2$, то существует унитальная альтернативная K-диалгебра R такая, что L центрально изогенна с алгеброй Штейнберга — Лейбница $\mathfrak{stl}(3, R)$.*

(3) *Если $X_l = D_l$ $(l \geq 4)$, E_l $(l = 6, 7, 8)$, то существует унитальная ассоциативная коммутативная K-диалгебра R такая, что L центрально изогенна с $\dot{\mathfrak{g}} \otimes R$.*

3. Алгебры Лейбница, градуированные C_l $(l \geq 3)$

В данном пункте рассматриваем $\dot{\mathfrak{g}}$ как алгебру Ли $\mathfrak{sp}_{2l}(K)$ кососимметрических $(2l) \times (2l)$-матриц относительно билинейной формы $2l$-мерного пространства с матрицей

$$J = \sum_{i=1}^{r} E_{i,2l+1-i} - \sum_{i=1}^{l} E_{2l+1-i,i}.$$

Пусть $\mathfrak{a}$ — унитальная ассоциативная диалгебра с инволюцией $^{-} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$. Данная инволюция является линейным отображением, переставляющим операторы, т. е. $\overline{a \vdash b} = \bar{a} \dashv \bar{b}$ и $\overline{a \dashv b} = \bar{a} \vdash \bar{b}$. Рассмотрим $M_l(\mathfrak{a})$ — диалгебру $(l \times l)$-матриц над $\mathfrak{a}$ — и индуцированную инволюцию $\sigma : (E_{ij}(a)) \to (E_{ji}(\bar{a}))$. Тогда отображение

$$\tau : \begin{pmatrix} M & P \\ Q & N \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} N^\sigma & -P^\sigma \\ -Q^\sigma & M^\sigma \end{pmatrix}$$

является инволюцией на $M_{2l}(\mathfrak{a})$, где $P, Q, M, N \in M_l(\mathfrak{a})$.

Алгебра Лейбница $\widetilde{S}$ кососимметрических элементов в $\mathrm{gl}_{2l}(\mathfrak{a})$ относительно τ состоит из матриц $\begin{pmatrix} M & P \\ Q & N \end{pmatrix}$ таких, что $M = -N^\sigma$ и $P = P^\sigma$, $Q = Q^\sigma$.

Пусть $\{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq l\}$ — корневая система типа C_l, а Γ — целочисленная решетка, порожденная Δ. Тогда алгебра Лейбница $\widetilde{S} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \widetilde{S}_\gamma$ градуирована Γ обычным способом (детали см. в [4, с. 12]). Обозначим через $S := \mathrm{sp}_{2l}(\mathfrak{a}, -)$ подалгебру в $\widetilde{S}$, порожденную подпространствами $\widetilde{S}_\gamma, \gamma \neq 0$. Тогда алгебра Лейбница $S = \sum_{\gamma \neq 0} \widetilde{S}_\gamma + \sum_{\gamma \neq 0} [\widetilde{S}_\gamma, \widetilde{S}_{-\gamma}]$ является Δ-градуированной.

В случае $l = 3$ для некоторой (неассоциативной) диалгебры $\mathfrak{a}$ мы также можем определить алгебру Лейбница $\mathfrak{S}$ с теми же порождающими подпространствами $\widetilde{S}_\gamma, \gamma \neq 0$, и теми же соотношениями $[\widetilde{S}_{\gamma_1}, \widetilde{S}_{\gamma_2}]$ в $\widetilde{S}$ для всех $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$, как и выше. Она называется *алгеброй Штейнберга — Лейбница* $\mathrm{stl}(\mathrm{sp}_6(\mathfrak{a}, -))$ (детали об алгебрах Штейнберга — Лейбница $\mathrm{stl}(\mathrm{sl}_n(\mathfrak{a}))$ и $\mathrm{stl}(\mathrm{sl}_n(\mathfrak{a}, -))$ см. в [7, 17]).

Утверждение 3.1 [18]. *Пусть $\dot{\mathfrak{g}}$ — расщепляемая простая алгебра Ли типа C_l при $l \geq 3$. Пусть V — пространство $(2l) \times (2l)$-матриц со следом 0, которые симметричны относительно той же самой формы. Тогда $\mathrm{hom}_{\dot{\mathfrak{g}}}(\dot{\mathfrak{g}} \otimes \dot{\mathfrak{g}}, \dot{\mathfrak{g}})$ одномерно и порождается лиевой скобкой, $\mathrm{hom}_{\dot{\mathfrak{g}}}(\dot{\mathfrak{g}} \otimes \dot{\mathfrak{g}}, V)$ порождается отображением, заданным правилом $(x, y) \mapsto x * y = xy + yx - \frac{1}{l}\mathrm{sp}(xy)I_{2l}$, $\mathrm{hom}_{\dot{\mathfrak{g}}}(V \otimes V, \dot{\mathfrak{g}})$ и $\mathrm{hom}_{\dot{\mathfrak{g}}}(V \otimes V, V)$ порождаются $u \otimes v \mapsto [u, v]$ и $u \otimes v \mapsto u * v$ соответственно,*

$\hom_{\dot{\mathfrak g}}(V\otimes\dot{\mathfrak g},\dot{\mathfrak g})$ $(\hom_{\dot{\mathfrak g}}(\dot{\mathfrak g}\otimes V,\dot{\mathfrak g}))$ *и* $\hom_{\dot{\mathfrak g}}(V\otimes\dot{\mathfrak g},V)$ $(\hom_{\dot{\mathfrak g}}(\dot{\mathfrak g}\otimes V,V))$ *порождаются* $v\otimes x\mapsto[v,x]$ $(x\otimes v\mapsto[x,v])$ *и* $v\otimes x\mapsto v*x$ $(x\otimes v\mapsto x*v)$ *для любых* $x,y\in\dot{\mathfrak g}$, $u,v\in V$.

Вышеприведенные результаты показывают, что любая C_l-градуированная алгебра Лейбница L при $l\geq 3$ является прямой суммой присоединенных модулей, малых присоединенных модулей (модулей, изоморфных неприводимому $\dot{\mathfrak g}$-модулю V, у которого старший вес является коротким корнем) или тривиальных модулей (возможно, с заменой четности) для градуированной подалгебры $\dot{\mathfrak g}$. После объединения изоморфных слагаемых можно предполагать, что $L=(\dot{\mathfrak g}\otimes A)\oplus(V\otimes B)\oplus D$, где $\dot{\mathfrak g}\otimes 1\subset\dot{\mathfrak g}\otimes A$. Определим пространства A,B и D и умножение между различными слагаемыми. Сначала заметим, что D — подалгебра в L, поскольку она является централизатором $\dot{\mathfrak g}$.

Для определения умножения на L можем применить те же аргументы, что и в [2]. Действительно, зафиксируем базисные элементы $\{a_i\}_{i\in I}$ из A, $\{b_i\}_{i\in I'}$ из B и выберем a_i,a_j,a_k при $i,j,k\in I$, b_i,b_j,b_k при $i,j,k\in I'$. Видим, что проекция произведения $[\dot{\mathfrak g}\otimes a_i,\dot{\mathfrak g}\otimes a_j]$ на $\dot{\mathfrak g}\otimes a_k$ определяет элемент из $\hom_{\dot{\mathfrak g}}(\dot{\mathfrak g}\otimes\dot{\mathfrak g},\dot{\mathfrak g})$, которое порождено лейбницевым коммутатором. Тогда существуют скаляры $\xi^k_{i,j}$, $\zeta^k_{i,j}$, $\chi^k_{i,j}$, $\nu^k_{i,j}$, $\theta^k_{i,j}$, $\eta^k_{i,j}$, $\varrho^k_{i,j}$ и $\varsigma^k_{i,j}$ такие, что

$$[x\otimes a_i,y\otimes a_j]|_{\dot{\mathfrak g}\otimes A}=[x,y]\otimes\Big(\sum_{k\in I}\xi^k_{i,j}a_k\Big),\ [u\otimes b_i,v\otimes b_j]|_{\dot{\mathfrak g}\otimes A}=[u,v]\otimes\Big(\sum_{k\in I}\zeta^k_{i,j}a_k\Big),$$

$$[x\otimes a_i,v\otimes b_j]|_{\dot{\mathfrak g}\otimes A}=(x*v)\otimes\Big(\sum_{k\in I}\chi^k_{i,j}a_k\Big),\ [v\otimes b_j,x\otimes a_i]|_{\dot{\mathfrak g}\otimes A}=(v*x)\otimes\Big(\sum_{k\in I}\nu^k_{i,j}a_k\Big),$$

$$[x\otimes a_i,y\otimes a_j]|_{V\otimes B}=(x*y)\otimes\Big(\sum_{k\in I'}\theta^k_{i,j}b_k\Big),\ [u\otimes b_i,v\otimes b_j]|_{V\otimes B}=(u*v)\otimes\Big(\sum_{k\in I'}\eta^k_{i,j}b_k\Big),$$

$$[x\otimes a_i,v\otimes b_j]|_{V\otimes B}=[x,v]\otimes\Big(\sum_{k\in I'}\varrho^k_{i,j}b_k\Big),\ [v\otimes b_j,x\otimes a_i]|_{V\otimes B}=[v,x]\otimes\Big(\sum_{k\in I'}\varsigma^k_{i,j}b_k\Big)$$

для любых $x,y\in\dot{\mathfrak g}$ или V, $a_i,b_i\in A$ или B.

Определим линейные отображения: $\circ:A\times A\to A$ правилом

$$a_i\circ a_j=2\sum_{k\in I}\xi^k_{i,j}a_k,$$

$\circ:B\times B\to A$ при помощи

$$b_i\circ b_j=2\sum_{k\in I}\zeta^k_{i,j}a_k,$$

$[\,,\,]:A\times A\to B$ посредством

$$[a_i,a_j]=2\sum_{k\in I'}\theta^k_{i,j}b_k$$

и $[,]:B\times B\to B$ правилом

$$[b_i,b_j]=2\sum_{k\in I'}\eta^k_{i,j}b_k.$$

Определим линейные отображения: $[\,,\,]:A\otimes B\to A$ при помощи

$$[a_i,b_j]=\sum_{k\in I}\chi^k_{i,j}a_k,$$

$B \otimes A \to A$ посредством

$$[b_j, a_i] = \sum_{k \in I} \nu_{i,j}^k a_k,$$

$\circ : A \otimes B \to B$ правилом

$$[a_i, b_j] = \sum_{k \in I'} \varrho_{i,j}^k b_k$$

и $B \otimes A \to B$ при помощи

$$[b_j, a_i] = \sum_{k \in I'} \varsigma_{i,j}^k b_k.$$

Тогда мы можем определить два произведения $\circ$ и $[\, ,\,]$ на $\mathfrak{a} = A \oplus B$ правилом

$$(a+b)\circ(a'+b') = a\circ a'+a\circ b'+b\circ a'+b\circ b', \quad [a+b,\ a'+b'] = [a,a']+[a,b']+[b,a']+[b,b'].$$

Принимая во внимание то, что $\hom_{\mathfrak{g}}(\dot{\mathfrak{g}} \otimes \dot{\mathfrak{g}}, K)$ порождается следом, видим, что существуют билинейная форма $\langle , \rangle : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to D$ и четное билинейное отображение $\mathfrak{a} \times D \to \mathfrak{a} : (a, d) \to ad$ такие, что $1d = 0$ и умножение в L задано при помощи

$$[f \otimes a, g \otimes b] = \left([f, g] \otimes \frac{1}{2} a \circ b + f * g \otimes \frac{1}{2} [a, b] + \operatorname{sp}(fg) \langle a, b \rangle \right), \tag{3.1}$$

$$[f \otimes a, d] = f \otimes ad \tag{3.2}$$

для элементов $f \otimes a, g \otimes b \in \dot{\mathfrak{g}} \otimes A$ или $V \otimes B$, $d \in D$. Кроме того, $1 \circ a = 2a$ и $[1, a] = 0$ для всех $a \in \mathfrak{a}$.

Существуют два унитальных умножения $\dashv$ и $\vdash$ на $\mathfrak{a}$ такие, что

$$a \circ b = a \vdash b + b \dashv a, \tag{3.3}$$

$$[a, b] = a \vdash b - b \dashv a \tag{3.4}$$

для любых однородных $a, b \in \mathfrak{a}$. Более того, полагая $a = 1$, имеем $1 \vdash b = b \dashv 1 = b$, и потому диалгебра A унитальна.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.2. *Линейное отображение* $- : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, *определенное правилом:* $\bar{a} = a$, $\bar{b} = -b$ *для всех* $a \in A$, $b \in B$, *является антиавтоморфизмом порядка* 2 *диалгебры* $(\mathfrak{a}, \vdash, \dashv)$. $\square$

Тождество Якоби $[z_1, [z_2, z_3]] = [[z_1, z_2], z_3] - [[z_1, z_3], z_2]$, примененное к элементам $d_1, d_2 \in D$ и $f \otimes a \in \dot{\mathfrak{g}} \otimes A$ или $V \otimes B$, показывает, что $\phi : D \to \operatorname{End}_K(\mathfrak{a}) : \phi(d)(a) = ad$ является правым представлением алгебры Лейбница D. Применяя его к элементам $f \otimes a, g \otimes b \in \dot{\mathfrak{g}} \otimes A$ или $V \otimes B$ и $d \in D$, получаем

$$[[f \otimes a, g \otimes b], d] = [f \otimes a, [g \otimes b, d]] + [[f \otimes a, d], g \otimes b],$$

а используя (3.1) и (3.2), видим, что это эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} &\left([f, g] \otimes \frac{1}{2} (a \circ b) d + f * g \otimes \frac{1}{2} ([a, b]) d + \operatorname{sp}(fg) [\langle a, b \rangle, d] \right) \\ &\qquad = \left([f, g] \otimes \frac{1}{2} a \circ (bd) + f * g \otimes \frac{1}{2} [a, bd] + \operatorname{sp}(fg) \langle a, bd \rangle \right) \\ &\qquad\qquad + \left([f, g] \otimes \frac{1}{2} (ad) \circ b) + f * g \otimes \frac{1}{2} [ad, b] + \operatorname{sp}(fg) \langle ad, b \rangle \right). \end{aligned}$$

Выберем f, g из $\mathfrak{sp}_{2l}(K)$ (или из V) такими, что оба элемента $[f,g]$ и $f*g$ линейно независимы и $\mathrm{sp}(fg) \neq 0$. Следовательно, для любых $d \in D$ и $a, b \in \mathfrak{a}$ имеем

(i) $(a \circ b)d = (ad) \circ b + a \circ (bd)$,

(ii) $([a,b])d = [ad, b] + [a, bd]$,

(iii) $[\langle a,b\rangle, d] = \langle ad, b\rangle + \langle a, bd\rangle$,

(iv) $\langle A, B\rangle = 0$.

Пп. (i) и (ii) можно объединить, получив, что

$$\phi \text{ — правое представление как дифференцирование, т. е. } \phi : D \to \mathrm{Der}_K(\mathfrak{a}), \tag{3.5}$$

в то время как (iii) означает, что

$$\langle\ ,\ \rangle \text{ инвариантна при действии } D. \tag{3.6}$$

Для любых $f\otimes a, g\otimes b, h\otimes c \in \dot{\mathfrak{g}}\otimes A$ или $V\otimes B$ тождество Якоби эквивалентно следующим двум соотношениям ($\dot{\mathfrak{g}}\otimes A \oplus V\otimes B$ и D — компоненты):

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{sp}([f,g]h)\Big\langle\frac{1}{2}a\circ b, c\Big\rangle + \mathrm{sp}((f*g)h)\Big\langle\frac{1}{2}[a,b], c\Big\rangle\Big)&\\ -\Big(\mathrm{sp}(f[g,h])\Big\langle a, \frac{1}{2}b\circ c\Big\rangle + \mathrm{sp}(f(g*h))\Big\langle a, \frac{1}{2}[b,c]\Big\rangle\Big)&\\ -\Big(\mathrm{sp}([f,h]g)\Big\langle\frac{1}{2}a\circ c, b\Big\rangle + \mathrm{sp}((f*h)g)\Big\langle\frac{1}{2}[a,c], b\Big\rangle\Big) &= 0, \end{aligned}\tag{$*$}$$

$$\begin{aligned}\Big([[f,g],h]\otimes\frac{1}{4}(a\circ b)\circ c + [f,g]*h\otimes\frac{1}{4}[a\circ b, c]&\\ + [f*g,h]\otimes\frac{1}{4}[a,b]\circ c + (f*g)*h\otimes\frac{1}{4}[[a,b],c] + \mathrm{sp}(fg)[\langle a,b\rangle, h\otimes c]\Big)&\\ -\Big([f,[g,h]]\otimes\frac{1}{4}a\circ(b\circ c) + f*[g,h]\otimes\frac{1}{4}[a, b\circ c]&\\ + [f, g*h]\otimes\frac{1}{4}a\circ[b,c] + f*(g*h)\otimes\frac{1}{4}[a,[b,c]] + \mathrm{sp}(gh)f\otimes a\langle b,c\rangle\Big)&\\ -\Big([[f,h],g]\otimes\frac{1}{4}(a\circ c)\circ b + [f,h]*g\otimes\frac{1}{4}[a\circ c, b]&\\ + [f*h,g]\otimes\frac{1}{4}[a,c]\circ b + (f*h)*g\otimes\frac{1}{4}[[a,c],b] + \mathrm{sp}(fh)[\langle a,c\rangle, g\otimes b]\Big) &= 0.\end{aligned}\tag{$**$}$$

Формула $(*)$ может быть записана в виде

$$\mathrm{sp}(fgh)(\langle a\vdash b, c\rangle - \langle a, b\vdash c\rangle - \langle b, c\dashv a\rangle) - \mathrm{sp}(fhg)(\langle b\dashv a, c\rangle - \langle b, a\vdash c\rangle - \langle a, c\dashv b\rangle) = 0.$$

Тогда

$$\langle a\vdash b, c\rangle = \langle a, b\vdash c\rangle + \langle b, c\dashv a\rangle, \tag{3.7}$$

$$\langle a\vdash b, c\rangle = \langle a\dashv b, c\rangle. \tag{3.8}$$

Если $n = 2l > 6$, то положим $f = E_{12} + \varepsilon_1 E_{n-1,n}$, $g = E_{23} + \varepsilon_2 E_{n-2,n-1}$, $h = E_{31} + \varepsilon_3 E_{n,n-2}$ в $(**)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1,2,3$.

Пусть

$$T_i = E_{ii} - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 E_{n+1-i,n+1-i} - \frac{1}{2l}(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)I,$$

$$J_i = E_{ii} + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 E_{n+1-i,n+1-i} - \frac{1}{2l}(1+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)I.$$

Тогда

$$f*[g,h] = T_1+T_2, \quad [f,g*h] = T_1-T_2, \quad [f,[g,h]] = J_1-J_2,$$

$$f*(g*h) = J_1+J_2, \quad [f,g]*h = T_1+T_3, \quad [f*g,h] = T_1-T_3,$$

$$[[f,g],h] = J_1-J_3, \quad (f*g)*h = J_1+J_3, \quad [f,h]*g = -(T_2+T_3),$$

$$[f*h,g] = T_3-T_2, \quad [[f,h],g] = J_2-J_3, \quad (f*h)*g = J_2+J_3.$$

Поскольку $n > 6$, элементы $T_1, T_2, T_3, J_1, J_2, J_3$ линейно независимы. Поэтому

$$(a\circ b)\circ c + [[a,b],c] - a\circ(b\circ c) - [a,[b,c]] = 0, \tag{3.9}$$

$$a\circ(b\circ c) - [a,[b,c]] - (a\circ c)\circ b - [[a,c],b]] = 0, \tag{3.10}$$

$$-(a\circ b)\circ c + [[a,b],c] + (a\circ c)\circ b - [[a,c],b] = 0, \tag{3.11}$$

$$[a\circ b,c] + [a,b]\circ c - [a,b\circ c] - a\circ[b,c] = 0, \tag{3.12}$$

$$-[a,b\circ c] + a\circ[b,c] + [a\circ c,b] + [a,c]\circ b = 0, \tag{3.13}$$

$$[a\circ b,c] - [a,b]\circ c + [a\circ c,b] - [a,c]\circ b = 0. \tag{3.14}$$

Объединение (3.9) и (3.12) дает

$$(a\dashv b)\dashv c = a\dashv(b\dashv c), \tag{3.15}$$

$$(c\vdash b)\vdash a = c\vdash(b\vdash a). \tag{3.16}$$

Сопоставление (3.10) и (3.13) приводит к равенствам

$$(b\dashv c)\dashv a = b\vdash(c\vdash a), \tag{3.17}$$

$$a\dashv(c\vdash b) = (a\dashv c)\dashv b. \tag{3.18}$$

Комбинируя (3.11) и (3.14), получаем

$$c\vdash(a\dashv b) = (c\vdash a)\dashv b. \tag{3.19}$$

Тогда $\mathfrak{a}$ — ассоциативная диалгебра.

Если $l = 3$, то положим $f = E_{12}+\varepsilon_1 E_{56}, g = E_{23}+\varepsilon_2 E_{45}, h = E_{31}+\varepsilon_3 E_{64}$ в (**), где $\varepsilon_i = \pm1$, $i = 1,2,3$. В этом случае $T_1+T_2+T_3 = 0$ при $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$ и $J_1+J_2+J_3 = 0$ при $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$. Следовательно, используя $f\otimes a$, $g\otimes b$, $h\otimes c$ в тождестве Якоби совместно с соотношениями

$$a\circ(b\circ c) + [a,[b,c]] = 2(a\dashv(b\dashv c) + (c\vdash b)\vdash a),$$

$$a\circ(b\circ c) - [a,[b,c]] = 2(a\dashv(c\vdash b) + (b\dashv c)\vdash a),$$

$$(a\circ b)\circ c + [[a,b],c] = 2((a\dashv b)\dashv c + c\vdash(b\vdash a)),$$

$$(a\circ b)\circ c - [[a,b],c] = 2((b\vdash a)\dashv c + c\vdash(a\dashv b)),$$

$$[a,b\circ c] + a\circ[b,c] = 2(a\dashv(b\dashv c) - (c\vdash b)\vdash a),$$

$$[a,b\circ c] - a\circ[b,c] = 2(a\dashv(c\vdash b) - (b\dashv c)\vdash a),$$

$$[a\circ b,c] + [a,b]\circ c = 2((a\dashv b)\dashv c - c\vdash(b\vdash a)),$$

$$[a\circ b,c] - [a,b]\circ c = 2((b\vdash a)\dashv c - c\vdash(a\dashv b)),$$

получаем следующее.

(1) Если $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$, то справедливы (3.12)–(3.14) и

$$(a\circ b)\circ c+[[a,b],c]-a\circ(b\circ c)-[a,[b,c]]+(a\circ b)\circ c-[[a,b],c]-(a\circ c)\circ b+[[a,c],b]=0, \tag{3.20}$$

$$a\circ(b\circ c)-[a,[b,c]]-(a\circ c)\circ b-[[a,c],b]]+(a\circ b)\circ c-[[a,b],c]-(a\circ c)\circ b+[[a,c],b]=0; \tag{3.21}$$

(3.12) дает

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(c,b,a)_{\vdash}; \tag{3.22}$$

(3.13) влечет

$$(a\dashv c)\dashv b - a\dashv(c\vdash b) = -((b\dashv c)\vdash a - b\vdash(c\vdash a)); \tag{3.23}$$

(3.14) приводит к равенству

$$(b,a,c)_{\times} = -(c,a,b)_{\times}; \tag{3.24}$$

(3.20) дает

$$(a,b,c)_{\dashv} - (c,b,a)_{\vdash} = -((b,a,c)_{\times} - (c,a,b)_{\times});$$

(3.21) влечет

$$(a\dashv c)\dashv b - a\dashv(c\vdash b) - ((b\dashv c)\vdash a - b\vdash(c\vdash a)) = (b,a,c)_{\times} - (c,a,b)_{\times}.$$

Тогда

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(b,a,c)_{\times} \tag{3.25}$$

и

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(a\dashv c)\dashv b - a\dashv(c\vdash b)). \tag{3.26}$$

Из (3.25), (3.24) и (3.22) получаем

$$(a,b,c)_{\dashv} = -(b,a,c)_{\times} = (c,a,b)_{\times} = -(a,c,b)_{\dashv} = (b,c,a)_{\vdash} = -(a,c,b)_{\dashv}. \tag{3.27}$$

Следовательно, (3.25) превращается в

$$(a,c,b)_{\dashv} = (a\dashv c)\dashv b - a\dashv(c\vdash b),$$

а потому

$$a\dashv(c\dashv b) = a\dashv(c\vdash b). \tag{3.28}$$

Аналогично

$$(b\dashv c)\vdash a = (b\vdash c)\vdash a. \tag{3.29}$$

(2) Если $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$, то выполняются (3.9)–(3.11) и

$$[a\circ b,c]+[a,b]\circ c-[a,b\circ c]-a\circ[b,c]+[a\circ b,c]-[a,b]\circ c+[a\circ c,b]-[a,c]\circ b=0, \tag{3.30}$$

$$-[a,b\circ c]+a\circ[b,c]+[a\circ c,b]+[a,c]\circ b+[a\circ b,c]-[a,b]\circ c+[a\circ c,b]-[a,c]\circ b=0. \tag{3.31}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(a,b,c)_{\dashv} = (c,b,a)_{\vdash} = (b,a,c)_{\times} = (c,a,b)_{\times}&\\ = (a\dashv c)\dashv b - a\dashv(c\vdash b) = (b\dashv c)\vdash a - b\vdash(c\vdash a).&\end{aligned}$$

Полагая $f = E_{23} - E_{45}, g = E_{12} + E_{56}$ и $h = E_{21} + E_{65}$ и используя подобные вычисления, получаем

$$(a,b,c)_{\dashv} + (c,b,a)_{\vdash} = 0.$$

Следовательно, $(a,b,c)_{\dashv} = (c,b,a)_{\vdash} = (b,a,c)_{\times} = 0$ и $a\dashv(c\dashv b) = a\dashv(c\vdash b)$, $(b\dashv c)\vdash a = (b\vdash c)\vdash a)$.

Из (1) и (2) видим, что $\mathfrak{a}$ является альтернативной диалгеброй при $n = 2l = 6$. Более того, $(A, A, A)_\star = (A, B, B)_\star = 0$, где $\star = \dashv, \vdash, \times$.

При $n = 6$ можно положить $f = E_{51} + E_{6,2}$, $g = E_{12} - E_{56}$, $h = E_{15} - E_{26}$ в $(**)$, тогда $a, b \in A$, $c \in B$; $V \otimes B$-компонента такова:

$$-\frac{1}{2}(E_{12} + E_{56}) \otimes ((a \circ b) \circ c - [a, [b, c]] - (a \circ c) \circ b) = 0.$$

Значит,

$$(a \circ b) \circ c - [a, [b, c]] - (a \circ c) \circ b = 0.$$

Упрощая, получаем

$$(a, b, c)_\dashv - (c, b, a)_\vdash + (b, a, c)_\times - (c, a, b)_\times \\ + (b \dashv c) \vdash a - b \vdash (c \vdash a) - ((a \dashv c) \dashv b - a \dashv (c \vdash b)) = 0.$$

Таким образом, $(A, A, B)_\dashv = (A, A, B)_\vdash = (A, A, B)_\times = 0$, так как $\mathfrak{a}$ альтернативна.

Следовательно, $\mathfrak{a}$ при $n = 6$ является альтернативной диалгеброй с инволюцией $\bar{}$, а пространство симметрических элементов A содержится в ядре $\{x \in \mathfrak{a} \mid (x, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})_\star = 0, \star = \dashv, \vdash, \times\}$ диалгебры $\mathfrak{a}$. Конечно, эти утверждения остаются справедливыми при $n > 6$, но в этом случае верно и большее.

Предположим, что $n = 2l \geq 6$, и рассмотрим тождество Якоби при $f = E_{23} + \varepsilon_1 E_{n-2,n-1}$, $g = E_{12} + \varepsilon_2 E_{n-1,n}$ и $h = E_{21} + \varepsilon_2 E_{n,n-1}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2$. Тогда $[f, [g, h]] = f$, $[[f, h], g] = 0$, $[[f, g], h] = f$, $f * (g * h) = \left(1 - \frac{4}{l}\right) f$, $(f * h) * g = 0$, $(f * g) * h = f$. Из альтернативности $\mathfrak{a}$ имеем

$$a\langle b, c\rangle = \frac{1}{2}(a, b, c)_\dashv + \frac{1}{2l}[a, [b, c]]. \tag{3.32}$$

Пусть $n = 2l \geq 6$. Рассмотрим тождество Якоби при $f = E_{21} + \varepsilon_2 E_{n,n-1}$, $g = E_{12} + \varepsilon_2 E_{n-1,n}$ и $h = E_{23} + \varepsilon_1 E_{n-2,n-1}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2$. Тогда $[[f, g], h] = h$, $[[f, h], g] = 0$, $[f, [g, h]] = h$, $(f * g) * h = \left(1 - \frac{4}{l}\right) h$, $(f * h) * g = 0$, $f * (g * h) = h$. Из альтернативности $\mathfrak{a}$ получаем

$$[\langle a, b\rangle, h \otimes c] = h \otimes \left(\frac{1}{2}(c, b, a)_\vdash + \frac{1}{2l}[[a, b], c]\right). \tag{3.33}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме (последнее утверждение в ней является следствием условия (3) в теореме 2.5).

Теорема 3.3. *Пусть $L = (\dot{\mathfrak{g}} \otimes A) \oplus (V \otimes B) \oplus D$ — алгебра над полем K характеристики* 0*, где $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sp}_{2l}(K)$, $\mathfrak{a} = A \oplus B$ — унитальная диалгебра и D — алгебра Лейбница с умножением, как в* (3.1) *и* (3.2). *Тогда L является алгеброй Лейбница тогда и только тогда, когда*

(1) *$\mathfrak{a}$ ассоциативна при $l \geq 4$;*

(2) *$\mathfrak{a}$ альтернативна при $l = 3$ с инволюцией $\bar{}$ и такая, что $A = \{a \in \mathfrak{a} \mid \bar{a} = a\}$, $B = \{b \in \mathfrak{a} \mid \bar{b} = -b\}$ и A лежит в ядре $\mathfrak{a}$:*

$$\{x \in \mathfrak{a} \mid (x, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})_\star = 0, \ \star = \dashv, \vdash, \times\};$$

(3) *D является подалгеброй Лейбница в L и $\phi : D \to \mathrm{Der}_K(A)(\phi(d)a = ad)$ — правым представлением D как дифференцирования на диалгебре A;*

(4) *$\langle\,,\rangle : A \otimes A \to D$ является K-билинейным и удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $[\langle a,b\rangle,d]=\langle ad,b\rangle+\langle a,bd\rangle$,

(ii) (3.32) *и* (3.33) *выполнены для любых однородных* $d\in D$ *и* $a,b,c\in A$.

Более того, $\mathfrak{sp}_{2l}(K)$*-градуированные алгебры Лейбница* ($l\geq 3$) *являются в точности такими алгебрами с добавленными ограничениями, что*

$$D=\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle=\langle A,A\rangle+\langle B,B\rangle.$$

4. Координатные алгебры и центрально изогенные алгебры Лейбница

Пусть $L=(\dot{\mathfrak{g}}\otimes A)\oplus(V\otimes B)\oplus\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle$ — Δ-градуированная алгебра Лейбница. Назовем $\mathfrak{a}$ с произведениями $\dashv,\vdash$ и разложением $\mathfrak{a}=A\oplus B$ *координатной диалгеброй* для L. В [9] доказано

Утверждение 4.1. *Пусть* L *и* L' *— центрально изогенные алгебры Лейбница и* L *градуирована конечной корневой системой* Δ*. Тогда* L' *также градуирована* Δ. $\square$

Покажем, что ассоциированные координатные диалгебры изоморфны. Затем получим, что все алгебры Лейбница из данного изогенного класса являются Δ-градуированными, если одна из них является таковой и все эти алгебры имеют изоморфные корневые пространства для всех $\alpha\in\Delta$. Они отличаются только по центральным элементам из нулевого корневого подпространства.

Пусть $L=(\dot{\mathfrak{g}}\otimes A)\oplus(V\otimes B)\oplus\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle$ — Δ-градуированная алгебра Лейбница из теоремы 3.3. Предположим, что $\mathfrak{a}$ — унитальная ассоциативная диалгебра с инволюцией $\eta=\bar{\ }$. Положим $D_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}:=\langle D_{a,a'}\mid a,a'\in\mathfrak{a}\rangle$, где $D_{a,a'}$ задан при помощи $a''D_{a,a'}=\frac{1}{2l}[a'',[a,a']]$ (см. (3.32)).

Рассмотрим алгебру Лейбница $K=\mathfrak{sl}_{2l}(\mathfrak{a})\oplus D_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}$ ($l\geq 4$) с умножением, заданным правилами

$$[z\otimes a,z'\otimes a']=[z,z']\otimes\frac{1}{2}a\circ a'+z\circ z'\otimes\frac{1}{2}[a,a']+tr(zz')D_{a,a'},$$
$$[z\otimes a,d]=z\otimes ad,\quad [d,d']=dd'-d'd,$$

где $d,d'\in D_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}$.

Из [9, 19] следует, что K — алгебра Лейбница, градуированная корневой системой A_{2l-1}. Далее, σ и τ, определенные в п. 3, являются антиавтоморфизмами порядка 2 на K. Множество

$$K^-=\{x\in K\mid\sigma(x)=-x\}=(\dot{\mathfrak{g}}\otimes A)+(V\otimes B)+(D_{A,A}+D_{B,B})$$

является подалгеброй Лейбница в K. Более того, K^- — алгебра Лейбница, градуированная корневой системой C_l.

Пусть $\phi:\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle\to\mathrm{Der}_*(\mathfrak{a})=\{d\in\mathrm{Der}(\mathfrak{a}),d(A)\subset A,d(B)\subset B\}$, $\phi(d)a=ad$, — представление (см. (3.5)). Тогда $\phi(D)=D_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}$. Более того, ϕ индуцирует гомоморфизм: $L\to K^-$. Центр $Z(L)$ алгебры L совпадает с ядром ϕ. Таким образом, $L/Z(L)\cong K^-$ при $l\geq 4$.

Более того, алгебра Лейбница $\mathrm{sp}_{2l}(\mathfrak{a},-)$ ($l\geq 4$) также является алгеброй Лейбница, градуированной C_l с координатной диалгеброй $\mathfrak{a}$. Тогда $L/Z(L)\cong\mathrm{sp}_{2l}(\mathfrak{a},-)/Z(\mathrm{sp}_{2l}(\mathfrak{a},-))$ и L, $\mathrm{sp}_{2l}(\mathfrak{a},-)$ центрально изогенны.

В случае $l=3$, как и в теореме 3.3, можно доказать, что $\mathfrak{a}$ является унитальной альтернативной диалгеброй с инволюцией $\bar{\ }$ такой, что $A=\{a\in\mathfrak{a}\mid\bar{a}=a\}$ лежит в ядре $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{stl}(\mathrm{sp}_6(\mathfrak{a},-))$ (определенная в п. 3) является C_3-градуированной алгеброй Лейбница (см. теорему 3.3).

В этом случае можно определить $\varphi:\mathrm{stl}(\mathrm{sp}_6(\mathfrak{a},-))\to L$ при помощи $\varphi:\widetilde{S}_\gamma\to L_\gamma$, поскольку $\mathrm{stl}(\mathrm{sp}_6(\mathfrak{a},-))$ является свободно порожденной.

Утверждение 4.2. *Гомоморфизм φ централен.*

Доказательство. Ясно, что гомоморфизм φ отображает $\widetilde{S}_\gamma(\gamma \neq 0)$ в L_γ изоморфно, следовательно, $\ker\varphi \subset \mathrm{stl}(\mathrm{sp}_6(\mathfrak{a}, -))_0$. Таким образом, $[\ker\varphi, L_\alpha] \subset L_\alpha \cap (\ker\varphi) = (0)$, т. е. $\ker\varphi$ центрально по (2) из определения п. 1. $\square$

Таким образом, по утверждениям 4.1 и 4.2 получаем следующий основной результат данной статьи.

Теорема 4.3 (распознавания алгебр Лейбница типа C_l). *Пусть L — Δ-градуированная алгебра Лейбница типа C_l ($l \geq 4$).*

(i) *Если $l \geq 4$, то существует унитальная ассоциативная диалгебра $\mathfrak{a}$ с инволюцией $* : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ такая, что L центрально изогенна алгебре $\mathrm{sp}_{2l}(\mathfrak{a}, -)$ симплектических $(2l) \times (2l)$-матриц над $\mathfrak{a}$, определенной в п. 3.*

(ii) *Если $l = 3$, то L центрально изогенна симплектической алгебре Штейнберга $\mathrm{stl}(\mathrm{sp}_6(\mathfrak{a}, -))$, где $\mathfrak{a}$ — альтернативная инволютивная диалгебра, у которой симметрические элементы $\{a \in \mathfrak{a} \mid \bar{a} = a\}$ лежат в ядре $\mathfrak{a}$.*

Замечание. Подобные исследования для типов C_1, C_2, B_l, F_4 и G_2 могут использовать йордановы диалгебры, определенные в [8], однако это более сложно. Предположительно должна быть хорошая взаимосвязь между Δ-градуированными алгебрами Лейбница и йордановыми диалгебрами.

Благодарности. Авторы благодарят профессора Y. Gao и рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Allison B. N., Benkart G., Gao Y.* Central extensions of Lie algebras graded by finite root systems // Math. Ann. 2000. V. 316, N 3. P. 499–527.
2. *Allison B. N., Benkart G., Gao Y.* Lie algebras graded by root systems BC_r, $r \geq 2$. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 158, N. 751).
3. *Berman S., Moody R. V.* Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy // Invent. Math. 1992. V. 108. P. 323–347.
4. *Benkart G., Zelmanov E.* Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras // Invent. Math. 1996. V. 126. P. 1–45.
5. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algèbres de Lie: Les algèbres de Leibniz // Enseign. Math. 1993. V. 39. P. 269–294.
6. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 7–66. (Lecture Notes in Math.; V. 1763).
7. *Liu D.* Steinberg Leibniz algebras and superalgebras // J. Algebra. 2005. V. 283, N 1. P. 199–221.
8. *Gubarev V. Yu., Kolesnikov P. S.* The Tits–Kantor–Koecher construction for Jordan dialgebras // Comm. Algebra. 2011. V. 39, N 2. P. 497–520.
9. *Liu D., Hu N.* Leibniz algebras graded by the finite root systems // Alg. Colloq. 2010. V. 17, N 3. P. 431–446.
10. *Loday J.-L.* Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras // Math. Scand. 1995. V. 77. P. 189–196.
11. *Loday J.-L.* Cyclic homology. Berlin: Springer-Verl., 1998. (Grundl. Math. Wiss.; V. 301).
12. *Loday J.-L., Pirashvili T.* Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)-homology // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 138–158.
13. *Колесников П. С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 322–339.
14. *Колесников П. С.* Конформные представления алгебр Лейбница // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 540–547.
15. *Kac V.* Vertex algebras for beginners. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Univ. Lect. Ser.; V. 10).
16. *Liu D., Lin L.* On the toroidal Leibniz algebras // Acta Math. Sinica, English Ser. 2008. V. 214, N 2. P. 227–240.

17. *Liu D., Hu N.* Steinberg unitary Leibniz algebras // Linear Algebra Appl. 2005. V. 405. P. 279–303.

18. *Seligman G. B.* Rational methods in Lie algebras. New York: Marcel Dekker, 1976. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 17).

19. Hu N., Liu D., Zhu L. Leibniz superalgebras graded by the finite root systems // Proc. Int. Conf. Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theor. Phys. Singapore: World Sci., 2012. P. 51–68.

Статья поступила 21 сентября 2009 г., окончательный вариант — 25 мая 2011 г.

Dong Liu (Лю Дун)
Department of Mathematics, Huzhou Teachers College
Zhejiang Huzhou, 313000, P. R. China
`ldecnu2001@yahoo.com`

Naihong Hu (Ху Найхун)
Department of Mathematics, East China Normal University
Shanghai, 200241, P. R. China
`nhhu@math.ecnu.edu.cn`