Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ X–РАЗЛОЖИМЫХ ГРУППАХ ПРИ $X = \{1, 2, 4\}$

С. Го, Ц. Ли, К. П. Шум

Аннотация. Нормальная подгруппа N конечной группы G называется n-разложимой подгруппой, если она является объединением n различных классов сопряженности группы G. Доказано, что конечная неабелева группа, которая не совпадает со своим коммутантом, изоморфна Q_{12} или $Z_2 \times A_4$, или $G = \langle a, b, c \mid a^{11} = b^5 = c^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^4,\ c^{-1}ac = a^{-1},\ c^{-1}bc = b^{-1}\rangle$, если каждая ее нетривиальная нормальная подгруппа 2-разложима или 4-разложима.

Ключевые слова: n-разложимость, X-разложимость, класс G-сопряженности.

1. Введение

На первых этапах исследования строения конечных групп часто обращались к использованию числа классов сопряженности (см., например, [1–3]). В последнее время появилась тенденция изучения структуры нормальных подгрупп конечных групп при условии, что нормальная подгруппа является объединением «небольшого» числа классов сопряженности группы (см. [4–6]). К примеру, в [7, 8] описана структура нормальной подгруппы, являющейся объединением двух или трех классов сопряженности, а в [9] — структура нормальной подгруппы, являющейся объединением четырех классов сопряженности. С другой стороны, встречается задача определения структуры конечной группы, у которой каждая нетривиальная нормальная подгруппа есть объединение данного числа классов сопряженности группы.

Напомним, что нормальная подгруппа N конечной группы G называется *n-разложимой*, если N является объединением n различных классов сопряженности G, и конечная группа G называется *n-разложимой*, если G не является простой и каждая нетривиальная нормальная подгруппа в G n-разложима. Впервые 2-разложимые нормальные подгруппы исследованы в [10], где они назывались *полными нормальными подгруппами*. В [11] рассмотрены 3-разложимые нормальные подгруппы. Недавно в [12, 13] были охарактеризованы n-разложимые конечные группы при $n = 7, 8, 9, 10$. В [14] исследованы конечные группы, которые не совпадают со своим коммутантом и в которых любая нетривиальная нормальная подгруппа либо 3-разложима, либо 4-разложима, и дана классификация таких групп.

В настоящей статье мы изучаем вопрос, поставленный в [14], а именно классифицируем конечные группы, в которых любая нетривиальная нормальная подгруппа либо 2-разложима, либо 4-разложима.

The research of the work was partially supported by the National Natural Science Foundation of China (11071155), SRFDP (200802800011), the Shanghai Leading Academic Discipline Project (J50101).

На протяжении данной статьи G' означает коммутант группы G, $\Phi(G)$ — подгруппу Фраттини в G, а $Z(G)$ — центр G. Если G — это p-группа, то $\Omega_i(G) = \langle x \in G \mid x^{p^i} = 1 \rangle$ при $i = 1, 2, \ldots, t$. Далее Z_n означает циклическую группу порядка n, а $d(n)$ — множество положительных делителей числа n.

2. Предварительные результаты

В данном разделе сначала напоминаем некоторые основные понятия, а затем приводим некоторые элементарные результаты, полезные в дальнейшем.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть G — группа, а N_G — множество собственных нормальных подгрупп в G. Элемент A из N_G называется *n-разложимым*, если A является объединением n различных классов сопряженности группы G. В этом случае обозначаем n через $ncc(A)$. Кроме того, пусть $\mathscr{K}_G = \{ncc(A) \mid A \in N_G\}$, а X — непустое подмножество положительных целых чисел. Группа G называется *X-разложимой*, если $\mathscr{K}_G = X$. В [14] поставлен следующий

Вопрос [14, вопрос 2.7]. *Пусть X — конечное подмножество положительных целых чисел, содержащее 1. Существует ли X-разложимая группа G?*

Начнем рассуждения со следующего примера.

Пример 2.1. Пусть G — абелева группа порядка n. Положим $X = d(n) - \{n\}$. Очевидно, что G X-разложима.

Данный пример говорит о том, что интересно найти неабелевы группы для поставленного выше вопроса. Приведем два примера $\{1, 2, 4\}$-разложимых групп.

Пример 2.2. Пусть A_4 — знакопеременная группа степени 4, Z_2 — циклическая группа порядка 2 и $G = Z_2 \times A_4$. Тогда легко видеть, что группа G имеет четыре нетривиальных нормальных подгруппы: Z_2, K_4, $Z_2 \times K_4$ и A_4. Более того, Z_2 и K_4 2-разложимые , а $Z_2 \times K_4$ и A_4 являются 4-разложимыми. Следовательно, G — это $\{1, 2, 4\}$-разложимая группа.

Пример 2.3 [15, пример 3; 14, пример 2.6]. Пусть Q_{4n} — обобщенная группа кватернионов порядка $4n$ при $n \geq 2$. Тогда эта группа может быть представлена в виде $Q_{4n} = \langle a, b \mid a^{2n} = 1,\ b^2 = a^n,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Согласно [14] Q_{4n} имеет $n + 3$ класса сопряженности:

$$\{1\}; \quad \{a^n\}; \quad \{a^r, a^{-r}\}\ (1 \leq r \leq n - 1);$$

$$\{a^{2j}b \mid 0 \leq j \leq n - 1\}; \quad \{a^{2j+1}b \mid 0 \leq j \leq n - 1\}.$$

Кроме того, если n нечетно, то любая собственная нормальная подгруппа группы Q_{4n} содержится в $\langle a \rangle$, а потому Q_{4n} A-разложима для $A = \left\{\frac{d+1}{2} \mid d|n \text{ и } 2 \nmid d\right\} \cup \left\{\frac{d+2}{2} \mid d|2n \text{ и } 2|d\right\}$. Если n четно, то $H = \langle a^2, b \rangle$ и $K = \langle a^2, ab \rangle$ — нормальные подгруппы в Q_{4n}, которые обе $\frac{n+4}{2}$-разложимы. Следовательно, Q_{4n} в данном случае является B-разложимой для $B = A \cup \left\{\frac{n+4}{2}\right\}$.

Теперь легко видеть, что Q_{12} $\{1, 2, 4\}$-разложима.

Следующая лемма элементарна, однако она полезна для нашего доказательства.

Лемма 2.1. *Пусть p и q — простые числа, а n — положительное целое число такое, что $p^n = 1 + 3q$. Тогда либо $p = 7$, $n = 1$ и $q = 2$, либо $p = 2$, $n = 4$ и $q = 5$.*

Доказательство. Если p нечетно, то $q = 2$ и потому $p = 7$, а $n = 1$. Пусть $p = 2$ и $3q = 2^n - 1$. Если n простое, то существуют целые k и l такие, что $3 = 2nk + 1$, $q = 2nl + 1$. Из равенства $3 = 2nk + 1$ следует, что $n = 1$; противоречие. Следовательно, существуют положительные целые $r > 1$ и $t > 1$ такие, что $n = rt$. Тогда

$$3q = (2^r)^t - 1 = (2^r - 1)((2^r)^{t-1} + (2^r)^{t-2} + \cdots + 2^r + 1).$$

Из единственности разложения видим, что $3 = 2^r - 1$ и $q = (2^r)^{t-1} + (2^r)^{t-2} + \cdots + 2^r + 1$. Таким образом, $r = 2$. С другой стороны,

$$3q = (2^t)^r - 1 = (2^t - 1)((2^t)^{r-1} + (2^t)^{r-2} + \cdots + 2^t + 1).$$

Аналогично $3 = 2^t - 1$ и $t = 2$. Следовательно, $n = 4$ и $q = 5$.

Лемма 2.2. *Не существует простого p такого, что $2p+1$ является простым, а $2p^2 + p + 1 = 2^n$ для некоторого положительного целого n.*

Доказательство. Предположим, что существует простое p такое, что $2p+1$ также простое, а $2p^2 + p + 1 = 2^n$ для некоторого положительного целого n. Тогда $p \geq 3$, $n \geq 4$ и $p(2p+1) = 2^n - 1$. Если n простое, то из $p|(2^n - 1)$ и $(2p+1)|(2^n - 1)$ следует, что существуют целые k и l такие, что $p = 2nk + 1$, $2p+1 = 2nl+1$. Поэтому $2(2nk+1)+1 = 2nl+1$ и, следовательно, $2nk+1 = nl$, откуда $n|1$, что противоречит тому, что $n \geq 4$. Значит, n не является простым. Далее, предположим, что $n = rt$, где $r > 1$ и $t > 1$ — положительные целые числа. Тогда

$$p(2p+1) = (2^r)^t - 1 = (2^r - 1)((2^r)^{t-1} + (2^r)^{t-2} + \cdots + 2^r + 1).$$

Из единственности разложения вытекает, что $p = 2^r - 1$ и $2p + 1 = (2^r)^{t-1} + (2^r)^{t-2} + \cdots + 2^r + 1$. Следовательно, $2^{r+1} = (2^r)^{t-1} + (2^r)^{t-2} + \cdots + 2^r + 2$, а тогда $2^r = 2^{r(t-1)-1} + 2^{r(t-2)-1} + \cdots + 2^{r-1} + 1$, что дает заключительное противоречие. Доказательство завершено.

3. Основная теорема

В данном разделе всегда полагаем $X = \{1, 2, 4\}$ и даем классификацию X-разложимых групп, которые не совпадают со свои коммутантом, рассматривая два отдельных случая, в которых G' либо 2-разложима, либо 4-разложима. Начинаем с X-разложимых абелевых групп.

Теорема 3.1. *Пусть G — X-разложимая абелева группа. Тогда $G \cong Z_8$, $Z_4 \times Z_2$, $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$.*

Доказательство. Применить пример 2.1.

Теорема 3.2. *Пусть G — X-разложимая неабелева группа и $G \neq G'$. Если G' 2-разложима, то $G \simeq Q_{12}$ или $Z_2 \times A_4$.*

Доказательство. Так как G' 2-разложима, то G' — минимальная нормальная подгруппа в G, а потому существует простое p такое, что G' — элементарная абелева p-группа. Предположим, что $|G'| = p^n$.

Сначала заметим, что $Z(G) \neq 1$. Действительно, рассмотрим подгруппу Фраттини $\Phi(G)$ в G. Если $G' \leqslant \Phi(G)$, то G — нильпотентная группа, что влечет

$Z(G) \neq 1$. Поэтому предполагаем $G' \nleqslant \Phi(G)$. В данном случае существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G' \nleqslant M$. Следовательно, $G = G'M$ и $G' \bigcap M = 1$. Более того, $M \cong G/G'$ является абелевой группой. При $1 \neq x \in M$ максимальность M влечет $C_G(x) = M$ или $C_G(x) = G$. Если $C_G(x) = G$, то $x \in Z(G)$, а потому $Z(G) \neq 1$. Если $C_G(x) = M$ для любого $1 \neq x \in M$, то G является группой Фробениуса с ядром G' и дополнением M. Из свойств групп Фробениуса следует, что M — циклическая группа. Так как G является X-разложимой неабелевой группой, видим, что порядок M не является простым числом. Пусть K — произвольная нетривиальная подгруппа в M. Тогда $G'K \trianglelefteq G$, а потому $G'K$ содержит четыре класса G-сопряженности. Далее, y должен быть p'-элементом для любого $1 \neq y \in G'K \setminus G'$, и существует холлова p'-подгруппа M_1 в G такая, что $y \in M_1$. Замечая сопряженность M и M_1, находим, что M_1 также является абелевой группой, стало быть, $|y^G| = \frac{|G|}{|M_1|} = |G'|$. Следовательно,

$$|G'||K| = |G'K| = 3|G'|,$$

а значит, K является циклической группой порядка 3. Поскольку M абелева, 3 является единственным собственным делителем $|M|$, а потому $|M| = 9$. С другой стороны, M действует транзитивно и без неподвижных точек на $G' \setminus \{1\}$. Таким образом, $p^n - 1 = 9$, что невозможно. Следовательно, $Z(G) \neq 1$.

Если $Z(G)$ содержит четыре класса G-сопряженности, то $|Z(G)| = 4$ и $Z(G)$ — максимальная подгруппа в G. Это означает, что $G/Z(G)$ является циклической группой простого порядка, а значит, G абелева; противоречие. Следовательно, $Z(G)$ содержит только два класса G-сопряженности и $|Z(G)| = 2$.

Если $Z(G) \cap G' \neq 1$, то $G' = Z(G)$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Если G нильпотентна, то G — 2-группа. Так как нильпотентная группа имеет нормальные подгруппы любого возможного порядка, G обладает нормальной подгруппой N порядка 4. Если N содержит четыре класса G-сопряженности, то $N \leq Z(G)$, что противоречит равенству $|Z(G)| = 2$. Следовательно, N содержит только три класса G-сопряженности, что невозможно. Поэтому G не является нильпотентной. В этом случае существует нечетное простое q такое, что $q \mid |G|$. Пусть $g \in G$ имеет порядок q. Поскольку $G'\langle g \rangle \trianglelefteq G$, то $G'\langle g \rangle$ содержит четыре класса G-сопряженности, а потому $G'\langle g \rangle$ — максимальная нормальная подгруппа в G. Так как $G'\langle g \rangle$ является циклической группой порядка $2q$, то $q - 1$ элементов порядка q в $G'\langle g \rangle$ образуют один класс G-сопряженности. Значит, $(q - 1) \mid |G/G'|$. Максимальность $G'\langle g \rangle$ влечет, что $q - 1$ является простым. Таким образом, $q = 3$ и $6 \mid |G/G'|$. Так как G/G' абелева, легко видеть, что G — это расширение группы порядка 2 при помощи циклической группы порядка 6, откуда вытекает абелевость G; противоречие. Следовательно, $Z(G) \cap G' = 1$.

Рассмотрим нормальную подгруппу $H = G'Z(G)$ в G. Она содержит четыре класса G-сопряженности и является максимальной нормальной подгруппой в G. Значит, $|G| = 2p^n q$ для некоторого простого q. Если $p = 2$, то $q \neq 2$. В противном случае G является 2-группой, а потому $G' \leq Z(G)$; противоречие с $Z(G) \cap G' = 1$. Так как G' имеет два класса G-сопряженности и $|Z(G)| = 2$, то $2^n - 1 = q$. Предположим, что K является подгруппой в G, содержащей G', и $|K| = 2^n(2^n - 1)$. Тогда K нормальна в G, содержит четыре класса G-сопряженности и является группой Фробениуса. Поэтому все элементы порядка q в K образуют два класса G-сопряженности. Пусть $x \in K$ — элемент порядка

q. Тогда из равенства $C_G(x) = 2q$ следует, что $|x^G| = 2^n$, а потому

$$2^n(2^n - 1) = 2^n + 2^n + 2^n.$$

Следовательно, $n = 2$ и $|K| = 12$. Легко видеть, что $K \cong A_4$ и $Z(G) \cap K = 1$. В этом случае $G \simeq Z_2 \times A_4$.

Если $p \neq 2$, то существуют элементы в H порядков 2, p или $2p$. Все элементы порядка p в H могут образовывать один класс G-сопряженности. Замечая, что H абелева, имеем $p^n - 1 = q$, так что $p = 3, n = 1$ и $q = 2$. В данном случае G является расширением циклической группы H порядка 6 при помощи циклической группы порядка 2. Пусть $H = \langle a \rangle$ и $1 \neq b \in G \setminus H$. Тогда из $b^{-1}ab \neq a$ следует $b^{-1}ab = a^5$. С другой стороны, поскольку $|G/H| = 2$, то $b^2 \in H$. Если $b^2 = 1$, то

$$G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \cong D_{12}.$$

Очевидно, что $H_1 = \langle a^2, b \rangle = \langle a^2 \rangle \rtimes \langle b \rangle$ является нормальной подгруппой в G порядка 6, но H_1 содержит три класса G-сопряженности, что невозможно. Если $b^2 = a^2$ или $b^2 = a^4$, то b имеет порядок 6. Поскольку $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = \frac{|\langle a \rangle||\langle b \rangle|}{|G|} = 3$, то $|Z(G)| \geq 3$, что противоречит $|Z(G)| = 2$. Следовательно, $b^2 = a^3$ и

$$G = \langle a, b \mid a^6 = 1,\ b^2 = a^3,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle \cong Q_{12}.$$

Доказательство завершено.

Теорема 3.3. *Пусть G — X-разложимая неабелева группа и $G \neq G'$. Если G' 4-разложима, G — группа следующего типа:*

$$G = \langle a, b, c \mid a^{11} = b^5 = c^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^4,\ c^{-1}ac = a^{-1},\ c^{-1}bc = b^{-1} \rangle.$$

Доказательство. Так как G' 4-разложима, по [9, теоремы 1, 2] группа G' должна быть одной из следующих:

1) G' — p-группа и $G''' = 1$;

2) $G' \cong A_5$ — знакопеременная группа степени 5 и $G/C_G(G') \cong S_5$;

3) G' — группа порядка $|G'| = p^a q^b$, где p и q — различные простые числа, a и b — положительные целые.

Кроме того, если G' типа 3, то для G' возможны следующие два случая:

(A) G' — прямое произведение своих элементарных абелевых силовских p- и q-подгрупп;

(B) G' — группа Фробениуса с ядром N порядка p^a, а G'/N является либо циклической группой порядка q или q^2, либо группой кватернионов порядка 8, где N — объединение двух классов сопряженности в G.

Случай 1. $G' \cong A_5$ и $G/C_G(G') \cong S_5$. Поскольку A_5 без центра, $G' \cap C_G(G') = 1$, а потому $G'C_G(G')/C_G(G') \simeq G'$. Значит, $G'C_G(G')$ — собственная нормальная подгруппа в G. Если $|C_G(G')| > 1$, то $G'C_G(G')$ содержит более четырех классов G-сопряженности, откуда $|C_G(G')| = 1$ и $G \cong S_5$. Однако S_5 не содержит нормальной 2-разложимой подгруппы, так что $G' \ncong A_5$.

Случай 2. G' является p-группой и $G''' = 1$. Пусть $|G'| = p^n$. Так как G' — максимальная нормальная подгруппа в G, существует простое q, такое что $|G| = p^n q$. Если G' абелева, то $C_G(x) \geq G'$ для любого $x \in G'$, откуда $|x^G| = 1$ или q. Следовательно,

$$p^n = 1 + 1 + 1 + q, \quad \text{или} \quad p^n = 1 + 1 + 2q, \quad \text{или} \quad p^n = 1 + 3q.$$

Если $p^n = 1 + 1 + 1 + q$, то легко видеть, что $|Z(G)| = 3$, тем самым $Z(G)$ 3-разложима; противоречие. Если $p^n = 1+1+2q$, то $p^n = 2(1+q)$, а значит, $p = 2$ и $1+q = 2^{n-1}$. В этом случае $|Z(G)| = 2$. Пусть Q — силовская q-подгруппа в G. Тогда $G' = Z(G) \times [G', Q]$. Ясно, что $[G', Q]Q$ является нормальной подгруппой в G, следовательно,

$$G = Z(G) \times [G', Q]Q.$$

Получаем $G' = [G', Q]$; противоречие. Если $p^n = 1 + 3q$, то по лемме 2.1 имеем либо $p = 7$, $n = 1$ и $q = 2$, либо $p = 2$, $n = 4$ и $q = 5$. Если $p = 7$, $n = 1$ и $q = 2$, то ясно, что не существует нормальной 2-разложимой подгруппы в G. Если $p = 2$, $n = 4$ и $q = 5$, то поскольку G' является элементарной абелевой 2-группой порядка 2^4, не существует нормальной 2-разложимой подгруппы в G. Следовательно, G' не является абелевой, а потому G' — метабелева p-группа.

Если $Z(G') \neq G''$, то поскольку $Z(G')$ и G'' содержат два класса G-сопряженности, $Z(G')G'' = G'$ и G' абелева; противоречие. Следовательно, $Z(G') = G''$. Если $p = q$, то G является p-группой. Так как $G' \leqslant \Phi(G)$ и $|G/G'| = p$, то G — циклическая группа, что дает противоречие. Значит, $p \neq q$. Поскольку G неабелева, получаем $|Z(G)| = 1$ или $|Z(G)| = 2$.

Предположим сначала, что $|Z(G)| = 2$. Если $Z(G) \cap G' = 1$, то $G = Z(G)G'$, а тогда $G' = G''$; противоречие. Следовательно, $Z(G) \leqslant G'$, откуда $Z(G) = G'' = Z(G')$. Отсюда следует, что $p = 2$. Замечая, что $Z(G')$, $\Phi(G')$ и $\Omega_1(G')$ являются нормальными подгруппами в G, легко получаем $Z(G) = Z(G') = \Omega_1(G') = \Phi(G')$, а значит, $G' \cong Q_8$. Так как $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong S_4$ [16, 5.3.3], то $q = 3$, поэтому $G \cong Q_8 \rtimes Z_3$. Однако Q_8 содержит только три класса $Q_8 \rtimes Z_3$-сопряженности, что невозможно.

Далее предполагаем, что $|Z(G)| = 1$ и $|G''| = p^s$. Пусть $1 \neq g_1 \in G''$. Тогда из $g_1 \in Z(G')$ и $|Z(G)| = 1$ получаем $C_G(g_1) = G'$, откуда $p^s - 1 = q$. При $g_2 \in G' \backslash G''$ имеем $C_G(g_2) \geq \langle g_2, G'' \rangle$, так что $|C_G(g_2)| = p^{s+t_1} \geq p^{s+1}$. Поскольку G' содержит четыре класса G-сопряженности, существует $g_3 \in G' \backslash G'' \cup g_2^G$. Рассуждая, как выше, получаем $|C_G(g_3)| = p^{s+t_2} \geq p^{s+1}$. Таким образом, $p^n - p^s = \frac{p^n q}{p^{s+t_1}} + \frac{p^n q}{p^{s+t_2}}$, а потому

$$p^s(p^{n-s} - 1) = q(p^{n-s-t_1} + p^{n-s-t_2}).$$

С другой стороны, так как G'/G'' является минимальной нормальной подгруппой в G/G'', а xG'' и yG'' сопряжены в G/G'', если x и y сопряжены в G, то G'/G'' содержит не больше трех классов G/G''-сопряженности. Поскольку G/G'' неабелева, длина класса G/G''-сопряженности любого неединичного элемента из G'/G'' равна q. Следовательно,

$$q + q = p^{n-s} - 1 \quad \text{или} \quad q = p^{n-s} - 1.$$

Если $q + q = p^{n-s} - 1$, то из равенства $p^s(p^{n-s} - 1) = q(p^{n-s-t_1} + p^{n-s-t_2})$ следует $2p^s q = q(p^{n-s-t_1} + p^{n-s-t_2})$, откуда $p^{n-2s-t_1} + p^{n-2s-t_2} = 2$ и $p^{n-2s-t_1} = p^{n-2s-t_2} = 1$. Значит, $t_1 = t_2 = t$ и $n = 2s + t$. Если p нечетно, то так как $q = p^s - 1$, видим, что $q = 2$, $p = 3$ и $s = 1$. В данном случае существует только одна минимальная подгруппа в G', т. е. G' циклическая; противоречие. Если $p = 2$, то $q = 2^s - 1$ нечетно. Однако $q+q$ четно, а $2^{n-s} - 1$ нечетно; противоречие с равенством $q + q = 2^{n-s} - 1$. Если $q = p^{n-s} - 1$, то $n = 2s$ и из равенства $p^s(p^{n-s} - 1) = q(p^{n-s-t_1} + p^{n-s-t_2})$ следует $p^{n-2s-t_1} + p^{n-2s-t_2} = 1$. Значит, $p = 2$ и $t_1 = t_2 = 1$. В этом случае $2^n = 2^{2s} = 2^s + 2^{s+1} + 2^{s+1} = 2^s(1 + 2 + 2)$, что невозможно.

Случай 3. G' — группа порядка $p^a q^b$. Поскольку G' является максимальной нормальной подгруппой в G, существует простое r такое, что $|G| = p^a q^b r$. Если G' является прямым произведением своих элементарных абелевых силовских p- и q-подгрупп, то запишем $G' = P_1 \times Q_1$, где $|P_1| = p^a$ и $|Q_1| = q^b$. Если $r = p$, то $Z(P) \cap P_1 \neq 1$ при $P \in \operatorname{Syl} p(G)$. Так как P_1 имеет два класса G-сопряженности, $p = 2$ и P_1 является циклической группой порядка 2. В этом случае G/Q_1 абелева, поэтому $G' \leq Q_1$, что дает противоречие. Следовательно, можем считать, что $p \neq r \neq q$. Поскольку P_1 и Q_1 являются 2-разложимыми, $p^a - 1 = r = q^b - 1$, что невозможно. Значит, можем предполагать, что G' является группой Фробениуса с ядром N порядка p^a. Тогда N — минимальная нормальная подгруппа в G, которая также 2-разложима. Более того, G'/N изоморфна либо циклической группе порядка q или q^2, либо Q_8. Замечая 2-разложимость G'', получаем $G'' = N$.

Так как G'/G'' абелева, G'/G'' изоморфна циклической группе порядка q или q^2. Однако если G'/G'' изоморфна циклической группе порядка q^2 и H/G'' является подгруппой порядка q в G'/G'', то $H \lhd G$ и $G'' < H < G'$, поэтому H является 3-разложимой, что невозможно. Следовательно, G'/G'' изоморфна циклической группе порядка q. Пусть Q — силовская q-подгруппа в G'. Используя аргумент Фраттини, получаем $G = G'N_G(Q) = G''N_G(Q)$. Отсюда следует, что $G/G'' \cong N_G(Q)$, так как $N_G(Q) \cap G'' = 1$, а потому $N_G(Q)$ неабелева.

Если $r = q$, то $N_G(Q)$ абелева, поскольку $|N_G(Q)| = q^2$ и все группы порядка q^2 абелевы. Следовательно, $r \neq q$. Если $r = p$ и $P \in \operatorname{Syl} p(G)$, то $P = G''(P \cap N_G(Q))$, поэтому $|P \cap N_G(Q)|_p = p$. Так как G' является группой Фробениуса и $Z(G) = 1$, для $1 \neq x \in Z(P) \cap G''$ получаем $C_G(x) = P$, а потому $|G : C_G(x)| = q$. Если $G'' \nleq Z(P)$, то существует $y \in G''$ такой, что $y \notin Z(P)$. В этом случае $|G : C_G(y)| > q$, поэтому x и y не лежат в одном и том же классе G-сопряженности в противоречие с тем, что G'' содержит только два класса G-сопряженности. Следовательно, $G'' \leq Z(P)$ и P абелева. Так как G'' является минимальной нормальной подгруппой в G, видим, что Q действует транзитивно на $G''\backslash\{1\}$, а потому $p^a - 1 = q$. Далее, предположим, что $1 \neq x \in Q$. Тогда $C_G(x) = Q$ и $|x^G| = |G : C_G(x)| = p^{a+1}$. Поскольку G' содержит четыре класса G-сопряженности, $p^{a+1} + p^{a+1} = qp^a - p^a$ и $q = 2p + 1$. Следовательно, $p^a = 2(p+1)$. Это означает, что $p = 2$ и $2^a = 6$, что невозможно, откуда $q \neq r \neq p$.

Пусть R — силовская r-подгруппа в G. Если R действует тривиально на G'', то, рассуждая, как выше, видим, что $p^a - 1 = q$ и $p^a r + p^a r = qp^a - p^a$. Отсюда следует, что $p = 2$, $q = 2^a - 1$ и $r = 2^{a-1} - 1$. Если $a \geq 4$, то a или $a - 1$ четно. Без ограничения общности можем предполагать, что $a = 2k$ для $k > 1$. Тогда $q = 2^a - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$, что является противоречием, так как $2^k - 1$ и $2^k + 1$ не равны 1, а q — простое число. Таким образом, $a \leq 3$. Ясно, что остался лишь случай $a = 3$, $q = 7$ и $r = 3$. В этом случае $|C_G(G'')| = 24$. Поскольку $G'' \trianglelefteq G$, видим, что $C_G(G'') \trianglelefteq G$ и $G/C_G(G'')$ абелева. Отсюда следует $G' \leq C_G(G'')$; противоречие. Следовательно, можем предполагать, что R действует нетривиально на G''. Так как G'' 2-разложима, R действует без неподвижных точек на $G''\backslash\{1\}$, а потому $p^a - 1 = qr$. Аналогично имеем $p^a r + p^a r = qp^a - p^a$. Значит, $q = 2r + 1$ и $p^a = 2r^2 + r + 1$. Если r нечетно, то $p = 2$. Однако по лемме 2.1 уравнение $2^a = 2r^2 + r + 1$ не имеет решений, т. е. $r = 2$. Если $r = 2$, то $q = 5$ и $p = 11$ при $a = 1$. В этом случае ясно, что

$$G = \langle a, b, c \mid a^{11} = b^5 = c^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^4,\ c^{-1}ac = a^{-1},\ c^{-1}bc = b^{-1} \rangle$$

X-разложима. Доказательство теоремы завершено.

Авторы благодарны рецензенту за его (ее) ценные предложения и полезные комментарии, отраженные в заключительной версии данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *López A. V., López J. V.* Classification of finite groups according to the number of conjugacy classes. II // Israel J. Math. 1986. V. 56. P. 188–221.

2. *López A. V., de Elguea L. O.* On the number of conjugacy classes in a finite group // J. Algebra. 1988. V. 115. P. 46–74.

3. *Chillag D., Herzog M.* On the length of the conjugacy classes of finite groups // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 110–125.

4. *Ashrafi A. R., Sahraei H.* Subgroups which are a union of a given number of conjugacy classes // Groups St. Andrews 2001 in Oxford. V. 1. (Oxford, 2001). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. P. 101–109. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 304).

5. *Ashrafi A. R., Sahraei H.* On finite groups whose every normal subgroup is a union of the same number of conjugacy classes // Vietnam J. Math. 2002. V. 30, N 3. P. 289–294.

6. *Ashrafi A. R., Zhao Y.* On 5- and 6-decomposable finite groups // Math. Slovaca. 2003. V. 53, N 4. P. 373–383.

7. *Shahryari M., Shahabi M. A.* Subgroups which are the union of two conjugacy classes // Bull. Iranian Math. Soc. 1999. V. 25, N 1. P. 59–71.

8. *Shahryari M., Shahabi M. A.* Subgroups which are the union of three conjugacy classes // J. Algebra. 1998. V. 207. P. 326–332.

9. *Riese U., Shahabi M. A.* Subgroups which are the union of four conjugacy classes // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 2. P. 695–701.

10. *Shi W. J.* A class of special minimal normal subgroups (Chinese) // J. Southwest Teachers College. 1984. V. 9. P. 9–13.

11. *Wang J.* A special class of normal subgroups (Chinese) // J. Chengdu Univ. Sci. Tech. 1987. V. 4. P. 115–119.

12. *Ashrafi A. R., Shi W. J.* On 7- and 8-decomposable finite groups // Math. Slovaca. 2005. V. 55, N 3. P. 253–262.

13. *Ashrafi A. R., Shi W. J.* On 9- and 10-decomposable finite groups // J. Appl. Math. Comput. 2008. V. 26. P. 169–182.

14. *Ashrafi A. R.* On decomposability of finite groups // J. Korean Math. Sci. 2004. V. 41, N 3. P. 479–487.

15. *Ashrafi A. R., Venkataraman G.* On finite groups whose every proper normal subgroup is a union of a given number of conjugacy classes // Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 2004. V. 114, N 3. P. 217–224.

16. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004.

Статья поступила 22 февраля 2011 г.

Xiuyun Guo (Го Сююнь), Jiali Li (Ли Цзяли)
Department of Mathematics, Shanghai University,
Shanghai, 200444, P. R. China
xyguo@staff.shu.edu.cn

K. P. Shum (Шум Кар-Пинь)
Institute of Mathematics, Yunnan University,
Kunming, 650091, P. R. China