*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2012. Том 53, № 2*

*УДК 512.541*

# О ПРОЕКТИВНОМ КОММУТАНТЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

**А. Р. Чехлов**

**Аннотация.** Даны описания проективного коммутанта и проективного центра нередуцированных групп, а также сепарабельных, векторных, алгебраически компактных и некоторых других абелевых групп.

**Ключевые слова:** нормальное кольцо эндоморфизмов, коммутатор эндоморфизмов, вполне инвариантный подмодуль, проективно необразующий элемент, проективно полупервичный подмодуль.

Все модули в статье предполагаются унитарными, кольца — ассоциативными, группы — абелевыми (т. е. модулями над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$). Напомним, что если $R$ — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов $a$ и $b$. Если $a_1, \dots, a_n \in R$, то $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$; $Z(R)$ — центр кольца $R$; $\operatorname{Id} R = \{\pi \in R \mid \pi^2 = \pi\}$.

Через $M$ будем обозначать некоторый модуль; $E(M)$ — кольцо его эндоморфизмов; $Pr(M) = \operatorname{Id}(E(M))$; $\langle H \rangle$ — подмодуль, порожденный подмножеством $H \subseteq M$. Запись $H \leq M$ означает, что $H$ — подмодуль в $M$; $H \leq fi\, M$ означает, что $H$ — вполне инвариантный подмодуль в $M$, т. е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(M)$. Если $f\colon A \to B$ — гомоморфизм, то $f|H$ — ограничение $f$ на $H \subseteq A$. Если $B, G$ — модули и $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через $\operatorname{Hom}(B, G)X$ обозначим подмодуль в $G$, порожденный всеми подмножествами $fX$, где $f \in \operatorname{Hom}(B, G)$. Через $1_M$ обозначим тождественный автоморфизм модуля $M$. Если $H \leq M$ и $\pi H \subseteq H$ для всех $\pi \in Pr(M)$, то подмодуль $H$ называется *проективно инвариантным* (кратко *pi-подмодулем*) и обозначается через $H \leq pi\, M$. В [1–3] автор изучал проективно инвариантные подгруппы. Если $[\xi, \eta]H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in E(M)$, то подмодуль $H$ называется *ci-подмодулем*; *ci*-подгруппы изучались в [4–8]. Напомним, что кольцо называется *нормальным* [9], если все его идемпотенты центральны.

Пусть $A$ — абелева группа. Тогда $r(A)$ обозначает ее ранг; $o(a)$ — порядок ее элемента $a$; $A^1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nA$; если не оговорено противное, то $A_p$ — ее $p$-компонента, а $t(A)$ — периодическая часть; $\Pi(t(A)) = \{p \in P \mid A_p \neq 0\}$; если $A$ — периодическая группа, то будем писать просто $\Pi(A)$. Если $A$ — группа без кручения, то $t_A(a)$ — тип, а $\chi_A(a)$ — характеристика ее элемента $a$, индекс $A$ иногда убирается; далее, если $t$ — некоторый тип и $\chi$ — характеристика, то $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$, $A(\chi) = \{a \in A \mid \chi(a) \geq \chi\}$. Если $A$ — однородная группа без кручения, то $t(A)$ — ее тип. Если $0 \neq A$ — ограниченная $p$-группа, то наименьшее натуральное $m$ со свойством $p^m A = 0$ называется *экспонентой*

---

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт П 937 от 20 августа 2009 г.).

группы $A$ и обозначается через $e(A)$. Если $A$ — $p$-группа, $a \in A$ и $o(a) = p^k$, то $e(a) = k$.

Подгруппа $H$ группы $A$ называется *чистой*, если $nH = H \cap nA$ для каждого натурального $n$, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $P$ — множество всех простых чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел, $Z_{p^\infty}$ — квазициклическая $p$-группа, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — группа целых $p$-адических чисел и $Z_n$ — циклическая группа порядка $n$.

Подмодуль $H \leq M$ назовем *коммутаторно-проективно инвариантным* (кратко *cpi-подмодулем*), если $[\xi, \eta]H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in Pr(M)$. Ясно, что если $H \leq pi\, M$, то $H \leq cpi\, M$.

*Проективным центром* (кратко *P-центром*) модуля $M$ назовем следующий его подмодуль: $PZ(M) = \{a \in M \mid [\xi, \eta]a = 0$ для всех $\xi, \eta \in Pr(M)\}$. Если $G \leq fi\, M$, то $PZ(G) \subseteq PZ(M)$; в частности, если кольцо $E(G)$ нормально, то $G \subseteq PZ(M)$. Если $M$ — модуль такой, что все его ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами, и $E(M)$ — кольцо, не являющееся нормальным, то $PZ(M) = 0$.

Подмодуль $P(M) = \langle [\varphi, \psi]M \mid \varphi, \psi \in Pr(M)\rangle$ назовем *проективным коммутантом* (кратко, *P-коммутантом*) модуля $M$. Ясно, что если $P(M) \subseteq H \leq M$, то $H \leq cpi\, M$. Определим по индукции $P_0(M) = M$, $P_1(M) = P(M), \dots, P_{n+1}(M) = \langle [\varphi, \psi]P_n(M) \mid \varphi, \psi \in Pr(M)\rangle$ и $P_\alpha(M) = \bigcap\limits_{\sigma<\alpha} P_\sigma(M)$ при предельном ординале $\alpha$.

Модуль $M$ назовем *P-разрешимым*, если $P_n(M) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое $n$ назовем *классом* (или *ступенью*) $P$-разрешимости модуля $M$. Прямые слагаемые $P$-разрешимых модулей $P$-разрешимы.

Если $H \leq cpi\, M$, то положим $PZ(M/H) = \{\bar{a} \in M/H \mid [\pi, \theta]\bar{a} = 0$ для всех $\pi, \theta \in Pr(M)\}$. Полагаем

$$PZ_0(M) = 0, \quad PZ_1(M) = PZ(M), \dots, PZ_{n+1}(M)/PZ_n(M) = PZ(M/PZ_n(M))$$

и $PZ_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\rho<\alpha} PZ_\rho(M)$ при предельном ординале $\alpha$.

Если все проекции подмодуля $G$ продолжаются до проекций самого модуля $M$, то считаем, что $P_n(G) \subseteq P_n(M)$.

Приведем следующие простые свойства.

**1.** *Если $\pi \in Pr(M)$, то $\pi \in Z(E(M))$ в точности тогда, когда $(1-\pi)M \leq fi\, M$ и $\pi M \leq fi\, M$* (в [9, *утверждение* 3.15] *подобное свойство отмечается для случая, когда $Pr(M) \subseteq Z(E(M))$*).

**2.** *Пусть $\theta \in Pr(M)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *$G = \theta M \leq fi\, M$;*

(б) *$\xi\theta = \theta\xi$ для любого $\xi \in Pr(M)$ со свойством $\ker\theta \subseteq \ker\xi$;*

(в) *$(1-\theta)\xi\theta = 0$ для любого $\xi \in Pr(M)$.*

*Если $R$ — кольцо с 1 и $(1-\theta)\xi\theta = 0$ для некоторых $\xi, \theta \in \mathrm{Id}\, R$, то $\theta\xi\theta \in \mathrm{Id}\, R$ и $(1-\theta)\xi(1-\theta) \in \mathrm{Id}\, R$.*

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна. Пусть выполнено (б). Если $\varphi \in E(M)$, то $\xi = \theta + (1-\theta)\varphi\theta \in Pr(M)$ и $\ker\theta \subseteq \ker\xi$. Из условия $\xi = \xi\theta = \theta\xi = \theta$ следует равенство $(1-\theta)\varphi\theta = 0$, что в силу произвольности $\varphi$ влечет (а) и (в).

Пусть выполнено (в) и $M = B \oplus G$, где $B = \pi M$, $\pi = 1 - \theta$. Если $f \in \mathrm{Hom}(G, B)$, то $\xi = \pi + \pi f\theta \in Pr(M)$ и $\pi\xi\theta = \pi f\theta = 0$. Это влечет равенство $\mathrm{Hom}(G, B) = 0$. Следовательно, (в) $\Rightarrow$ (а).

Из доказательства следует, что в (б) и (в) условие $\xi \in Pr(M)$ можно заменить условием $\xi \in E(M)$.

Докажем последнее утверждение. Из $(1-\theta)\xi\theta = 0$ следует, что $\xi\theta = \theta\xi\theta$. Поэтому если $\xi\theta\xi\theta - \xi\theta \neq 0$, то $\theta\xi\theta - \xi\theta \neq 0$; противоречие. Аналогично если $\pi\xi\pi\xi\pi - \pi\xi\pi \neq 0$, где $\pi = 1-\pi$, то $\pi\xi - \pi\xi\pi = \pi\xi(1-\pi) \neq 0$.

**3.** *Пусть $R$ — кольцо с 1. Следующие условия эквивалентны:*
(а) $\operatorname{Id} R$ *состоит из перестановочных между собой элементов;*
(б) множество $\operatorname{Id} R$ *мультипликативно замкнуто;*
(в) $\operatorname{Id} R \subseteq Z(R)$, *т. е. кольцо $R$ нормально.*

Импликации (а) $\Rightarrow$ (б), (в) $\Rightarrow$ (а) очевидны. Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (в). Пусть $\pi \in \operatorname{Id} R$ и $\pi x - x\pi \neq 0$ для некоторого $x \in R$. Если $\pi(\pi x - x\pi) \neq 0$, то $\pi x(1-\pi) \neq 0$ и $\pi x(1-\pi) = (\pi + \pi x(1-\pi))(1-\pi)$, где $\pi + \pi x(1-\pi), 1-\pi \in \operatorname{Id} R$. По условию $\pi x(1-\pi) \in \operatorname{Id} R$. Однако $(\pi x(1-\pi))^2 = 0 \neq \pi x(1-\pi)$. Если же $\pi(\pi x - x\pi) = 0$, то $-(1-\pi)x\pi = (1-\pi)(\pi x - x\pi) \neq 0$. Аналогичным образом приходим к противоречию.

Из свойства 3 следует, что кольцо $E(M)$ нормально в точности тогда, когда $P(M) = 0$, а из доказательства импликации (б) $\Rightarrow$ (в) вытекает справедливость следующего свойства.

**4.** *Если $H \leq cpi\, M$, то $\pi\varphi(1-\pi)H \subseteq H$, в частности, $\pi[\pi,\varphi]H \subseteq H$ для любых $\pi \in Pr(M)$ и $\varphi \in E(M)$.*

Из свойства 4 непосредственно следует, что всякое $cpi$-прямое слагаемое вполне инвариантно.

**5.** $PZ(M), P(M) \leq pi\, M$.

Действительно, пусть $a \in PZ(M)$, $\pi, \xi, \eta \in Pr(M)$, $x \in M$. Согласно свойству 4 $\pi[\xi,\eta](1-\pi)a = 0$ и $(1-\pi)[\xi,\eta]\pi a = 0$. Так как $[\xi,\eta]a = 0$, то $\pi[\xi,\eta]\pi a = 0$. Откуда $[\xi,\eta]\pi a = 0$, т. е. $\pi PZ(M) \subseteq PZ(M)$. Имеем $\pi[\xi,\eta](1-\pi)x \in P(M)$ и $(1-\pi)[\xi,\eta]\pi x \in P(M)$. Поскольку $[\xi,\eta]\pi x \in P(M)$, то $\pi[\xi,\eta]\pi x \in P(M)$. Отсюда $\pi[\xi,\eta]x \in P(M)$, т. е. $\pi P(M) \subseteq P(M)$.

**6.** *В группе без кручения $A$ любая ее $cpi$-подгруппа ранга 1 лежит в $P$-центре.*

Доказательство. Пусть $B \leq cpi\, A$, $r(B) = 1$ и $G$ — чистая подгруппа в $A$, порожденная $B$. Если $G$ проективно инвариантна в $A$, то утверждение очевидно. Допустим, что $x = \pi a \notin G$ для некоторых $\pi \in Pr(M)$ и $a \in B$. Если теперь $\theta \in Pr(M)$, то $[1-\pi,\theta]a \in G$. Значит, $n[1-\pi,\theta]a = ma$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$. Допустим, что $m \neq 0$. Тогда $mx = m\pi a = n\pi[1-\pi,\theta]a = n(\pi\theta(1-\pi))a \in G$; противоречие. Если же $[1-\pi,\theta]a = -[\pi,\theta]a = 0$, то $[\pi,\theta]G = 0$, т. е. $B \subseteq G \subseteq P(A)$.

**Лемма 1.** *Пусть $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, $\pi_i\colon M \to M_i$ — соответствующие проекции и $H \leq M$. Тогда*

1) *$H \leq cpi\, M$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{Hom}(M_i, M_j)\pi_i H \subseteq H \cap M_j$ и $[\pi_i\xi, \pi_i\eta]\pi_i H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in Pr(M)$, где $i, j \in I$ и $j \neq i$;*

2) *если $M_i \leq fi\, M$ и $B_i \leq M_i$, то $B = \bigoplus\limits_{i\in I} B_i \leq cpi\, M$ в том и только в том случае, когда $B_i \leq cpi\, M_i$ для всех $i \in I$;*

3) *$cpi$-подмодуль $H$ модуля $M$ является его $fi$-подмодулем в том и только в том случае, когда $\pi_i H = H \cap M_i$ и $H \cap M_i \leq fi\, M_i$ для каждого $i \in I$.*

Доказательство. 1. Включение $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)\pi_i H \subseteq H \cap M_j$ следует из свойства 4. Пусть теперь $x \in H$, $\xi, \eta \in Pr(M)$. Имеем

$$[\xi, \eta]x = \Big[\Big(\sum_{i\in I}\pi_i\Big)\xi\Big(\sum_{j\in I}\pi_j\Big), \Big(\sum_{k\in I}\pi_k\Big)\eta\Big(\sum_{s\in I}\pi_s\Big)\Big]x$$
$$= \sum_{i\in I}[\pi_i\xi, \pi_i\eta]\pi_i x + \sum_{i,j,k,s\in I}[\pi_i\xi\pi_j, \pi_k\eta\pi_s]x, \quad (1)$$

где в последней сумме $i, j, k, s$ не принимают одно и то же значение одновременно. Второе слагаемое в (1) содержится в $\sum\limits_{i,j\in I(i\neq j)} \mathrm{Hom}(M_i, M_j)\pi_i H$, что доказывает необходимость. Достаточность вытекает из (1). Утверждения 2 и 3 вытекают из п. 1.

В модуле, являющемся прямой суммой вполне инвариантных подмодулей с нормальными кольцами эндоморфизмов, всякий подмодуль будет *cpi*-подмодулем. Если модуль является прямой суммой подмодулей с коммутативными кольцами эндоморфизмов, то из леммы 1 и леммы 1 в [8] следует, что *cpi*-подмодули являются *ci*-подмодулями.

Пусть $A = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ и $H = \langle a + pb\rangle$, где $o(a) = p$, $o(b) = p^3$. Для подгруппы $H$ выполнены условия п. 1 леммы 1, поэтому $H \leq cpi\, A$. Однако $H \nleq fi\, A$.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

**Лемма 2.** *Пусть $H \leq cpi\, M$. Тогда*

*1) если $B$ — прямое слагаемое модуля $M$ и $\pi$ — проекция $M$ на $B$, то $H \cap B$, $\pi H \leq cpi\, B$;*

*2) если $M = \bigoplus M_i$, $\pi_i\colon M \to M_i$ — соответствующие проекции и $H_0 = \bigoplus(H \cap M_i)$, $H^0 = \bigoplus(\pi_i H)$, то $H_0, H^0 \leq cpi\, M$, $H_0 \leq H \leq H^0$ и $H_0 = H^0$ если и только если $H = \bigoplus(H \cap M_i)$.*

Несложно проверяется, что если $H \leq fi\, G$ и $G \leq cpi\, A$, то $H \leq cpi\, A$; если $H \leq cpi\, G$ и $G \leq fi\, A$, то $H \leq cpi\, A$. Как показывает пример 2 из [8], может случиться так, что $H \leq cpi\, G$, $G \leq cpi\, A$, но $H \nleq cpi\, A$.

**Лемма 3.** 1. *Пусть каждый элемент модуля $M$ содержится в таком его прямом слагаемом $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, что для каждого $M_i$ найдется $M_j$ ($j \neq i$) со свойством $M_i \cong M_j$. Тогда все cpi-подмодули модуля $M$ вполне инвариантны.*

2. *Пусть $M = B \oplus G$, $\pi\colon M \to B$ — проекция, $\theta = 1 - \pi$ и $G \leq fi\, M$. Подмодуль $H \leq M$ является cpi-подмодулем тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}(B, G)\pi H \subseteq H \cap G$, а $\pi H$ и $\theta H$ — подмодули модулей $B$ и $G$ соответственно такие, что $[\xi, \eta]\pi H \subseteq H \cap B$, $[\alpha, \beta]\theta H \subseteq H \cap G$ для любых $\xi, \eta \in Pr(B)$, $\alpha, \beta \in Pr(G)$.*

Доказательство. 1. Если $H \leq cpi\, M$, то в данном случае $H = \bigoplus(H \cap M_i)$. Действительно, если $\pi$ — проекция $M$ на $M_i$ и $\pi h = a \neq 0$ для некоторого $h \in H$, то при условии, что $\varphi\colon M_i \to M_j$ и $\psi\colon M_j \to M_i$ — взаимно обратные изоморфизмы, ввиду леммы 1 имеем $b = \varphi a \in H \cap M_j$ и $a = \psi b \in H \cap M_i$. Аналогично показывается, что $fa \in H \cap M_i$ для любого $f \in E(M_i)$. Этого в силу п. 3 леммы 1 достаточно для вполне инвариантности $H$.

2. Вытекает из леммы 1 и свойства 2.

Напомним, что *$n$-м инвариантом Ульма — Капланского* группы $A$ [10] называется кардинальное число $f_A(n) = r(p^n A[p]/p^{n+1}A[p])$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Будем говорить, что $p$-группа $A$ *удовлетворяет условию* $(*)$, если найдутся такие $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$, что $f_A(k) = 1$, $f_A(k+1) = \cdots = f_A(k+r) = 0$ и $f_A(k+r+1) = 1$.

В такой группе $A$ существуют *cpi*-подгруппы, не являющиеся вполне инвариантными. Действительно, пусть $a \in p^k A[p]$, $b \in p^{k+r+1}A[p]$ и $b = pc$. Тогда $c \in p^{k+r}A[p^2]$. Из леммы 1 следует, что $H = \langle a + c, p^{k+r+1}A[p^2]\rangle \leq cpi\, A$. Однако $a \notin H$, поэтому $H \nleq pi\, A$.

**Следствие 1.** *Пусть $A$ — сепарабельная $p$-группа, не удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда все cpi-подгруппы группы $A$ являются вполне инвариантными.*

Доказательство. Пусть $f_A(n) = \mathfrak{m}_n$. Тогда для $n \geq 1$ имеем $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n \oplus G_n$, где $A_n \cong \bigoplus\limits_{\mathfrak{m}_{n-1}} Z_{p^n}$, а $G_n = A_{n+1} \oplus G_{n+1}$ [10, доказательство предложения 20.13]. В силу сепарабельности каждый элемент группы $A$ содержится в прямом слагаемом $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если группа $A$ не удовлетворяет условию $(*)$ и $H \leq cpi\, A$, то из лемм 1, 3 следует, что $\pi H \subseteq H$ для проекции $\pi$ на каждое циклическое прямое слагаемое. В силу п. 3 леммы 1 подгруппа $H$ вполне инвариантна.

**Предложение 1.** *В группе $A$ каждая ее подгруппа является cpi-подгруппой тогда и только тогда, когда $E(A)$ — нормальное кольцо.*

Доказательство. Необходимость. Так как прямые слагаемые группы $A$ вполне инвариантны, все ее $p$-компоненты $A_p$ коциклические. Значит, для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место разложение $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m} \oplus B_m$, где $B_m[p_j] = 0$ при $j = 1, \dots, m$. Отсюда следует, что периодичность $A$ влечет коммутативность кольца $E(A)$. Если $a$ — элемент конечного порядка, то $a \in A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m}$ для некоторого $m$, а поскольку кольцо $E(A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_m})$ коммутативно, $[\alpha, \beta]a = 0$ для любых $\alpha, \beta \in E(A)$. Пусть теперь $a$ — элемент бесконечного порядка. Имеем $[\varphi, \psi]a \in \langle a\rangle$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(A)$. Поэтому $[\varphi, \psi]a = na$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\varphi[\varphi, \psi]a \in \langle a\rangle$ по свойству 4, имеем $\varphi na = sa$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Аналогично $n\psi a = ka$, где $k \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что $a \in B_m$, где $m$ такое натуральное, что $B_m$ не содержит элементов, порядки которых делятся на простые делители числа $n$. Поэтому равенство $n^2[\varphi, \psi]a = 0$ влечет $[\varphi, \psi]a = 0$, что ввиду свойства 3 доказывает нормальность $E(A)$.

Достаточность очевидна.

Из леммы 3 вытекает, что в делимой группе $D = t(D) \oplus D_0$ каждая *cpi*-подгруппа $H$ либо является периодической вполне инвариантной подгруппой в $D$, либо имеет вид $H = t(D) \oplus H_1$ для некоторой подгруппы $0 \neq H_1 \leq D_0$, причем $H_1 = D_0$, если группа $D_0$ разложима.

Если $D$ — делимая часть $p$-группы $A = B \oplus D$, $H \leq cpi\, A$, $\theta\colon A \to D$ — проекция и $r(D) > 1$, то из леммы 1 в силу инъективности $D$ следует, что $H \cap D = \theta H$. Если же $r(D) = 1$, то возможен случай, когда $H \cap D \neq \theta H$. Например, если $B = \langle b\rangle$ — циклическая группа, $e(b) = k \geq 1$, $d \in D$ и $e(d) = n \geq 2k$, то $H = \langle b + d\rangle \leq cpi\, A$. Однако $\theta H = \langle d\rangle \neq H \cap D = \langle p^k d\rangle$. Подобная ситуация рассматривается в следующей лемме.

**Лемма 4.** *Пусть $A = B \oplus D$, где $B$ — редуцированная, а $D$ — делимая группы, $\pi\colon A \to B$ — проекция и $H \leq A$. Тогда*

1) *если $\pi H$ — периодическая группа и $D \cong \mathbb{Q}$, то $H \leq cpi\, A$ если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq H \cap B$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(A)$;*

2) *если $D \cong \bigoplus\limits_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$, где $\Pi$ — некоторое множество простых чисел, то $H \leq cpi\, A$ если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq (H \cap B) \oplus (H \cap D)$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(A)$;*

3) *если $A$ — $p$-группа и $H$ — ее неограниченная cpi-подгруппа, то $D \subseteq H$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Поскольку $D \leq fi\, A$ и $E(D)$ — коммутативное кольцо, то $[\varphi, \psi]H = [\varphi, \psi](\pi H)$. Следовательно, $[\varphi, \psi]H$ — периодическая подгруппа, значит, она содержится в $H \cap B$.

Достаточность очевидна.

2. Необходимость. Пусть $h = b + d \in H$, где $b \in B$, $d \in D$ и $\theta = 1 - \pi$. Тогда $[\varphi, \psi](b + d) = [\varphi, \psi]b = [(\pi + \theta)\varphi, (\pi + \theta)\psi]b = [\pi\varphi, \pi\psi]b + [\pi\varphi, \theta\psi]b + [\theta\varphi, \pi\psi]b + [\theta\varphi, \theta\psi]b$. Согласно лемме 1 первое слагаемое содержится в $H \cap B$, а остальные в $H \cap D$ (учитывая, что $\pi\varphi\theta\psi b = 0$ и $\pi\psi\theta\varphi b = 0$).

Достаточность очевидна.

3. Если $\pi H$ — неограниченная подгруппа в $B$, то $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H = D$ и $D \subseteq H$ по лемме 1. Если же $p^n(\pi H) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $p^n H$ — неограниченная подгруппа в $D$. Поскольку всякая собственная подгруппа в $Z_{p^\infty}$ ограниченная, условие $D \cong Z_{p^\infty}$ сразу влечет, что $D \subseteq H$. Если же $r(D) > 1$, то $D$ является прямой суммой групп, изоморфных $Z_{p^\infty}$. Поэтому $D \subseteq H$.

Отметим, что если $0 \neq H$ — непериодическая подгруппа группы $A$, $D$ — делимая группа, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = D$. Если же $H$ — периодическая подгруппа группы $A$, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = \bigoplus D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$ и, значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$.

**Теорема 1.** *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая часть группы $A$ и $H \leq A$. Тогда $H \leq cpi\, A$ в том и только в том случае, когда $H$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *$H = F \oplus (\bigoplus\limits_p D_p[p^{k_p}])$, где $F$ — периодическая cpi-подгруппа группы $B$ и $k_p \geq \sup\{e(b) \mid b \in F_p\}$;*

2) *$H = G \oplus (\bigoplus\limits_{p \in \Pi_1} D_p[p^{k_p}])$, где $G$ — периодическая cpi-подгруппа в группе $B \oplus (\bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p)$ такая, как в п. 2 леммы 4, $k_p \geq \sup\{e(g) \mid g \in G_p\}$ и $\Pi_1 \cap \Pi = \varnothing$;*

3) *$H = C \oplus D$, где $C \leq cpi\, B$;*

4) *$H = E \oplus t(D)$, $r(D_0) = 1$ и $E$ — непериодическая cpi-подгруппа в группе $B \oplus D_0$ такая, как в п. 1 леммы 4.*

Доказательство. Необходимость. Если $\pi\colon A \to B$, $\theta_p\colon A \to D_p$, $\theta_0\colon A \to D_0$ — проекции, то

$$(H \cap B) \oplus \Big(\bigoplus_p (H \cap D_p)\Big) \oplus (H \cap D_0) \leq H \leq \pi H \oplus \Big(\bigoplus_p (\theta_p H)\Big) \oplus (\theta_0 H).$$

Так как $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ (лемма 1), непериодичность подгруппы $\pi H$ влечет равенство $H \cap D = D$, т. е. $D \subseteq H$. Аналогично если $\theta_0 H \neq 0$, то из $\mathrm{Hom}(D_0, t(D))(\theta_0 H) = t(D) = H \cap t(D)$ следует, что $t(D) \subseteq H$. Из условия $\theta_0 H \neq 0$ и $r(D_0) > 1$ вытекает включение $D_0 \subseteq H$. Для доказательства п. 3 осталось заметить, что если $D \subseteq H$, то $H = C \oplus D$, где $C = H \cap B \leq cpi\, B$ по лемме 2. Если же $t(D) \subseteq H$ и $\theta_0 H \neq 0$, но $D_0 \not\subseteq H$, то $r(D_0) = 1$ и $H = E \oplus t(D)$, где $E = H \cap (B \oplus D_0) \leq cpi\, (B \oplus D_0)$, что доказывает п. 4.

Ввиду включения $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ условие $\theta_0 H = 0$ влечет периодичность группы $\pi H$. Поскольку $\mathrm{Hom}(B, D_p)\pi H \subseteq H \cap D_p$, то $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$, где $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in (\pi H)_p\}$. Заметим, что если $D_p$ — разложимая группа, то $\theta_p H = D_p[p^{k_p}] = H \cap D_p$ для некоторого $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ $(k_p \geq m_p)$. Если $\theta_p H = H \cap D_p$ для каждого простого $p$, то $H = F \oplus (\bigoplus\limits_p D_p[p^{k_p}])$, где

$F = B \cap H = \pi H \leq cpi\, B$, это доказывает п. 1. В противном случае пусть $\Pi_1$ — множество всех простых $p$ с условием $\theta_p H = H \cap D_p$, а $\Pi = \{p \in P \setminus \Pi_1 \mid D_p \neq 0\}$. Тогда $H = G \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi_1} D_p[p^{k_p}])$, где $G = H \cap (B \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi} D_p)) \leq cpi\,(B \oplus (\bigoplus_{p\in\Pi} D_p))$, это доказывает п. 2.

Достаточность вытекает из п. 2 леммы 3.

**Теорема 2.** *В разложимой редуцированной сепарабельной группе без кручения $A$ все cpi-подгруппы вполне инвариантны тогда и только тогда, когда для каждого прямого слагаемого $B$ ранга 1 группы $A$ в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое $G$, изоморфное $B$.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через $\Omega(A)$ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы $A$. Типы $s, t \in \Omega(A)$ будем считать *эквивалентными*, если существуют такие $r_1, \dots, r_n \in \Omega(A)$, что типы $r_i, r_{i+1}$ сравнимы для всех $i = 0, \dots, n$, где $r_0 = s$, $r_{n+1} = t$. Если теперь $\Omega(A) = \bigcup_{k\in K} \Omega_k$ — разбиение множества $\Omega(A)$ на классы эквивалентности, то $A = \bigoplus_{k\in K} A_k$, где $A_k$ — сепарабельные группы, $\Omega(A_k) = \Omega_k$, слагаемые $A_k$ вполне инвариантны в $A$ [10, § 19, упражнение 7]. Допустим, что в $\Omega(A)$ все типы несравнимы. Тогда $A = \bigoplus_{t\in\Omega(A)} A_t$, где $r(A_t) = 1$ и типы групп $A_t$ несравнимы. В этом случае кольцо $E(A)$ коммутативно и каждая подгруппа группы $A$ будет $cpi$-подгруппой, однако $A$ имеет не вполне инвариантные подгруппы. Допустим теперь, что $B \oplus G$ — прямое слагаемое в $A$, $r(B) = r(G) = 1$ и $t(B) < t(G)$. Поскольку $A$ — редуцированная группа, $pB \neq B$ и $pG \neq G$ для некоторого простого $p$. Если $b \in B$, $g \in G \setminus pG$ и $A = B \oplus C$ $(G \subseteq C)$, то пусть $H = \langle pb + g\rangle + E$, где $E = \mathrm{Hom}(B, C)\langle pb\rangle$. Тогда $E = C(\chi(pb)) \leq fi\, C$. Если $\theta$ — проекция $A$ на $C$, то так как в $C$ нет прямых слагаемых, изоморфных $B$, будет $\mathrm{Hom}(C, B)\theta H = 0$. Следовательно, по лемме 1 $H \leq cpi\, A$. Однако $g \notin H$ и, значит, $\theta H \nsubseteq H$, т. е. $H \nleq fi\, A$.

Достаточность. Пусть $h \in H \leq cpi\, A$. Тогда $h = a_1 + \dots + a_n$, где $a_i \in A_i$, $r(A_i) = 1$ и $A_i$ — прямые слагаемые в $A$. Поскольку для каждого $A_i$ в дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое $A_j \cong A_i$, то так же, как в лемме 3, следует, что $a_i \in H$ и, кроме того, $f(a_i) \in H$ для каждого $f \in E(A)$, т. е. $f(h) \in H$ и, значит, $H \leq fi\, A$.

**Теорема 3.** *В редуцированной алгебраически компактной группе без кручения $A$ каждая ее cpi-подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда все p-адические компоненты группы $A$ разложимы.*

Доказательство. Необходимость. Группа $A$ представима в виде $A = \prod A_p$, где каждая $A_p$ является $p$-адической алгебраически компактной группой и называется *$p$-адической компонентой* группы $A$. Можно считать, что $A_p \leq A$. Пусть $B = \prod_{p\in\Pi_1} A_p$ — прямое произведение всех неразложимых групп $A_p$. Тогда кольцо $E(B)$ коммутативно, а так как $B \leq fi\, A$, то каждая подгруппа группы $B$ будет $cpi$-подгруппой в $A$. Поскольку $B$ содержит не вполне инвариантные подгруппы, это доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $h \in H \leq cpi\, A$, $f \in E(A)$, $h = (\dots, a_p, \dots)$, где $a_p \in A_p$. Запишем $A_p$ в виде $A_p = B_p \oplus G_p$, где $a_p \in B_p$, $G_p \neq 0$. Тогда $A = B \oplus G$, где $B = \prod B_p$. Имеем $f(a) = b + g$, где $b = (\dots, b_p, \dots) \in B$, $g = (\dots, g_p, \dots) \in G$. По лемме 1 $g \in H \cap G$. Осталось показать, что $b \in H$.

Найдутся $\varphi_p, \psi_p \in E(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p) \in H \cap G_p$ и $\psi_p(\varphi_p(b_p)) = b_p$. Если теперь $\varphi = (\dots, \varphi_p, \dots)$, $\psi = (\dots, \psi_p, \dots)$, то $\varphi \in \operatorname{Hom}(B, G)$, $\psi \in \operatorname{Hom}(G, B)$. Поэтому $\varphi b \in H \cap G$ и $b = \psi(\varphi b) \in H \cap B$.

Так же, как теорема 5 и лемма 6 в [8], доказываются следующие утверждения.

**Теорема 4.** *Пусть $A = B \oplus C$.*

1. *Наименьшая cpi-подгруппа группы $A$, содержащая $C$, является $fi$-подгруппой и совпадает с*

(а) $\operatorname{Hom}(C, B)C \oplus C$;

(б) *суммой всех дополнительных прямых слагаемых к $B$ в группе $A$.*

2. *Наибольшая cpi-подгруппа группы $A$, содержащаяся в $C$, является $fi$-подгруппой и совпадает с*

(а) $\bigcap\limits_{\varphi \in \operatorname{Hom}(C,B)} \ker \varphi$;

(б) *пересечением всех дополнительных прямых слагаемых к $B$ в группе $A$.*

**Лемма 5.** *Пусть $A$ — неограниченная $p$-группа. Тогда если $0 \neq H \leq cpi\, A$, то $H \cap p^n A \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Из леммы 5 следует, что в неограниченной сепарабельной $p$-группе нет минимальных *cpi*-подгрупп. Действительно, если $H$ — минимальная *cpi*-подгруппа, то $H = H \cap p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $H = H \cap (\bigcap\limits_n p^n A) = 0$. Если $p$-длина редуцированной $p$-группы равна $\sigma + 1$ и $p^\sigma A$ — неразложимая группа, то $p^\sigma A$ — минимальная *cpi*-подгруппа. Если же $p$-группа нередуцированная и $D$ — ее делимая часть, то $D[p]$ — минимальная *cpi*-подгруппа.

Если $A$ — ограниченная $p$-группа, $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где $A_i$ — прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка $p^{k_i}$, $k_1 < \dots < k_m$, то $A_m[p]$ — минимальная *cpi*-подгруппа. Если $H \leq cpi\, A$, то $nH \leq cpi\, A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что редуцированные группы без кручения, а также группы без кручения с неразложимой делимой частью не имеют минимальных *cpi*-подгрупп. У нередуцированной группы без кручения с разложимой делимой частью $D$ подгруппа $D$ будет минимальной *cpi*-подгруппой.

Если $A$ — неограниченная редуцированная $p$-группа, то у нее нет максимальных *cpi*-подгрупп (доказательство аналогично соответствующему утверждению для *ci*-подгрупп [8, свойство 3 после леммы 6]).

Если $A$ — ограниченная $p$-группа и $e(A) = k \geq 2$, то $A[p^{k-1}]$ — наибольшая *cpi*-подгруппа. Действительно, если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где $A_i$ — прямые суммы некоторого числа циклических групп порядка $p^{k_i}$, $k_1 < \dots < k_m = k$, то $A[p^{k-1}] = (A_1 \oplus \dots \oplus A_{m-1}) \oplus pA_m$. Поэтому из леммы 1 следует, что всякая *cpi*-подгруппа, строго содержащая $A[p^{k-1}]$, совпадает с $A$. Пусть теперь $H \leq cpi\, A$ и $h \in H \setminus A[p^{k-1}]$. Тогда $e(h) = k$ и, значит, $\langle h \rangle$ — прямое слагаемое в $A$, $A = \langle h \rangle \oplus B$. Имеем $\operatorname{Hom}(\langle h \rangle, B)\langle h \rangle = B$. Отсюда ввиду леммы 1 получаем, что $H = A$. Это доказывает, что $A[p^{k-1}]$ — наибольшая *cpi*-подгруппа в $A$. В элементарной $p$-группе каждая *cpi*-подгруппа совпадает с самой группой. Если же $A$ — нередуцированная $p$-группа с неограниченной редуцированной частью, то максимальных *cpi*-подгрупп опять нет, а если редуцированная часть — ограниченная группа, то наибольшая *cpi*-подгруппа совпадает с суммой делимой части и наибольшей *cpi*-подгруппой ее ограниченной части. В делимой $p$-группе максимальных *cpi*-подгрупп нет.

Если $\varphi, \psi \in Pr(M)$, то их *P-централизатором* назовем подмодуль $C_{\varphi,\psi} = \{a \in M \mid [\varphi,\psi]a = 0\}$. Ясно, что $PZ(M) = \bigcap\limits_{\varphi,\psi \in Pr(M)} C_{\varphi,\psi}$. Если $H \subseteq M$, то $PN(H) = \{a \in M \mid [\varphi,\psi]a \in H, \varphi,\psi \in Pr(M)\}$ назовем *P-нормализатором* подмножества $H$ в $M$. Если $0 \in H$, то $PZ(M) = PN(0) \subseteq PN(H)$, а если $0 \notin H$, то $PN(H) = \varnothing$. Если $H$ — подмодуль в $M$, то $PN(H)$ также является подмодулем в $M$, содержащим $PZ(M)$. Очевидно, что если $H \leq M$, то $H \subseteq PN(H)$ в точности тогда, когда $H \leq cpi\, M$, и в этом случае $PN(H)$ также является $cpi$-подмодулем в $M$.

**Лемма 6.** *Пусть* $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, *где* $|I| > 1$, $G_i = \bigoplus\limits_{j\in I\setminus\{i\}} M_j$ *и* $\pi_i\colon M \to M_i$ — *соответствующие проекции.*

1. *Если для всякого* $i \in I$ *и любого* $0 \neq a \in M_i$ *существует* $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, G_i)$ *со свойством* $\varphi a \neq 0$, *то* $PZ(M) = 0$.

2. $PZ(M) = \bigoplus\limits_{i\in I}(PZ(M) \cap M_i)$.

3. $\varphi(PZ(M) \cap M_i) = 0$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, G_i)$.

4. $PZ(M) \cap M_i \subseteq PZ(M_i)$. *Равенство* $PZ(M) \cap M_i = PZ(M_i)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\varphi(PZ(M_i)) = 0$ *и* $[\pi_i\alpha, \pi_i\beta]PZ(M_i) = 0$ *для любых* $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, G_i)$ *и* $\alpha, \beta \in Pr(M)$.

Доказательство. 1. Пусть $a = a_1 + \cdots + a_n \in M$, где $0 \neq a_j \in M_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n,\ i_j \in I)$, $\theta\colon M \to G_{i_1}$ — проекция и $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_{i_1}, G_{i_1})$ такой, что $\varphi a_1 \neq 0$. Считаем, что $\varphi \in E(M)$, полагая $\varphi \mid M_{i_1} = \varphi$, $\varphi \mid G_{i_1} = 0$. Тогда $\xi = (1-\theta) + \theta\varphi(1-\theta) \in Pr(M)$ и $[\theta, \varphi]a = \varphi a_1 \neq 0$. Следовательно, $a \notin PZ(M)$. Поэтому $PZ(M) = 0$.

2. Следует из проективной инвариантности $P$-центра.

3. Вытекает из доказательства п. 1.

4. Включение $PZ(M) \cap M_i \subseteq PZ(M_i)$ очевидно. Если $PZ(M_i) \subseteq PZ(M)$, то из п. 3 $\varphi(PZ(M_i)) = 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, G_i)$. Оставшиеся утверждения необходимости следуют из леммы 1. Пусть теперь $\pi\colon M \to M_i$, $\theta\colon M \to G_i$ — проекции, $\alpha, \beta \in Pr(M)$ и $a \in PZ(M_i)$. Имеем

$$[\alpha,\beta]a = [(\pi+\theta)\alpha, (\pi+\theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a.$$

Здесь $[\pi\alpha, \pi\beta]a = 0$, а оставшиеся три слагаемые равны 0, поскольку в $[\pi\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \pi\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$ входят эндоморфизмы $\theta\alpha$, $\theta\beta$, действующие на элементах из $M_i$ как гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(M_i, G_i)$. Итак, $PZ(M_i) \subseteq PZ(M)$.

Из леммы 6, в частности, следует, что для гомоморфизма $f\colon M \to B$ не обязательно $f(PZ(M)) \subseteq PZ(B)$. Кроме того, если $M = \bigoplus M_i$ $(M = \prod M_i)$, где $M_i \leq fi\, M$, то $PZ(M) = \bigoplus PZ(M_i)$ $(PZ(M) = \prod PZ(M_i))$. Если $M = \bigoplus M_i$ $(M = \prod M_i)$, где $|I| > 1$ и $M_i \cong M_j$ при $i, j \in I$, то $PZ(M) = 0$. Следовательно, если $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа, где $0 \neq t(D)$ — ее периодическая часть, а $D_0$ — часть без кручения, то $Z(D) = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} D_p$, здесь $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$. Если $t(D) = 0$, то $PZ(D) = 0$ при $r(D) > 1$ и $PZ(D) = D$ при $r(D) = 1$.

**Лемма 7.** *Если* $M = B \oplus C$, *где* $C \leq fi\, M$, *то* $PZ(M) = G \oplus PZ(C)$, *где* $G = PZ(B) \cap \big(\bigcap\limits_{\varphi\in \mathrm{Hom}(B,C)} \ker\varphi\big)$.

Доказательство. Согласно пп. 2, 4 леммы 6 $PZ(M) = (PZ(M) \cap B) \oplus (PZ(M) \cap C)$, где $PZ(M) \cap C = PZ(C)$. В силу п. 3 леммы 6 $PZ(M) \cap B \subseteq G$, а из п. 4 и свойства 2 следует обратное включение $G \subseteq PZ(M) \cap B$.

**Следствие 2.** 1. *Если $A = B \oplus D$ — нередуцированная группа без кручения, где $D$ — ее делимая часть, то $PZ(A) = D$ при условии $r(D) = 1$, в противном случае $PZ(A) = 0$.*

2. *Если $T = t(A)$ и $A = T \oplus R$ — расщепляющаяся группа, то $PZ(A) = PZ(T)$ при условии, что $T$ — нередуцированная группа, в противном случае $PZ(A) = PZ(T) \oplus \big(PZ(R) \cap \big(\bigcap_{p\in\Pi} p^{m_p}R\big)\big)$, где $\Pi = \{p \in P \mid T_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(a) \mid a \in T_p\}$.*

Доказательство. 1. Проверяется непосредственно.

2. Имеем $PZ(A) = (PZ(A)\cap T)\oplus(PZ(A)\cap R)$. Согласно лемме 7 $PZ(A)\cap T = PZ(T)$, $PZ(A) \cap R = PZ(R) \cap \big(\bigcap_{\varphi\in \mathrm{Hom}(R,T)} \ker\varphi\big)$. Обозначим для краткости $E = PZ(A) \cap R$, $F = PZ(R) \cap \big(\bigcap_{p\in\Pi} p^{m_p}R\big)$. Если $T$ — нередуцированная группа, то для любого $0 \neq x \in R$ найдется $\varphi \in \mathrm{Hom}(R,T)$ со свойством $\varphi x \neq 0$. Поэтому по лемме 6 $PZ(A) \cap R = 0$. Если же $T$ — редуцированная группа, то $\varphi(F) = 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(R,T)$, поэтому $F \subseteq E$. Если $x \in PZ(A) \cap R$, $h_p(x) < m_p$, то $\varphi x \neq 0$ для некоторого $\varphi \in \mathrm{Hom}(R,T)$. Следовательно, $E \subseteq F$.

**Теорема 5.** *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы $A$, и пусть $G = PZ(B) \cap \big(\bigcap_{\varphi\in\mathrm{Hom}(B,D)} \ker\varphi\big)$. Тогда $G$ является периодической подгруппой, $G = \bigoplus_{p\in\Pi} G_p$ ($G_p \neq 0$ при $p \in \Pi$), $D_p = 0$ для каждого $p \in \Pi$, а $PZ(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если $t(D) \neq 0$, то $PZ(A) = G \oplus \big(\bigoplus_{p\in\Pi_1} D_p\big)$, где $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$;*

2) *если $t(D) = 0$, то либо $PZ(A) = G$, либо, если $r(D_0) = 1$, $PZ(A) = G\oplus D_0$.*

Доказательство. Имеем

$$PZ(A) = (PZ(A) \cap B) \oplus (PZ(A) \cap t(D)) \oplus (PZ(A) \cap D_0).$$

Так как $t(D) \leq fi\, A$, согласно лемме 6

$$PZ(A) \cap t(D) = PZ(t(D)) = \bigoplus_{p\in\Pi_1} D_p,$$

где $\Pi_1 = \{p \in P \mid r(D_p) = 1\}$. По той же лемме 6 $PZ(A) \cap D_0 = 0$, если $t(D) \neq 0$ или $r(D_0) > 1$. Всякая подгруппа $X \leq B$ со свойством $\mathrm{Hom}(B,D)X = 0$ является периодической, причем $X_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Оставшиеся утверждения суть следствия леммы 6.

Для $\pi \in Pr(M)$ и $B = \pi M$ введем обозначение $\underline{P(B)} = \langle[\pi\xi, \pi\eta]B \mid \xi, \eta \in Pr(M)\rangle$.

**Лемма 8.** *Пусть $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где $|I| > 1$. Тогда*

1) *$P(M) = \langle \mathrm{Hom}(M_i, M_j)M_i, \underline{P(M_i)} \mid i, j \in I, j \neq i\rangle$;*

2) *$P(M) = \bigoplus_{i\in I} P(M_i)$ в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)M_i \subseteq P(M_j)$ и $\underline{P(M_i)} = P(M_i)$ для любых $i, j \in I$, $j \neq i$.*

Доказательство вытекает из леммы 1.

Из леммы 8 следует, что если модуль $M$ является прямой суммой подмодулей с коммутативными кольцами эндоморфизмов, то $P(M) \leq fi\, M$.

Пусть $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа, где $t(D) = \bigoplus D_p$ — ее периодическая часть. Тогда из леммы 8 следует, что если $D_0 = 0$, то $P(D) = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$; если $r(D_0) = 1$, то $P(D) = t(D)$, а если $r(D_0) > 1$, то $P(D) = D$. Ввиду свойства 2 если $A = B \oplus C$, где $C \leq fi\, A$, то $P(A) = P(B) \oplus \langle \mathrm{Hom}(B, C)B, P(C)\rangle$. В частности, справедливо

**Следствие 3.** *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы $A$ и $B \neq 0$. Тогда $P(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *если $B$ — непериодическая группа или $r(D_0) > 1$, то $P(A) = P(B) \oplus D$;*

2) *если $B$ — периодическая группа и $D_0 = 0$, то*

$$P(A) = P(B) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in\Pi} D_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in K} D_p[p^{m_p}]\Big),$$

*где $\Pi = \{p \in P \mid r(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P \mid r(D_p) = 1$ и $B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in B_p\}$;*

3) *если $B$ — периодическая группа и $r(D_0) = 1$, то $P(A) = P(B) \oplus t(D)$.*

Группу $A$ назовем *cpi-простой*, если у нее нет нетривиальных ($\neq 0, A$) *cpi*-подгрупп. Ясно, что группа $A$ с нормальным кольцом $E(A)$ является *cpi*-простой в точности тогда, когда она имеет простой порядок. Несложно установить, что *cpi*-простая группа является либо элементарной $p$-группой для некоторого простого числа $p$, либо разложимой делимой группой без кручения.

Если $A = Z_p \oplus \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, то $PZ(A) = Z_p \oplus p\mathbb{Z}$, а $P(A) = Z_p$. В данном случае $PZ(A)$ — максимальная подгруппа в $A$. Покажем, что если в $A$ нет прямых слагаемых, изоморфных $Z_p$ для каждого простого числа $p$, то $PZ(A)$ не может быть максимальной подгруппой. Действительно, в противном случае $A/PZ(A)$ — группа простого порядка $p$, и так как $pA \subseteq PZ(A)$, то $A_p \neq 0$. Из леммы 6 следует, что $A_p$ — неразложимая группа. Поэтому $A = A_p \oplus B$ для некоторой подгруппы $B$. Поскольку $A_p \subseteq PZ(A)$, то $PZ(A) = A_p \oplus (PZ(A) \cap B)$. Здесь $|B/(PZ(A) \cap B)| = p$, следовательно, $|A_p| = p$, что противоречит условию.

Если $A \subseteq M$, то подмодуль $\langle [\alpha, \beta]a \mid a \in A, \alpha, \beta \in Pr(M)\rangle$ назовем *$P$-коммутантом* подмножества $A$ в $M$ и обозначим через $P[A, M]$. Если $A \leq cpi\, M$, то $P[A, M] \leq cpi\, M$.

Обозначим $P[A, M]_1 = A + P[A, M]$, $P[A, M]_{n+1} = P[A, M]_n + P[P[A, M]_n, M]$ при $n \geq 1$. Тогда $\overline{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P[A, M]_n$ — наименьший *cpi*-подмодуль, содержащий $A$. Действительно, $\overline{A} \leq cpi\, M$ и всякий *cpi*-подмодуль, содержащий $A$, содержит и $\overline{A}$.

*cpi*-Подмодуль $A$ модуля $M$ назовем *$P$-малым*, если из $M = A + S$, где $S$ — некоторый *cpi*-подмодуль, следует, что $S = A$.

Элемент $x \in M$ назовем *$P$-необразующим* модуля $M$, если $\overline{\langle x\rangle}$ — $P$-малый подмодуль. Очевидно, что любой *cpi*-подмодуль, содержащийся в $P$-малом подмодуле, является $P$-малым; сумма конечного числа $P$-малых подмодулей является $P$-малым подмодулем. В силу сказанного сумма всех $P$-малых подмодулей совпадает с множеством $P$-необразующих элементов модуля $M$.

Обозначим через $\mathrm{prad}\, M$ пересечение всех максимальных *cpi*-подмодулей модуля $M$, если они существуют, и $\mathrm{prad}\, M = M$ в противном случае; через $\mathrm{psoc}\, M$ — сумму всех минимальных *cpi*-подмодулей модуля $M$. Если $B$ — минимальный *cpi*-подмодуль в $M$, то $B \subseteq PZ(M)$ или $B \subseteq P(M)$, поэтому $\mathrm{psoc}\, M \subseteq PZ(M) + P(M)$.

**Предложение 2.** 1. *Множество $S$ всех $P$-необразующих элементов модуля $M$ совпадает с* $\operatorname{prad} M$.

2. $\operatorname{psoc} M$ *совпадает с пересечением $Q$ всех существенных cpi-подмодулей модуля $M$.*

Доказательство. 1. $S \subseteq \operatorname{prad} A$. Если $M$ не содержит максимальных *cpi*-подмодулей, то утверждение очевидно. Пусть теперь $x \in S$ и $H$ — максимальный *cpi*-подмодуль в $M$. Если $x \notin H$, то $\overline{\langle x\rangle} + H = M$ и $H \neq M$. Это противоречит включению $x \in S$.

$\operatorname{prad} M \subseteq S$. Пусть, напротив, существуют $x \in \operatorname{prad} M$ и $B \leq cpi\, M$ такие, что $B \neq M$, но $\overline{\langle x\rangle} + B = M$. По лемме Цорна найдется *cpi*-подмодуль $H$ модуля $M$, максимальный среди *cpi*-подмодулей, содержащих $B$ и не содержащих $x$. Ясно, что $H$ — максимальный *cpi*-подмодуль. Но тогда $x \in \operatorname{prad} M \subseteq H$; противоречие.

2. Если $B$ — минимальный *cpi*-подмодуль, а $A$ — существенный *cpi*-подмодуль, то $B \cap A = B$ и, значит, $\operatorname{psoc} M \subseteq A$.

Пусть теперь $N \leq Q$ и $N \leq cpi\, M$. Если $K$ — максимальный элемент в множестве *cpi*-подмодулей модуля $M$ таких, что $N \cap K = 0$, то $H = N + K$ — существенный *cpi*-подмодуль в $M$. Далее, $Q = N \oplus (K \cap Q)$. Таким образом, каждый *cpi*-подмодуль модуля $M$, содержащийся в $Q$, выделяется в $Q$ прямым слагаемым. Отсюда следует, что $Q \subseteq \operatorname{psoc} M$. Действительно, конечно порожденный *cpi*-подмодуль, содержащийся в $Q$, включает максимальный *cpi*-подмодуль, а отсюда уже следует, что каждый $(\subseteq Q)$ ненулевой *cpi*-подмодуль содержит минимальный *cpi*-подмодуль. Несложно видеть, что $Q$ является суммой минимальных *cpi*-подмодулей, т. е. $Q \subseteq \operatorname{psoc} M$.

**Предложение 3.** *Если $M$ — $P$-разрешимый модуль и $A$ — его cpi-подмодуль с условием $A + P(M) = M$, то $A = M$. В частности, $P(M) \subseteq \operatorname{prad} M$.*

Доказательство. Положим $A_i = A + Z_i$, где $Z_i = PZ(M)_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $A_m \subset M$ и $A_{m+1} = M$. Тогда

$$P(M) = P[M, M] = P[A, M] + P[Z_{m+1}, M] \subseteq A + Z_m = A_m,$$

откуда $A + P(M) \subseteq A_m \subset M$; противоречие. Включение $P(M) \subseteq \operatorname{prad} M$ следует из предложения 2.

*cpi*-Подмодуль $H$ модуля $M$ назовем *$P$-полупервичным*, если для любого подмодуля $A$ модуля $M$ из включения $P[A, M] \subseteq H$ вытекает, что $A \subseteq H$. Отметим, что включение $P[A, M] \subseteq H$ эквивалентно включению $P[\overline{A}, M] \subseteq H$.

Пересечение всех $P$-полупервичных подмодулей модуля $M$ обозначим через $PP(M)$. Из определения следует, что $PZ(M) \subseteq PP(M)$, в частности, $M = PP(M)$ для $P$-разрешимого модуля $M$.

Элемент $a$ модуля $M$ назовем *строго $P$-нильпотентным*, если для любой последовательности $\{\alpha_n \in Pr(M) \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдется такой номер $m$, что $[\alpha_{2m}, \alpha_{2m-1}] \ldots [\alpha_2, \alpha_1] a = 0$.

Следующий результат является аналогом характеризации Левицкого первичного радикала кольца [11, предложение 26.5].

**Предложение 4.** *$PP(M)$ состоит из строго $P$-нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть $a \notin PP(M)$. Поэтому $a \notin H$ для некоторого $P$-полупервичного подмодуля $H$. Тогда $P[\langle a\rangle, M] \nsubseteq H$, т. е. существует такой элемент $a_1 \in P[\langle a\rangle, M]$, что $a_1 \notin H$. Если $a_n \notin H$, то $P[\langle a_n\rangle, M] \nsubseteq H$. Значит, существует $a_{n+1} \in P[\langle a_n\rangle, M]$ со свойством $a_{n+1} \notin H$. В частности, элемент $a$ не является строго $P$-нильпотентным.

Обратно, пусть элемент $a$ не является строго $P$-нильпотентным, и пусть $T = \{a_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ — последовательность элементов модуля $M$ такая, что $a_0 = a$ и $0 \neq a_{n+1} \in P[\langle a_n\rangle, M]$ для каждого $n$. Тогда $0 \notin T$ и по лемме Цорна существует *cpi*-подмодуль $G$, максимальный среди *cpi*-подмодулей, не пересекающихся с $T$. Пусть теперь $A$ — подмодуль в $M$ такой, что $A \nsubseteq G$. В силу выбора подмодуля $G$ имеем $(\overline{A}+G)\cap T \neq \varnothing$. Если теперь $a_n \in \overline{A}+G$, то $a_{n+1} \in P[\overline{A}+G, M] = P[\overline{A}, M] + P[G, M]$, где $P[G, M] \subseteq G$, откуда $P[\overline{A}, M] \nsubseteq G$. Значит, и $P[A, M] \nsubseteq G$. Таким образом, $G$ — $P$-полупервичный подмодуль и $a_0 = a \notin G$. Следовательно, $a \notin PP(M)$.

Поскольку $PZ(M) \subseteq PP(M)$, условие $PP(M) = 0$ влечет $PZ(M) = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть $a_0 = a \neq 0$. По условию найдутся такие $\alpha_n, \beta_n \in Pr(M)$, что $a_{n+1} = [\alpha_n, \beta_n]a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$, т. е. элемент $a$ не является строго $P$-нильпотентным.

Перейдем к редуцированным группам и приведем описание $P$-центров и $P$-коммутантов некоторых групп.

**7.** *Если $A$ — неограниченная сепарабельная $p$-группа, то $PZ(A) = 0$ и $P(A) = A$.*

Элемент $0 \neq a \in A$ можно вложить в прямое слагаемое $B$ группы $A$, являющееся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку $G$ — неограниченная группа, то существует гомоморфизм $f\colon B \to G$ со свойством $f(a) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(G, B)G = B$. Согласно лемме 8 $a \notin PZ(A)$ и $B \subseteq P(A)$.

Если $A$ — редуцированная $p$-группа и $A^1 \neq 0$, то возможен случай, когда $PZ(A) \neq 0$; например, если подгруппа $A^1$ циклическая, то $PZ(A) = A^1$.

**8.** *Пусть $A$ — ограниченная $p$-группа, $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, где $B_i$ — прямые суммы некоторого числа копий группы $Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \dots < k_m$ и $i = 1, \dots, m$. Тогда $PZ(A) = p^{k_{m-1}}B_m$ и $P(A) = A[p^{k_{m-1}}]$, если $B_m$ — циклическая группа и $PZ(A) = 0$, $P(A) = A$ в противном случае.*

**9.** *Пусть $A$ — сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1. Тогда $PZ(A) = \sum\limits_{t\in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ — множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $r(A(t)) = 1$, т. е. $PZ(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы $A$, а $P(A)$ совпадает с суммой тех прямых слагаемых $A_i$ ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа $\leq t(A_i)$.*

**10.** *Пусть $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ — векторная группа, где $A_i$ — группы без кручения ранга 1. Тогда $PZ(A) = \prod\limits_{j\in J} A_j$, где $J$ — множество всех таких $j \in I$, что $r(A(t(A_j))) = 1$ при $j \in J$, т. е. $PZ(A)$ совпадает с прямым произведением всех вполне инвариантных подгрупп $A_j$, а $P(A) = \prod\limits_{k\in K} A_k$, где $K$ — множество всех таких $k \in I$, что в $I \setminus \{k\}$ найдется подгруппа $A_s$ со свойством $t(A_s) \leq t(A_k)$.*

**11.** *Пусть $A = \prod A_p$ — алгебраически компактная группа без кручения, где $A_p$ — $p$-адические компоненты группы $A$. Тогда $PZ(A) = \prod\limits_{p\in\Pi} A_p$, где $\Pi =$*

$\{p \in P \mid A_p$ — *неразложимая группа*$\}$, *а* $P(A) = \prod\limits_{p \in K} A_p$, *где* $K = \{p \in P \mid A_p$ — *разложимая группа*$\}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Чехлов А. Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 6. С. 211–218.
2. *Чехлов А. Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 1. С. 31–36.
3. *Чехлов А. Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 942–953.
4. *Чехлов А. Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 2. С. 78–84.
5. *Чехлов А. Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 2. С. 85–99.
6. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 520–539.
7. *Чехлов А. Р.* $E$-нильпотентные и $E$-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2010. № 1. С. 59–71.
8. *Чехлов А. Р.* О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1163–1174.
9. *Туганбаев А. А.* Теория колец (Арифметические модули и кольца). М.: МЦНМО, 2009.
10. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2007.
11. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т. 2.


*Статья поступила 5 апреля 2011 г.*

Чехлов Андрей Ростиславович
Томский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
cheklov@math.tsu.ru