Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.54

СИСТЕМА ПОКРЫВАЮЩИХ ПОДГРУПП ДЛЯ КЛАССА p–НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Ц. Хуан, Н. Ян, Б. Ху, С. Юй

Аннотация. Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп и G — конечная группа. Множество $\sum$ подгрупп группы G называют *покрывающей системой подгрупп группы* G для $\mathscr{F}$ (или просто $\mathscr{F}$*-покрывающей системой подгрупп* G), если $G \in \mathscr{F}$, когда каждая подгруппа из $\sum$ принадлежит $\mathscr{F}$. Построены некоторые покрывающие системы подгрупп для класса всех p-нильпотентных групп.

Ключевые слова: силовская подгруппа, $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа, дополнение подгрупп, p-нильпотентная группа, покрывающая система подгрупп.

1. Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными, и символ G обозначает конечную группу. Терминология и обозначения стандартны (см. [1–3]).

Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Множество Σ подгрупп назовем *покрывающей системой подгрупп* G *для класса* $\mathscr{F}$ (или просто $\mathscr{F}$*-покрывающей системой подгрупп* G), если $G \in \mathscr{F}$, когда каждая подгруппа из $\sum$ принадлежит $\mathscr{F}$. В [4] построены покрывающие системы подгрупп для класса всех нильпотентных групп и класса сверхразрешимых групп. Много изящных результатов о покрывающих системах подгрупп см. в [4–6].

Подгруппа H группы G называется *s-квазинормальной* или *s-перестановочной* [7, 8] в G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой P в G (т. е. $HP = PH$). Говорят [9], что подгруппа H группы G *c-нормальна в* G, если существует нормальная подгруппа N в G такая, что $G = HN$ и $H \cap N \leq H_G$, где H_G — максимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H. Говорят [10], что подгруппа H группы G $\mathscr{F}_n$*-дополняема в* G, если существует нормальная подгруппа K в G такая, что $HK = G$ и $(H \cap K)H_G/H_G$ содержится в $\mathscr{F}$-гиперцентре $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$ группы G/H_G. Недавно в [11] было дано определение $\mathscr{F}_h$-нормальных подгрупп: говорят, что подгруппа H группы G $\mathscr{F}_h$*-нормальна в* G, если существует нормальная подгруппа K в G такая, что HK — нормальная холлова подгруппа группы G и $(H \cap K)H_G/H_G$ содержится в $\mathscr{F}$-гиперцентре $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$ группы G/H_G.

В настоящей работе мы вводим следующее более общее понятие.

Определение 1.1. Пусть H — подгруппа группы G и $\mathscr{F}$ — класс групп. Будем говорить, что H $\mathscr{F}_s$*-квазинормальна в* G, если существует нормальная подгруппа T группы G такая, что HT s-перестановочна в G и $(H \cap T)H_G/H_G$ содержится в $\mathscr{F}$-гиперцентре $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$ группы G/H_G.

Research is supported by NNSF Grant of China (Grant N 11071229) and the Natural Science Foundation of the Jiangsu Higher Education Institutions of China (Grant N 10KJD110004).

© 2012 Хуан Ц., Ян Н., Ху Б., Юй С.

Заметим, что для класса $\mathscr{F}$ групп главный фактор H/K группы G называется *$\mathscr{F}$-центральным* (см. [12] или [2]), если $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathscr{F}$. Символ $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ обозначает $\mathscr{F}$-гиперцентр G, т. е. произведение всех нормальных подгрупп H группы G, G-главные факторы которых $\mathscr{F}$-центральны. Подгруппа H группы G называется *$\mathscr{F}$-гиперцентральной в G*, если $H \le Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$.

Класс $\mathscr{F}$ групп называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и каждая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (называемую *$\mathscr{F}$-резидуальной* и обозначаемую символом $G^{\mathscr{F}}$) с фактором в $\mathscr{F}$. Формация $\mathscr{F}$ называется *насыщенной*, если она содержит всякую группу G такую, что $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$. Ясно, что класс всех p-нильпотентных групп есть насыщенная формация.

Очевидно, что все нормальные, c-нормальные, $\mathscr{F}_n$-дополняемые, $\mathscr{F}_h$-нормальные, перестановочные или s-квазинормальные (s-перестановочные) подгруппы $\mathscr{F}_s$-квазинормальны для всякого непустого класса $\mathscr{F}$ групп. Например, если подгруппа H группы G c-нормальна в G, то $(H \cap T)H_G/H_G = 1 \le Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. Если подгруппа H группы G s-квазинормальна в G, то мы можем выбрать $T = 1$. Однако следующие примеры показывают, что обратное неверно.

Пример 1.2. Пусть $G = C_7 \wr C_3 = [K]C_3$ — регулярное сплетение, где K — базисная группа группы $C_7 \wr C_3$ и $|C_i| = i$. Тогда G сверхразрешима и $K = F(G)$ — силовская 7-подгруппа в G, а подгруппа $H = \{(a_1, a_2, 1) \mid a_1, a_2 \in C_7\}$ максимальна в K. Ясно, что $H_G = 1$ и H не является s-перестановочной в G. Предположим, что H не c-нормальна в G, и пусть T — нормальная подгруппа в G такая, что $G = HT$ и $T \cap H \le H_G = 1$. Тогда $|G : T| = 49$. Значит, $C_3^G \le T$. Предположим теперь, что $M = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in C_7$ и $a_1a_2a_3 \in (C_7)' = 1\}$. Тогда $C_3^G = MC_3$ в силу [1, A, 18.4], и потому $MC_3 \le T$. Ясно, что $|M| > 7$, так что $|T| > 49$; противоречие. Значит, H не является c-нормальной в G. Пусть $C_7 = \langle x \rangle$, $D = \{(x, x, x) \mid x \in C_7\}$ и $\mathscr{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Тогда D — нормальная подгруппа в G такая, что $D \cap H = 1 \subseteq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$ и $DH = K \trianglelefteq G$. Таким образом, H $\mathscr{U}_s$-квазинормальна в G.

Пример 1.3. Пусть $G = S_4$ — симметрическая группа степени 4, $H = \langle (123) \rangle$ и $\mathscr{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Тогда в G имеется нормальная подгруппа $T = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ такая, что $HT = A_4$ s-перестановочна в G и $H \cap T = 1 \subseteq Z_\infty^{\mathscr{U}}(G)$. Таким образом, H $\mathscr{U}_s$-квазинормальна в G. Тем не менее, очевидно, H ни $\mathscr{U}_n$-дополняема в G, ни $\mathscr{U}_h$-нормальна в G. Аналогично если $\mathscr{F}$ — класс всех 2-нильпотентных групп, то H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, но H не является ни $\mathscr{F}_n$-дополняемой в G, ни $\mathscr{F}_h$-нормальной в G.

В настоящей работе мы используем $\mathscr{F}_s$-квазинормальные подгруппы для построения некоторых покрывающих систем подгрупп для класса всех p-нильпотентных групп.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{F}$ — класс групп. Класс $\mathscr{F}$ называется *S-замкнутым* (*S_n-замкнутым*), если он содержит все подгруппы (соответственно все нормальные подгруппы) каждой своей группы. Будем говорить, что подгруппа H группы G имеет *$\mathscr{F}$-дополнение в G*, если существует $\mathscr{F}$-подгруппа T в G такая, что $G = HT$. В частности, если $\mathscr{F}$ — класс всех p-нильпотентных групп, то $\mathscr{F}$-дополнение называется *p-нильпотентным дополнением*.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — формация групп. Предположим, что подгруппа H в G имеет $\mathscr{F}$-дополнение в G. Тогда*

(1) *если $N \trianglelefteq G$, то HN/N имеет $\mathscr{F}$-дополнение в G/N;*

(2) *если $H \leq K \leq G$ и $\mathscr{F}$ S-замкнут, то H имеет $\mathscr{F}$-дополнение в K.*

Лемма 2.2 [13, лемма 2.1]. *Пусть G — группа и $A \leq G$. Предположим, что $\mathscr{F}$ — непустая насыщенная формация и $Z = Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. Тогда*

(1) *если A нормальна в G, то $AZ/A \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/A)$;*

(2) *если формация $\mathscr{F}$ S-замкнута, то $Z \cap A \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(A)$;*

(3) *если формация $\mathscr{F}$ S_n-замкнута и подгруппа A нормальна в G, то $Z\cap A \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(A)$;*

(4) *если $G \in \mathscr{F}$, то $Z = G$.*

Лемма 2.3 [14, лемма 2.2]. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$.*

(1) *Если подгруппа H s-перестановочна в G, то H s-перестановочна в K.*

(2) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда K/H s-перестановочна в G/K тогда и только тогда, когда K s-перестановочна в G.*

(3) *Если H s-перестановочна в G, то H субнормальна в G.*

(4) *Если H и F s-перестановочны в G, то $H \cap F$ s-перестановочна в G.*

(5) *Если H s-перестановочна в G и $M \leq G$, то $H\cap M$ s-перестановочна в M.*

Лемма 2.4. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Подгруппа H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа T в G такая, что HT s-перестановочна в G, $H_G \leq T$ и $(H/H_G) \cap (T/H_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$.*

(2) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда K/H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G/H тогда и только тогда, когда K $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G.*

(3) *Пусть H нормальна в G. Тогда для всякой $\mathscr{F}_s$-квазинормальной подгруппы E в G, удовлетворяющей условию $(|H|, |E|) = 1$, EH/H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G/H.*

(4) *Если H — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в G и $\mathscr{F}$ S-замкнута, то H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в K.*

(5) *Если H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, K нормальна в G и $\mathscr{F}$ S_n-замкнута, то H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в K.*

(6) *Если $G \in \mathscr{F}$, то всякая подгруппа в G $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G.*

Доказательство. (1) Достаточность очевидна. Предположим, что H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G и T — нормальная подгруппа в G такая, что HT — s-перестановочная подгруппа в G и $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. Пусть $T_0 = TH_G \trianglelefteq G$. Тогда $HT_0 = HTH_G = HT$ — s-перестановочная подгруппа в G, $H_G \leq T_0$ и

$$(T_0/H_G) \cap (H/H_G) = (T_0 \cap H)/H_G = (T \cap H)H_G/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G).$$

(2) Предположим сначала, что K/H — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в G/H. Тогда в силу (1) в G/H имеется нормальная подгруппа T/H такая, что $(K/H)(T/H)$ s-перестановочна в G/H, $(K/H)_{G/H} \leq T/H$ и

$$(T/H)/(K/H)_{G/H} \cap (K/H)/(K/H)_{G/H} \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}((G/H)/(K/H)_{G/H}).$$

Отсюда следует, что KT — s-перестановочная подгруппа в G по лемме 2.3(2). Так как

$$(T/H)/(K/H)_{G/H} \cap (K/H)/(K/H)_{G/H}$$
$$= (T/H)/(K_G/H) \cap (K/H)/(K_G/H) = ((T \cap K)/H)/(K_G/H)$$

и

$$Z_\infty^{\mathscr{F}}((G/H)/(K/H)_{G/H}) = Z_\infty^{\mathscr{F}}((G/H)/(K_G/H)),$$

имеем

$$(T \cap K)/K_G = (T/K_G) \cap (K/K_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/K_G).$$

Значит, K — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в G. Такими же рассуждениями можно показать, что если K $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, то K/H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G/H.

(3) Предположим, что H нормальна в G и E — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в G такая, что $(|H|, |E|) = 1$. Тогда в силу (1) G имеет нормальную подгруппу T такую, что ET — s-перестановочная подгруппа в G, $E_G \leq T$ и $(E/E_G) \cap (T/E_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/E_G)$. Покажем теперь, что EH/H — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в G/H. В силу (2) достаточно показать, что EH $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Ясно, что $EHT = ETH$ — s-перестановочная подгруппа в G. Так как $(|H|, |E|) = 1$, то $(|HE : H|, |HE : E|) = 1$. Положим $D = T \cap EH$. Тогда $D \trianglelefteq EH$ и потому $DE \leq EH$ и $DH \leq EH$. Значит,

$$(|D : D \cap H|, |D : D \cap E|) = (|DH : H|, |DE : E|) = 1.$$

Следовательно, $D = (D \cap H)(D \cap E)$. Таким образом,

$$T \cap EH = D = (T \cap EH \cap H)(T \cap EH \cap E) = (T \cap H)(T \cap E) \leq H(T \cap E) \leq HZ,$$

где $Z/E_G = Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/E_G)$. В силу G-изоморфизма $HZ/HE_G = HE_GZ/HE_G \simeq Z/(Z \cap HE_G)$ имеем $HZ/HE_G \leq X/HE_G = Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/HE_G)$. Следовательно, $(T \cap HE)HE_G/HE_G \leq X/HE_G$. Пусть $D = (HE)_G$. Очевидно, что $HE_G \subseteq D$. По лемме 2.2(1)

$$(X/HE_G)(D/HE_G)/(D/HE_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}((G/HE_G)/(D/HE_G)).$$

Поэтому

$$(T \cap HE)HE_GD/D = (THE_GD/D) \cap (HE/D)$$
$$= (TD/D) \cap (HE/D) = (T \cap HE)D/D \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/D).$$

Это показывает, что EH — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в G.

(4) Если подгруппа H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, то в силу (1) существует нормальная подгруппа T в G такая, что HT s-перестановочна в G, $H_G \leq T$ и $(T/H_G) \cap (H/H_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. Пусть $T_1 = T \cap K$. Тогда $T_1 \trianglelefteq K$, $HT_1 = H(T \cap K) = HT \cap K$ s-перестановочна в K по лемме 2.3(5) и

$$(T_1/H_G) \cap (H/H_G) = (H \cap T \cap K)/H_G \leq Z/H_G = Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G) \cap K/H_G.$$

Так как класс $\mathscr{F}$ S-замкнут по лемме 2.2(2), то

$$Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G) \cap K/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(K/H_G).$$

По лемме 2.2(1)

$$(Z/H_G)(H_K/H_G)/(H_K/H_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}((K/H_G)/(H_K/H_G)).$$

Следовательно,
$$(T_1 H_K/H_K) \cap (H/H_K) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(K/H_K).$$
Поэтому H — $\mathscr{F}_s$-квазинормальная подгруппа в K.

(5) См. доказательство (4).

(6) Если $G \in \mathscr{F}$, то $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) = G$ по лемме 2.2(4). Предположим, что H — произвольная подгруппа в G. Положим $T = G$. Тогда, очевидно, $HT = G$ s-перестановочна в G. По лемме 2.2(1) $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G) = G/H_G$. Следовательно, $(H \cap G)H_G/H_G = H/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. Поэтому выполнено (6).

Лемма 2.5 [14, лемма 2.3]. *Пусть H — p-группа для некоторого простого p. Тогда H s-перестановочна в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

Лемма 2.6 [3, лемма 2.7.9]. *Пусть P — нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если $P \neq 1$ и $P \cap \Phi(G) = 1$, то P — прямое произведение некоторых минимальных подгрупп в G.*

Лемма 2.7 [15, лемма 2.10]. *Пусть p — простое число такое, что $(|G|, p^2 - 1) = 1$. Если G/L p-нильпотентна и $p^3 \nmid |L|$, то G p-нильпотентна.*

Лемма 2.8 [16, лемма 2.8]. *Пусть G — группа, p — простое число и $(|G|, p - 1) = 1$. Если M — подгруппа в G индекса p, то M нормальна в G.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть p — простой делитель $|G|$ такой, что $(|G|, p^2 - 1) = 1$, и пусть $\mathscr{F}$ — класс всех p-нильпотентных групп. Пусть у G есть нормальная подгруппа N такая, что $G/N \in \mathscr{F}$, и существует множество $\mathscr{H}$ подгрупп в G со следующим свойством: для всякой 2-максимальной подгруппы M каждой силовской p-подгруппы в N, которая не является $\mathscr{F}_s$-квазинормальной в G, $\mathscr{H}$ содержит дополнение к M в G. Тогда $\mathscr{H}$ образует покрывающую систему подгрупп для $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно и G — контрпример минимального порядка. Тогда

(1) $O_{p'}(N) = 1$.

В самом деле, предположение справедливо для $G/O_{p'}(N)$, поэтому если $O_{p'}(N) \neq 1$, то группа $G/O_{p'}(N)$ p-нильпотентна в силу выбора G. Но тогда G p-нильпотентна; противоречие.

(2) G разрешима.

Если $p \neq 2$, то из условия $(|G|, p^2 - 1) = 1$ получаем, что G — группа нечетного порядка, и потому G разрешима. Предположим, что $p = 2$. Тогда G/N 2-нильпотентна, и потому G/N разрешима. Покажем, что N разрешима. Можем предполагать без ограничения общности, что $G = N$.

Пусть P — силовская 2-подгруппа в G. Если $O_2(G) = P$ или $O_2(G)$ — максимальная подгруппа в P, то группа $G/O_2(G)$ 2-нильпотентна в силу [17, (10.1.9)]. Отсюда вытекает, что $G/O_2(G)$ разрешима, так что G разрешима. Предположим, что $O_2(G) \neq 1$ и существует 2-максимальная подгруппа P_2 в P такая, что $O_2(G) \leq P_2$. По леммам 2.1(1) и 2.4(2) $G/O_2(G)$ удовлетворяет предположению, так что $G/O_2(G)$ 2-нильпотентна. Следовательно, G разрешима. Значит, $O_2(G) = 1$.

В силу (1) $O_{2'}(G) = 1$.

По лемме 2.7 $2^3 \mid |G|$. Если каждая 2-максимальная подгруппа в P имеет p-нильпотентное дополнение в G, то каждая максимальная подгруппа в P имеет

p-нильпотентное дополнение в G. В силу леммы 2.10 из [18] G 2-нильпотентна и тем самым G разрешима. Поэтому можем предположить, что существует 2-максимальная подгруппа P_2 в P, которая $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Очевидно, $P_2 \neq 1$. Так как $O_2(G) = 1$, то $(P_2)_G \subseteq O_2(G) = 1$. Поэтому в силу леммы 2.4(1) существует нормальная подгруппа T в G такая, что P_2T s-перестановочна в G и $P_2 \cap T \subseteq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. Если $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) = 1$, то $P_2 \cap T = 1$. Ясно, что $|T_2| \leq 2^2$, где T_2 — силовская 2-подгруппа группы T. По лемме 2.7 группа T 2-нильпотентна, и потому у T имеется нормальная холлова $2'$-подгруппа K. Так как K char $T \trianglelefteq G$, то $K \trianglelefteq G$ и $K \leq O_{2'}(G) = 1$. Отсюда следует, что T — 2-группа. Но поскольку $T \leq O_2(G) = 1$, то P_2 s-перестановочна в G, и потому $P_2 \leq O_2(G) = 1$. Полученное противоречие показывает, что $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \neq 1$. Так как $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ 2-нильпотентна, группа $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ имеет нормальную холлову $2'$- подгруппу L. Очевидно, что $L \trianglelefteq G$. Следовательно, $L \leq O_{2'}(G) = 1$, поэтому $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$ — 2-группа. Стало быть, $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \leq O_2(G) = 1$, что противоречит условию $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \neq 1$. Отсюда получаем справедливость (2).

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в N. Так как G разрешима, L — элементарная абелева r-группа для некоторого простого r. Более того, $r = p$ в силу (1).

(3) $G/L \in \mathscr{F}$ и $L = O_p(N) = F(N) = C_N(L) \nleq \Phi(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в N, и $|L| > p^2$. В частности, $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \cap N = 1$.

Очевидно, что $(G/L)/(N/L) \simeq G/N \in \mathscr{F}$. Пусть R_1/L — 2-максимальная подгруппа силовской p-подгруппы группы N/L. Тогда R_1 является 2-максимальной подгруппой силовской p-подгруппы группы N. По леммам 2.1(1) и 2.4(2) R_1/L либо имеет p-нильпотентное дополнение в G/L, либо является $\mathscr{F}_s$-квазинормальной подгруппой в G/L. Следовательно, G/L удовлетворяет условию. В силу выбора G имеем $G/L \in \mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в N и $L \nleq \Phi(G)$. Таким образом, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = [L]M$. Поскольку $C = C_N(L) = C_G(L) \cap N \trianglelefteq G$, имеем $(C \cap M)^G = (C \cap M)^{LM} = (C \cap M)^M = C \cap M$. Следовательно, $C \cap M \trianglelefteq G$, и поэтому $C \cap M = 1$. Значит, $C = C \cap LM = L(C \cap M) = L$. Но так как $L \leq O_r(N) \leq F(N) \leq F(G) \leq C_G(L)$, то $F(N) \leq C_G(L) \cap N = C_N(L)$. Это показывает, что $L = O_r(N) = F(N) = C_N(L)$. По лемме 2.7 $|L| > p^2$, откуда следует, что $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \cap N = 1$.

(4) Если V — 2-максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P группы N, то $|L| \leq |V|$.

В самом деле, предположим, что $|V| < |L|$. Пусть W — произвольная 2-максимальная подгруппа группы P, содержащаяся в L. Если W имеет p-нильпотентное дополнение T в G, то подгруппа $1 \neq L \cap T$ нормальна в G. Поэтому минимальность L влечет, что $T = G$; противоречие. Значит, W является $\mathscr{F}_s$-квазинормальной подгруппой в G. Тогда G имеет нормальную подгруппу T такую, что WT s-перестановочна в G и $W \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \cap N = 1$. Отсюда следует, что $L \nleq T$, поэтому подгруппа $L \cap WT = W(L \cap T) = W$ s-перестановочна в G по лемме 2.3(4). Следовательно, всякая подгруппа W в L со свойством $|W| = |V|$ s-перестановочна в G, и потому $|L| = p$ по лемме 2.11 из [19]; противоречие.

(5) L — силовская p-подгруппа в N.

Если $N \neq G$, то по предположению и выбору G группа N p-нильпотентна. Значит, из (1) и (3) получаем, что $N = L$ является p-группой. Предположим теперь, что $N = G$. В этом случае $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) = 1$. Покажем, что всякая 2-максимальная подгруппа J каждой силовской p-подгруппы группы G имеет p-нильпотентное дополнение в G. Так как $L \nleq \Phi(G)$, то $G = [L]M$ для некоторой максимальной подгруппы M в G. Если $L \leq J$, то $M \simeq G/L$ — p-нильпотентное дополнение J в G. Предположим, что $L \nleq J$. Поскольку L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $J_G = 1$. Предположим, что J $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Тогда G имеет нормальную подгруппу T такую, что JT s-перестановочна в G и $J \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) = 1$. Ясно, что $|T_p| \leq p^2$, где T_p — силовская p-подгруппа в T. По предположению и лемме 2.7 T p-нильпотентна, и потому имеет нормальную холлову p'-подгруппу D. Так как $D \operatorname{char} T \trianglelefteq G$, то $D \trianglelefteq G$, поэтому $L \leq D$; противоречие. Тем самым $D = 1$. Это влечет, что T — p-группа. Поскольку L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $L \leq T$ или $T = 1$. Если $L \leq T$, то $|L| \leq p^2$; противоречие. Если $T = 1$, то J s-перестановочна в G. Отсюда следует, что $J \leq O_p(G) = L$. Так как $L \nleq J$, то $J < L$, что противоречит (4).

Итоговое противоречие. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G, где $q \neq p$. Тогда ввиду (5) условие выполняется для LQ по леммам 2.1(2) и 2.4(4). Более того, в силу (4) $LQ \neq G$. Значит, группа LQ p-нильпотентна ввиду выбора G. Поэтому $Q \leq C_G(L)$. Следовательно, $O^p(G) \leq C_G(L)$, что влечет $C_G(L) = G$ в силу [1, A, 13.6]. Отсюда следует, что $|L| = p$; противоречие с (3). Итоговое противоречие завершает доказательство.

Аналогичным рассуждением получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть p — простой делитель $|G|$ со свойством $(|G|, p-1) = 1$ и $\mathscr{F}$ — класс всех p-нильпотентных групп. Предположим, что G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathscr{F}$, и существует множество $\mathscr{H}$ подгрупп G со следующим свойством: для каждой максимальной подгруппы M всякой силовской p-подгруппы в N, которая не $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, $\mathscr{H}$ содержит дополнение M в G. Тогда $\mathscr{H}$ образует покрывающую систему подгрупп для $\mathscr{F}$.*

Теорема 3.3. *Пусть p — простой делитель $|G|$ со свойством $(|G|, p-1) = 1$ и $\mathscr{F}$ — класс всех p-нильпотентных групп. Предположим, что G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathscr{F}$, и существует множество $\mathscr{H}$ подгрупп G со следующим свойством: для каждой циклической подгруппы L порядка p или 4 в N, которая не $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, $\mathscr{H}$ содержит дополнение к L в G. Тогда $\mathscr{H}$ образует покрывающую систему подгрупп для $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

Пусть M — произвольная собственная подгруппа группы G. Тогда $M/(M \cap N) \simeq MN/N \leq G/N \in \mathscr{F}$. Ввиду лемм 2.1(2) и 2.4(4) каждая циклическая подгруппа порядка p или 4 группы $M \cap N$ либо имеет p-нильпотентное дополнение в M, либо $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в M. В силу выбора G имеем $M \in \mathscr{F}$, и потому G — минимальная не-p-нильпотентная группа. Следовательно, G — минимальная ненильпотентная группа в силу теоремы IV.5.4 из [20]. Значит, по теореме 3.4.11 из [2] $G = [P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа группы G и Q — циклическая силовская q-подгруппа в G, $P/\Phi(P)$ — главный фактор G. Очевидно, что $P \subseteq N$.

Предположим, что $|P| = p$. Так как $N_G(P)/C_G(P) \lesssim \operatorname{Aut}(P)$ и $(|G|, p-1) = 1$, получаем, что $N_G(P) = C_G(P)$. По теореме Бернсайда группа G p-нильпотентна; противоречие. Поэтому $|P| \geq p^2$.

Пусть $x \in P \setminus \Phi(P)$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$. Положим $X = L\Phi(P)$. Если L — нормальная подгруппа группы G, то $1 < X/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$. Отсюда следует, что $X/\Phi(P) = P/\Phi(P)$ и $P = X = L\Phi(P) = L$. Так как $|P| > p$, имеем $|P| = 4$. Поскольку P циклическая, она имеет единственную максимальную подгруппу $\langle x^2 \rangle = \Phi(P)$. Это значит, что $P/\Phi(P)$ — циклическая группа порядка 2. Следовательно, $G/\Phi(P) \in \mathscr{F}$. Так как $\mathscr{F}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathscr{F}$. Это противоречие показывает, что L не нормальна в G и $L_G \subseteq \Phi(P)$. По предположению L либо имеет p-нильпотентное дополнение в G, либо $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Если группа L $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, то по лемме 2.4(1) существует нормальная подгруппа T группы G такая, что LT s-перестановочна в G и $(L \cap T)/L_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/L_G)$. Предположим, что $(L \cap T)/L_G \neq 1$. Если $L \subseteq T$, то $L/L_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/L_G)$. По лемме 2.2(1)

$$
\begin{aligned}
&(L/L_G)(\Phi(P)/L_G)/(\Phi(P)/L_G) \\
&\qquad \leq (Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/L_G))(\Phi(P)/L_G)/(\Phi(P)/L_G) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}((G/L_G)/(\Phi(P)/L_G)).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$1 < L\Phi(P)/\Phi(P) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/\Phi(P)) \cap P/\Phi(P) \leq P/\Phi(P).$$

Поскольку $P/\Phi(P)$ — главный фактор G и $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/\Phi(P)) \cap P/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$, видим, что $P/\Phi(P) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/\Phi(P))$. Это влечет, что $G/\Phi(P) \in \mathscr{F}$, и потому $G \in \mathscr{F}$; противоречие. Если $L \nsubseteq T$, то $P \cap T \neq P$. Значит, $(P \cap T)\Phi(P) \neq P$. Так как $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$ и $P/\Phi(P)$ — главный фактор G, то $P \cap T \subseteq \Phi(P)$. Отсюда следует, что подгруппа

$$X/\Phi(P) = L\Phi(P)/\Phi(P) = L(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) = P/\Phi(P) \cap LT\Phi(P)/\Phi(P)$$

s-перестановочна в $G/\Phi(P)$. В силу леммы 2.5 $O^p(G/\Phi(P)) \leq N_{G/\Phi(P)}(X/\Phi(P))$. Так как $P/\Phi(P)$ — элементарная абелева группа, то $X/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)$, поэтому $X/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)O^p(G/\Phi(P)) = G/\Phi(P)$. Это означает, что $P = L\Phi(P) = L$. Полученное противоречие показывает, что $(L \cap T)/L_G = 1$. Следовательно, $L \cap T = L_G$. Отсюда $(P \cap T) \cap L = L_G \neq L$ и, значит, $P \cap T \neq P$. В силу тех же рассуждений, что и выше, подгруппа $X/\Phi(P) = L\Phi(P)/\Phi(P)$ s-перестановочна в $G/\Phi(P)$, стало быть, $P = L$; противоречие.

Поэтому мы можем предположить, что каждая циклическая подгруппа $L = \langle x \rangle$ порядка p или 4 имеет p-нильпотентное дополнение K в G. Тогда $G = LK$ и K p-нильпотентна. Очевидно, $K < G$. Так как G — минимальная ненильпотентная группа, K нильпотентна. Пусть K_p — силовская p-подгруппа группы K. Если $K_p = 1$, то $P = L$; противоречие. Поэтому $K_p \neq 1$. Если $|L| = p$, то $L \cap N_G(K_p) = 1$ или $L \cap N_G(K_p) = L$. Если $L \subseteq N_G(K_p)$, то $G = LK = N_G(K_p)$, и потому $K_p \trianglelefteq G$. Так как $P/\Phi(P)$ — главный фактор G, то $K_p = P$ или $K_p \subseteq \Phi(P)$. Если $K_p \subseteq \Phi(P)$, то $P = LK_p = L$. Полученное противоречие показывает, что $K_p = P$. Отсюда $G = K$; противоречие. Поэтому $|L| = 4$. Так как $K \leq N_G(K_p)$ и $L \cap N_G(K_p) \neq 1$, то $|G : N_G(K_p)| = 1$ или $|G : N_G(K_p)| = 2$. Если $|G : N_G(K_p)| = 1$, то $G = N_G(K_p)$, поэтому $K_p \trianglelefteq G$. Теми же рассуждениями, что и выше, получаем противоречие. Если $|G : N_G(K_p)| = 2$, то $N_G(K_p) \trianglelefteq G$. Так как группа $N_G(K_p)$ p-нильпотентна, то $N_G(K_p)$ имеет нормальную холлову p'-подгруппу D. Очевидно, что D также является нормальной холловой p'-подгруппой группы G. Таким образом, G p-нильпотентна. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.4. *Пусть p — простой делитель $|G|$ со свойством $(|G|, p^2-1) = 1$ и $\mathscr{F}$ — класс всех p-нильпотентных групп. Предположим, что G имеет нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathscr{F}$, и существует множество $\mathscr{H}$ подгрупп G со следующим свойством: для каждой подгруппы L порядка p^2 в N, которая не $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, $\mathscr{H}$ содержит дополнение L в G. Тогда $\mathscr{H}$ образует покрывающую систему подгрупп для $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

Пусть M — произвольная собственная подгруппа группы G. Тогда $M/(M\cap N) \simeq MN/N \leq G/N \in \mathscr{F}$. В силу лемм 2.1(2) и 2.4(4) каждая подгруппа порядка p^2 группы $M \cap N$ либо имеет p-нильпотентное дополнение в M, либо $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в M. В силу выбора G имеем $M \in \mathscr{F}$, поэтому G — минимальная не p-нильпотентная группа. Следовательно, G — минимальная ненильпотентная группа по теореме IV.5.4 из [20]. Значит, по теореме 3.4.11 в [2] $G = [P]Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа в G и Q — циклическая силовская q-подгруппа в G, $P/\Phi(P)$ — главный фактор G. Очевидно, что $P \subseteq N$. В силу леммы 2.7 имеем $|P| \geq p^3$.

Если $\Phi(P) = 1$, то P — элементарная абелева p-группа. Пусть L — подгруппа группы P порядка p^2. Тогда по предположению L либо имеет p-нильпотентное дополнение в G, либо $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Предположим, что L имеет p-нильпотентное дополнение T в G. Тогда $G = LT$ и T p-нильпотентна. Очевидно, что $T < G$. Так как G — ненильпотентная группа, T нильпотентна. Пусть T_p — силовская p-подгруппа группы T. Если $T_p = 1$, то $P = L$. Это противоречит тому, что $|P| \geq p^3$. Значит, $T_p \neq 1$. Поскольку $T \leq N_G(T_p)$ и $L \cap N_G(T_p) \neq 1$, то $|G : N_G(T_p)| = 1$ или $|G : N_G(T_p)| = p$. Если $|G : N_G(T_p)| = 1$, то $T_p \trianglelefteq G$. Так как P — главный фактор группы G, имеем $T_p = P$, и потому $G = T$ p-нильпотентна; противоречие. Значит, $|G : N_G(T_p)| = p$. Пусть $P_1 = P \cap N_G(T_p)$. Тогда $P_1 \trianglelefteq G$. Отсюда следует, что $P = P_1$ или $P_1 = 1$. Если $P_1 = 1$, то $P \cap N_G(T_p) = 1$, что противоречит условию $T_p \subseteq P$. Поэтому $P = P_1$ и $P \subseteq N_G(T_p)$. Это влечет, что $G = PN_G(T_p) = N_G(T_p)$; противоречие. Итак, предположим, что подгруппа L $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. В силу леммы 2.4(1) существует нормальная подгруппа T группы G такая, что подгруппа LT s-перестановочна в G и $(L\cap T)/L_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/L_G)$. Так как P — минимальная нормальная подгруппа в G, то $L_G = 1$ и $L \cap T \subseteq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. Предположим, что $L\cap T = 1$. Тогда $P\cap T = 1$. Отсюда следует, что подгруппа $L = L(P\cap T) = P\cap LT$ s-перестановочна в G. В силу леммы 2.5 имеем $O^p(G) \leq N_G(L)$. Так как $L \trianglelefteq P$, то $L \trianglelefteq PO^p(G) = G$. Ввиду минимальности P получаем, что $P = L$ — подгруппа порядка p^2. Полученное противоречие показывает, что $L \cap T \neq 1$, и потому $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \neq 1$. Отсюда следует, что $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \cap P = 1$ или $P \subseteq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. Если $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \cap P = 1$, то $L \cap T \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G) \cap P = 1$; противоречие. Поэтому $P \subseteq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G)$. Это влечет, что $G \in \mathscr{F}$; противоречие.

Предположим, что $\Phi(P) \neq 1$ и $p > 2$. В этом случае мы можем выбрать элемент x в $\Phi(P)$ порядка p и элемент y в $P \setminus \Phi(P)$ порядка p. Тогда $H = \langle x\rangle\langle y\rangle$ — подгруппа группы P порядка p^2. Если H нормальна в G, то $1 < H\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$, и потому $P = H\Phi(P) = \langle x\rangle\langle y\rangle\Phi(P) = \langle y\rangle$, что противоречит условию $|P| \geq p^3$. Значит, H не нормальна в G. По условию H либо имеет p-нильпотентное дополнение в G, либо $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Предположим, что H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. По лемме 2.4(1) существует нормальная подгруппа T группы G такая, что HT s-перестановочна в G и

$(H \cap T)/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. Предположим, что $(H \cap T)/H_G \neq 1$. Если $H \subseteq T$, то $H/H_G \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G)$. Ясно, что $H_G \subseteq \Phi(P)$. Ввиду леммы 2.2(1)

$$(H/H_G)(\Phi(P)/H_G)/(\Phi(P)/H_G) \leq (Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/H_G))(\Phi(P)/H_G)/(\Phi(P)/H_G) \\ \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}((G/H_G)/(\Phi(P)/H_G)).$$

Отсюда следует, что

$$1 < H\Phi(P)/\Phi(P) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/\Phi(P)) \cap P/\Phi(P) \leq P/\Phi(P).$$

Так как $P/\Phi(P)$ является главным фактором G и $Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/\Phi(P)) \cap P/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$, видим, что $P/\Phi(P) \leq Z_\infty^{\mathscr{F}}(G/\Phi(P))$. Это влечет что $G/\Phi(P) \in \mathscr{F}$, и потому $G \in \mathscr{F}$; противоречие. Если $H \nsubseteq T$, то $P \cap T \neq P$. Значит, $(P \cap T)\Phi(P) \neq P$. Так как $(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq G/\Phi(P)$ и $P/\Phi(P)$ — главный фактор G, $P \cap T \subseteq \Phi(P)$. Отсюда следует, что

$$H\Phi(P)/\Phi(P) = H(P \cap T)\Phi(P)/\Phi(P) = P/\Phi(P) \cap HT\Phi(P)/\Phi(P)$$

s-перестановочна в $G/\Phi(P)$. По лемме 2.5

$$O^p(G/\Phi(P)) \leq N_{G/\Phi(P)}(H\Phi(P)/\Phi(P)).$$

Поскольку $P/\Phi(P)$ — элементарная абелева группа, то $H\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)$, поэтому

$$H\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)O^p(G/\Phi(P)) = G/\Phi(P).$$

Значит, $P = H\Phi(P) = \langle y \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $(H \cap T)/H_G = 1$. Следовательно, $H \cap T = H_G$. Стало быть, $(P \cap T) \cap H = H_G \neq H$ и $P \cap T \neq P$. Те же рассуждения, что и выше, показывают, что $H\Phi(P)/\Phi(P)$ s-перестановочна в $G/\Phi(P)$, тем самым $P = \langle y \rangle$. Полученное противоречие показывает, что H имеет p-нильпотентное дополнение K в G. Тогда $G = HK = \langle x \rangle \langle y \rangle K = \langle y \rangle K$ и K p-нильпотентна. Очевидно, что $K < G$. Так как G — минимальная ненильпотентная группа, K нильпотентна. Пусть K_p — силовская p-подгруппа группы K. Если $K_p = 1$, то $P = \langle y \rangle$; противоречие. Потому $K_p \neq 1$. Тогда $\langle y \rangle \cap N_G(K_p) = 1$ или $\langle y \rangle \cap N_G(K_p) = \langle y \rangle$. Если $\langle y \rangle \subseteq N_G(K_p)$, то $G = \langle y \rangle K = N_G(K_p)$, поэтому $K_p \trianglelefteq G$. Так как $P/\Phi(P)$ — главный фактор G, то $K_p = P$ или $K_p \subseteq \Phi(P)$. Если $K_p \subseteq \Phi(P)$, то $P = \langle y \rangle K_p = \langle y \rangle$. Это противоречие показывает, что $K_p = P$. Отсюда $G = K$; противоречие. Если $\langle y \rangle \cap N_G(K_p) = 1$, то $K = N_G(K_p)$ и K_p — максимальная подгруппа P. Стало быть, $P \leq N_G(K_p) = K$; противоречие.

Итак, предположим, что $\Phi(P) \neq 1$ и $p = 2$. По причине, сходной с изложенной выше, в $P \setminus \Phi(P)$ существует элемент порядка 2, т. е. каждый элемент в $P \setminus \Phi(P)$ имеет порядок 4. Пусть $z \in P \setminus \Phi(P)$. Тогда $L = \langle z \rangle$ и $|L| = 4$. По предположению L либо имеет p-нильпотентное дополнение в G, либо $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G. Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 3.3, получаем, что G p-нильпотентна. Итоговое противоречие завершает доказательство.

Замечание 1. Условие $(|G|, p-1) = 1$ в теореме 3.2 нельзя опустить. Например, пусть $G = S_3$ — симметрическая группа степени 3, $p = 3$ и $N = G_3$ — силовская 3-подгруппа группы G. Тогда G/N 3-нильпотентна и каждая максимальная подгруппа силовской 3-подгруппы группы N $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, где $\mathscr{F}$ — класс всех 3-нильпотентных групп. Тем не менее G не 3-нильпотентна.

Замечание 2. Условие $(|G|, p^2 - 1) = 1$ в теореме 3.1 нельзя ни опустить, ни заменить условием $(|G|, p-1) = 1$. Например, пусть $G = A_4$, $p = 2$ и $N = K_4$. Очевидно, G/N 2-нильпотентна и каждая 2-максимальная подгруппа силовской 3-подгруппы в N $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, где $\mathscr{F}$ — класс всех 2-нильпотентных групп. Но G не 2-нильпотентна.

Следствие 3.1. *Пусть p — простой делитель $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Если в G имеется нормальная подгруппа N, для которой G/N p-нильпотентна и всякая максимальная подгруппа каждой силовской p-подгруппы группы N s-перестановочна в G, то G p-нильпотентна.*

Следствие 3.2. *Пусть p — простой делитель $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$. Если в G имеется нормальная подгруппа N, для которой G/N p-нильпотентна и всякая максимальная подгруппа каждой силовской p-подгруппы в N c-нормальна в G, то G p-нильпотентна.*

Замечание 3. Следствия 3.1 и 3.2 могут быть получены непосредственно из теоремы 3.2. Тем не менее с учетом примера 1.2 пусть $G = C_7 \wr C_3 = [K]C_3$ — регулярное сплетение, где K — базисная группа группы G. Пусть $p = 3$. Тогда G 3-нильпотентна и K — нормальная силовская 7-подгруппа группы G. Легко видеть, что каждая максимальная подгруппа H в K не является ни s-перестановочной в G, ни c-нормальной в G, но H $\mathscr{F}_s$-квазинормальна в G, где $\mathscr{F}$ — класс всех 3-нильпотентных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Guo W.* The theory of class of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
4. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138. P. 125–138.
5. *Нр Вэньбинь, Шам К. П., Скиба А. Н.* G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 527–539.
6. *Ли Я.* G-накрывающие системы подгрупп для классов сверхразрешимых групп // Sib. Math. J. 2006. V. 47, N 3. P. 575–583.
7. *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Bd 82, Heft 2. S. 125–132.
8. *Kegel O.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. Bd 78. S. 205–221.
9. *Wang Y.* C-normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180. P. 954–965.
10. *Yang N., Guo W.* On $\mathscr{F}_n$-supplemented subgroups of finite groups // Asian-European J. Math. 2008. V. 1, N 4. P. 619–629.
11. *Feng X., Guo W.* On $\mathscr{F}_h$-normal subgroups of finite groups // Front. Math. China. 2010. V. 5, N 4. P. 653–664.
12. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
13. *Guo W.* On $\mathscr{F}$-supplemented subgroups of finite groups // Manuscripta Math. 2008. V. 127. P. 139–150.
14. *Guo W., Skiba A. N.* Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 2843–2860.
15. *Miao L., Guo W.* On c-supplemented primary subgroups of finite groups // Proc. F. Scorina Gomel State Univ. 2004. V. 6, N 27. P. 3–10.
16. *Chen G., Li J.* The influence of X-semipermutability of subgroups on the structure of finite groups // Sci. China, Ser. A. 2009. V. 52, N 2. P. 261–271.
17. *Robinson Derek J. S.* A course in the theory of groups. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1982.

18. *Shemetkov L. A., Skiba A. N.* On the $X\Phi$-hypercentre of finite groups // J. Algebra. 2009. V. 322. P. 2106–2117.
19. *Skiba A. N.* On weakly s-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
20. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

Статья поступила 14 января 2011 г.

Huang Jianhong (Хуан Цзяньхун)
School of Mathematical Sciences, Xuzhou Normal University,
Xuzhou 221116, P. R. China
Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
jhh320@126.com

Hu Bin (Ху Бинь)
School of Mathematical Sciences, Xuzhou Normal University,
Xuzhou 221116, P. R. China

Yang Nanying (Ян Наньин), Yu Xiaolong (Юй Сяолун)
Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
wbguo@ustc.edu.cn