Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.548.2

УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ ДЛЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

Ц. Я. У, В. Ван

Аннотация. Показано, что квазиконформные отображения на строго псевдовыпуклых гиперповерхностях удовлетворяют системе уравнений Бельтрами. В частности, 1-квазиконформные отображения на таких поверхностях являются CR- или анти-CR-отображениями. Более того, если эти поверхности вещественно аналитические и несферические, то 1-квазиконформные отображения на них с неподвижной точкой могут быть линеаризованы.

Ключевые слова: квазиконформное отображение, строго псевдовыпуклая гиперповерхность, уравнение Бельтрами, CR-отображение.

§ 1. Введение

Квазиконформные отображения на группе Гейзенберга введены Мостовым в [1] при изучении теоремы о жесткости. В последнее время квазиконформные отображения на нильпотентных группах Ли или на общих пространствах Карно — Каратеодори интенсивно изучаются, а именно, получены их различные эквивалентные характеризации [2–4], свойства регулярности [5–7], дифференцируемость [4, 8–10] и приложения [11, 12] и др. Известно, что любое квазиконформное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению Бельтрами. В [13] доказано, что любое квазиконформное отображение на группе Гейзенберга удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Бельтрами. Более того, доказана теорема Лиувилля о 1-квазиконформных отображениях, т. е. что 1-квазиконформные отображения являются CR- или анти-CR-отображениями. В [14] показано CR-свойство 1-квазиконформных отображений на энгелевой группе и получена содержащая единицу компонента группы 1-квазиконформных отображений. Другие деформации CR-отображений между нильпотентной группой Ли порядка 2 и их уравнениями Бельтрами см. в [15]. В этой статье изучаются квазиконформные отображения на строго псевдовыпуклых гиперповерхностях и получены уравнения Бельтрами, которым они удовлетворяют. В частности, 1-квазиконформные отображения на таких поверхностях являются CR- или анти-CR-отображениями. Более того, показано, что если эти поверхности также вещественно аналитические и несферические, то 1-квазиконформные отображения с неподвижной точкой на них могут быть линеаризованы.

This work was partially supported by National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 10871172, 11126203 and 11171298), National Nature Science Foundation of Shandong Province (Grant N ZR2010AL006).

Будем называть $(2n+1)$-мерное гладкое многообразие M *контактным многообразием*, если на нем есть глобальная 1-форма θ такая, что всюду $\theta\wedge(d\theta)^n \neq 0$; она называется *контактной формой. Контактная структура* — подрасслоение HM касательного расслоения TM, состоящее из горизонтальных векторов: $HM = \{X \in TM : \theta(X) = 0\}$. Форма θ определена с точностью до ненулевого множителя. Если при этом существует *комплексная структура* $J : HM \to HM$ такая, что $J^2 = -\operatorname{id}_{HM}$, удовлетворяющая условию интегрируемости: $[Z, Z'] \in C^\infty(M, T_{1,0}M)$ при $Z, Z' \in C^\infty(M, T_{1,0}M)$, где

$$T_{1,0}M = \ker(J - \sqrt{-1}\,\operatorname{id}_{\mathbb{C}HM}), \quad T_{0,1}M = \ker(J + \sqrt{-1}\,\operatorname{id}_{\mathbb{C}HM}),$$

то M называется CR-*многообразием. Формой Леви* L называется эрмитова форма на $T_{1,0}M$, однозначно определяемая равенством

$$L(Z, Z') = -\frac{i}{2}\,d\theta(Z, \overline{Z}') \tag{1.1}$$

для любых $Z, Z' \in T_{1,0}M$. Для вещественных векторов $X, Y \in HM$ форма Леви может быть выражена следующим образом:

$$L(X, Y) = \frac{1}{2}\,d\theta(X, JY) = \frac{1}{2}\,d\theta(Y, JX). \tag{1.2}$$

Форма Леви зависит от выбора θ и также определяется только с точностью до ненулевого числового множителя. Будем говорить, что M *строго псевдовыпукло*, если форма Леви положительна на HM для некоторого θ [16]. C^1-отображение $f : (M_1, T_{1,0}M_1) \to (M_2, T_{1,0}M_2)$ между двумя CR-многообразиями называется *отображением Коши – Римана* (или CR-*отображением*), если $f_*T_{1,0}M_1 \subset T_{1,0}M_2$, где f_* — касательное отображение к f.

Пусть $\mathscr{S}$ — строго псевдовыпуклая гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданная соотношением

$$\mathscr{S} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \rho(z) = 0\}, \tag{1.3}$$

где ρ — гладкая функция, $d\rho \neq 0$ на $\mathscr{S}$. Дифференциал $\tau = i(\bar\partial - \partial)\rho$ определяет контактную структуру на $\mathscr{S}$. Комплексная структура лежащего в его основе пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ индуцирует комплексную структуру J на $H\mathscr{S}$. При этом $T_{1,0}\mathscr{S}$ можно считать пересечением $\mathbb{C}T\mathscr{S}$ с голоморфным касательным расслоением $\mathbb{C}^{n+1}$. Можем полагать, что форма Леви L, ассоциированная с τ, положительна на $H\mathscr{S}$. Пусть T — единичное всюду определенное касательное векторное поле такое, что

$$\tau(T) = 1, \quad d\tau(T, X) = 0 \tag{1.4}$$

для всех векторных полей X на $\mathscr{S}$, тогда $T\mathscr{S} = H\mathscr{S} \oplus \mathbb{R}T$.

Пусть Z_j, $j = 1, \ldots, n$, — глобальные ненулевые сечения $T_{1,0}\mathscr{S}$, образующие базис $T_{1,0}\mathscr{S}$, $H_p\mathscr{S} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\operatorname{Re} Z_j(p), \operatorname{Im} Z_j(p) \mid j = 1, \ldots, n\}$ — *горизонтальное касательное пространство* $\mathscr{S}$ в точке p. Для каждого $q \in \mathscr{S}$ можно определить *инфинитезимальную метрику Карно – Каратеодори* $|\cdot|$ на $H_q\mathscr{S}$, используя форму Леви:

$$|X(q)| = L(X(q), X(q))^{\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

где $X(q) \in H_q\mathscr{S}$. Кусочно гладкая кривая ζ называется *горизонтальной*, если касательные к ней векторы $\dot\zeta(t)$, $t \in [0, 1]$, лежат в горизонтальном касательном пространстве $H_{\zeta(t)}\mathscr{S}$. Любые две точки $p, q \in \mathscr{S}$ могут быть соединены горизонтальной кривой. Тогда *длина* $l(\zeta)$ горизонтальной кривой ζ определяется по формуле

$$l(\zeta) = \int\limits_0^1 |\dot{\zeta}(t)|\,dt. \tag{1.6}$$

Расстояние Карно — Каратеодори $d_c(p,q)$ между точками $p, q \in \mathscr{S}$ определяется как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих p и q.

Гомеоморфизм $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ между областями в $\mathscr{S}$ называется *квазиконформным*, если

$$H(p) = \limsup_{r\to 0} H(p,r) = \limsup_{r\to 0} \frac{\max\limits_{d_c(p,q)=r} d_c(f(p), f(q))}{\min\limits_{d_c(p,q)=r} d_c(f(p), f(q))}, \quad p \in \Omega_1, \tag{1.7}$$

равномерно ограничено. Если к тому же $\|H\|_\infty = \sup\limits_{p\in\Omega_1} H(p) \le K$ для некоторой постоянной $K > 0$, то гомеоморфизм f называют *K-квазиконформным.* Покажем, что квазиконформные отображения между областями в $\mathscr{S}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Бельтрами.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathscr{S}$ определено выше и Ω_1, Ω_2 — две области в $\mathscr{S}$. Пусть $f = (f_1, \dots, f_{n+1}) : \Omega_1 \to \Omega_2$ — сохраняющее (меняющее) ориентацию K-квазиконформное отображение. Тогда $Z_j f_s$, $\overline{Z}_j f_s$ существуют почти всюду и*

(I) *f удовлетворяет следующим уравнениям Бельтрами почти всюду на Ω_1:*

$$\overline{Z}_j f_s = \sum_{k=1}^n r_{kj} Z_k f_s \quad (\text{или } Z_j f_s = \sum_{k=1}^n \tilde{r}_{kj} \overline{Z}_k f_s,), \quad j = 1, \dots, n,\ s = 1, \dots, n+1, \tag{1.8}$$

для некоторых $(n\times n)$-матриц $R = (r_{kj})$ и $\widetilde{R} = (\tilde{r}_{kj})$;

(II) *коэффициенты R и $\overline{R}$ вышеуказанных уравнений Бельтрами удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\|R\| \le \frac{\sqrt{n}\Theta(K-1)}{K+1}, \quad \|\widetilde{R}\| \le \frac{\sqrt{n}\Theta(K-1)}{K+1}, \tag{1.9}$$

где

$$\Theta(p) = \frac{\max\limits_j \{\sqrt{\lambda_j(p)}\}}{\min\limits_j \{\sqrt{\lambda_j(p)}\}}, \tag{1.10}$$

$\lambda_j(p)$ — собственные значения формы Леви (2.2). (*О сохранении ориентации см. после предложения* 3.1.)

В частности, для 1-квазиконформного отображения верно

Следствие 1.1. *Пусть Ω_1, Ω_2 — области в $\mathscr{S}$. Если $f = (f_1, \dots, f_{n+1}) : \Omega_1 \to \Omega_2$ — сохраняющее (меняющее) ориентацию 1-квазиконформное отображение, то оно* CR- (*или анти*-CR-) *отображение почти всюду на Ω_1, т. е.*

$$\overline{Z}_j f_s = 0 \ \text{ п. в.} \quad (\text{или } Z_j f_s = 0), \quad j = 1, \dots, n,\ s = 1, \dots, n+1. \tag{1.11}$$

Покажем, что если, кроме того, $\mathscr{S}$ вещественно аналитическое и несферическое (локально не эквивалентно сфере), то любое гладкое 1-квазиконформное отображение на $\mathscr{S}$ с неподвижной точкой линеаризуемо в следующем смысле.

Следствие 1.2. *Предположим, что $\mathscr{S}$ вещественно аналитическое и несферическое, Ω_1 — область в $\mathscr{S}$. Тогда в окрестности любой точки из Ω_1 можно выбрать нормальные координаты, в которых любое гладкое сохраняющее ориентацию 1-квазиконформное отображение, оставляющее данную точку неподвижной, имеет вид $z^* = \mathscr{U} z$, $w^* = w$, где $\mathscr{U}$ — матрица, сохраняющая форму Леви.*

Для любых псевдовыпуклых гиперповерхностей конечного типа множество строго псевдовыпуклых точек открыто, а множество точек более высокого типа имеет меру нуль. Тем самым получаем

Следствие 1.3. *Теорема* 1.1 *и следствие* 1.1 *выполнены для квазиконформных отображений на псевдовыпуклых гиперповерхностях конечного типа.*

Когда работа над данной статьей была закончена, мы заметили статью [16], в которой получены уравнения Бельтрами для C^2-контактных диффеоморфизмов между строго псевдовыпуклыми CR-многообразиями, удовлетворяющими определенному условию искажения. В [16] не использовался hc-дифференциал, существенный в данной работе, поскольку в общем случае квазиконформные отображения только почти всюду hc-дифференцируемы. Наши результаты также верны для квазиконформных отображений на слабо псевдовыпуклых гиперповерхностях конечного типа. В действительности такие гиперповерхности не являются контактными в точках высокого типа.

Доказательство строится следующим образом. Сначала в § 2 аппроксимируем CR-структуру в точке из $\mathscr{S}$ локальной группой Гейзенберга $\mathscr{G}^p$. Тогда hc-дифференциал $Df(p)$ функции f в p — горизонтальный гомоморфизм из $\mathscr{G}^p$ в $\mathscr{G}^{f(p)}$. Аналогично случаю Гейзенберга [16] в § 3 показано, что дифференциал $Df_*(p)$ симплектичен. Этот факт вместе с отношением между f_{*p} и $Df_*(p)$, доказанным в § 4, приводит к уравнениям Бельтрами. В § 5 получены оценки на коэффициенты уравнений Бельтрами и приведены некоторые приложения.

§ 2. Предварительные сведения

Сильно псевдовыпуклая гладкая гиперповерхность $\mathscr{S}$ с горизонтальным касательным подрасслоением $H\mathscr{S}$ является равномерно регулярным пространством Карно — Каратеодори [17, 18], т. е. $\dim H\mathscr{S}$ постоянна. Таким образом, результаты [4, 10, 17, 19] могут быть применены к $\mathscr{S}$.

Напомним, что $T \in T\mathscr{S}$ — векторное поле, двойственное к τ, заданному равенствами (1.4). Пусть

$$[Z_j, \overline{Z}_k] = -2ih_{jk}T \bmod(Z, \overline{Z}), \tag{2.1}$$

где $h_{jk} \in C^\infty(\mathscr{S})$. В силу антикоммутативности скобки Ли $H = (h_{jk})$ — гладкая эрмитова матричнозначная функция. Значит, существует гладкая единичная матричнозначная функция U такая, что

$$U^*HU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \tag{2.2}$$

где λ_j — вещественнозначные гладкие функции на $\mathscr{S}$. Поскольку $\mathscr{S}$ строго псевдовыпукло, имеем $\lambda_j > 0$. Определим $W_1, \dots, W_n$ — другую систему сечений $T_{1,0}\mathscr{S}$:

$$(W_1, \dots, W_n) = (Z_1, \dots, Z_n)\overline{U}, \tag{2.3}$$

где U заданы по формуле (2.2). Тогда

$$\begin{aligned}[][W_k, \overline{W}_j] = \left[\sum_{l=1}^n \bar{u}_{lk}Z_l, \sum_{m=1}^n u_{mj}Z_m\right] &= -2i\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^n \bar{u}_{lk}h_{lm}u_{mj}T \bmod(Z, \overline{Z}) \\ &= -2i\lambda_k\delta_{kj}T \bmod(Z, \overline{Z}) \end{aligned}\tag{2.4}$$

и форма Леви в этом базисе диагональна: $L(W_k, W_j) = \frac{1}{2}\lambda_k \delta_{kj}$, поскольку $d\tau(W_k, \overline{W}_j) = \frac{1}{2}[W_k(\tau(\overline{W}_j)) - \overline{W}_j(\tau(W_k)) - \tau([W_k, \overline{W}_j])]$. Положим

$$X_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(W_j + \overline{W}_j), \quad X_{j+n} = \frac{i}{\sqrt{\lambda_j}}(W_j - \overline{W}_j), \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Тогда $\deg X_k = 1$, $\deg T = 2$, $k = 1, \dots, 2n$. Далее обозначим $X_{2n+1} = T$. В силу (2.4) имеем

$$|X_j|^2 = L(X_j, X_j) = \frac{1}{2} d\tau(X_j, JX_j) = \frac{1}{2} d\tau\left(\frac{W_j + \overline{W}_j}{\sqrt{\lambda_j}}, \frac{iW_j - i\overline{W}_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right) = 1. \tag{2.6}$$

Аналогично $|X_{j+n}|^2 = 1$. Определим структуру c_{lmk}:

$$[X_l, X_m] = \sum_{k=1}^{2n+1} c_{lmk} X_k, \quad l, m = 1, \dots, 2n+1. \tag{2.7}$$

В силу (2.4) и того, что $C^\infty(T_{1,0}\mathscr{S})$ замкнуто относительно взятия скобок, имеем

$$c_{jk(2n+1)} = c_{(n+j)(n+k)(2n+1)} = 0, \quad c_{(n+j)k(2n+1)} = -c_{j(n+k)(2n+1)} = 4\delta_{jk}, \tag{2.8}$$

$1 \le j, k \le n$ (см. [20, с. 474, 475]).

Канонические координаты на $\mathbb{R}^{2n+1}$ обозначаем через $(x_1, \dots, x_{2n+1})$. Пусть $B_a(r)$ — открытый евклидов шар радиуса r с центром в $a \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и $\|x\| = \max\{|x_j| \mid j = 1, \dots, 2n+1\}$ при $x = (x_1, \dots, x_{2n+1})$. Из [4, 19] известно, что отображение

$$\begin{gathered} \theta_p : B_0(\kappa_p)(\subset \mathbb{R}^{2n+1}) \to O_p \subset \mathscr{S}, \\ (x_1, \dots, x_{2n+1}) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1} x_j X_j\right)(p), \quad \theta_p(0) = \theta_p(0, \dots, 0) = p \in \mathscr{S}, \end{gathered} \tag{2.9}$$

— гладкий диффеоморфизм шара $B_0(\kappa_p)$ на некоторую окрестность O_p точки p, непрерывно зависящий от p, где κ_p — положительное число, которое можно считать независимым от p в компактной части $\mathscr{S}$, $\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} x_j X_j\right)(p)$ — интегральная кривая векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{2n+1} x_j X_j$ с началом в p. Заметим, что $\left(\theta_p^{-1}\right)_* X_j(p) = \frac{\partial}{\partial x_j}(0)$. Координаты $(x_1, \dots, x_{2n+1}) = \theta_p^{-1} u \in B_0(\kappa_p)$ называются *нормальными координатами* $u = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} x_j X_j\right)(p)$.

Ясно, что каждая $q \in \mathscr{S}$ принадлежит некоторой компактно вложенной области $\mathscr{O} \subset \mathscr{S}$ такой, что $\overline{\mathscr{O}} \subset \mathscr{S}$ и $\mathscr{O} \subset \theta_p(B_0(\kappa))$, где $\kappa = \inf\{\kappa_p \mid p \in \mathscr{O}\}$ для всех $p \in \mathscr{S}$. Из определения $\mathscr{O}$ следует, что для всех $u, v \in \overline{\mathscr{O}}$ существует единственный набор чисел $(y_1, \dots, y_{2n+1})$ такой, что $u = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} y_j X_j\right)(v)$. *Квазиметрика* $d_\infty(u, v)$ между $u, v \in \mathscr{O}$ определяется как неотрицательное число:

$$d_\infty(u, v) = \max\{|y_1|, \dots, |y_{2n}|, |y_{2n+1}|^{\frac{1}{2}}\}. \tag{2.10}$$

Метрика Карно — Каратеодори d_c и квазиметрика d_∞ локально эквивалентны (теорема Болла — Бокса из [21]). Введем обозначение: $\mathrm{Box}(p, r) = \{x \in \mathscr{O} \mid d_\infty(p, x) < r\} \subset \mathscr{S}$.

Предложение 2.1 (формула Бэйкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа в форме Дынкина [19, 22, 23]). *Для двух гладких векторных полей X, Y в некоторой ограниченной области $V \subset \mathbb{R}^N$ и $v \in V$ имеет место равенство*

$$\exp Y \circ \exp X(v) = \exp\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\tilde p,\tilde q}\frac{(-1)^{n-1}(p_1!q_1!\dots p_n!q_n!)^{-1}}{n(p_1+q_1+\dots+p_n+q_n)} \times (\operatorname{ad} Y)^{q_n}(\operatorname{ad} X)^{p_n}\dots(\operatorname{ad} Y)^{q_1}(\operatorname{ad} X)^{p_1-1}X\Bigg)(v), \quad (2.11)$$

где $\circ$ *— композиция экспоненциальных отображений,* $(\operatorname{ad} A)B = [A,B]$, $(\operatorname{ad} A)^0 B = B$, $\tilde p = (p_1,\dots,p_n)$, $\tilde q = (q_1,\dots,q_n)$ *и сумма берется по всем неотрицательным целым степеням* $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$ *таким, что* $p_k + q_k \geq 1$ *для натуральных* n.

В $(2n+1)$-мерном мультииндексе $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{2n+1})$ положим $|\alpha|_h = \sum\limits_{k=1}^{2n}\alpha_k + \alpha_{2n+1}^2$. Символом e_j обозначим $(2n+1)$-мерный вектор $(0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$. Рассмотрим векторные поля $\sum\limits_{j=1}^{2n+1} x_jX_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{2n+1} y_jX_j$ в $\mathscr{O}$ при $\|x\|,\|y\| \leq \kappa$. Поскольку θ_p — диффеоморфизм, для любых $p \in \mathscr{O}$ существует единственный вектор $(g_1,\dots,g_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ с постоянными коэффициентами такой, что

$$\exp\Bigg(\sum_{j=1}^{2n+1} g_jX_j\Bigg)(p) = \exp\Bigg(\sum_{j=1}^{2n+1} y_jX_j\Bigg)\circ\exp\Bigg(\sum_{j=1}^{2n+1} x_jX_j\Bigg)(p). \quad (2.12)$$

Тогда в силу (2.11) имеем

$$g_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\alpha>0,\beta>0,\\ |\alpha+\beta|_h \geq \deg X_j,\ 2\leq|\alpha+\beta|\leq k_0}} F^j_{\alpha,\beta}(p)x^\alpha y^\beta + o(\|(x,y)\|^{k_0}), \quad (2.13)$$

$j = 1,\dots,2n+1$, $k_0 \geq 3$, где α и β — мультииндексы. В частности, (2.11) может быть записано в виде $\exp Y \circ \exp X(v) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \dots)(v)$. Тем самым в силу (2.7) на $\mathscr{S}$ для $j = 2n+1$ получаем

$$g_{2n+1} = x_{2n+1} + y_{2n+1} + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2n} c_{kl(2n+1)}x_ky_l + \sum_{\substack{\alpha>0,\beta>0,\\ |\alpha+\beta|_h>2,\ 2\leq|\alpha+\beta|\leq k_0}} F^{2n+1}_{\alpha,\beta}(p)x^\alpha y^\beta + o(\|(x,y)\|^{k_0}), \quad k_0 \geq 3.$$

А именно,

$$F^{2n+1}_{e_k,e_l} = \frac{1}{2}c_{kl(2n+1)}. \quad (2.14)$$

Используя нормальные координаты θ_p^{-1}, определим действие *группы растяжений* Δ^p_ε в окрестности точки $p \in \mathscr{S}$. Для точки $u = \exp\Bigg(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} u_jX_j\Bigg)(p)$ положим

$$\Delta^p_\varepsilon u = \exp\Bigg(\sum_{j=1}^{2n}\varepsilon u_jX_j + \varepsilon^2 u_{2n+1}X_{2n+1}\Bigg)(p), \quad (2.15)$$

если правая часть этого равенства имеет смысл. Из определения квазиметрики видно, что $\Delta^p_\varepsilon : \operatorname{Box}(p,r) \to \operatorname{Box}(p,\varepsilon r)$, $r \in (0,\kappa_p]$.

Лемма 2.1 [4, теорема 1.1; 19, лемма 3.1]. *Для точки p из $\mathscr{S}$*

(1) *найдутся векторные поля $\{\widehat{X}_j^p\}$, $\widehat{X}_j^p(p) = X_j(p)$, $j = 1, \dots, 2n+1$, на* $\mathrm{Box}(p, \kappa_p)$, *содержащие базис нильпотентной градуированной алгебры Ли с таблицей коммутаторов*

$$[\widehat{X}_j^p, \widehat{X}_k^p] = \sum_{\deg X_l = \deg X_j + \deg X_k} c_{jkl} \widehat{X}_l^p, \tag{2.16}$$

где $c_{jkl} = c_{jkl}(p)$;

(2) *если $\{{}^\varepsilon X_j\} = \{\varepsilon^{\deg X_j} X_j\}$, $j = 1, \dots, 2n+1$, — векторные поля на* $\mathrm{Box}(p, \varepsilon\kappa_p)$, *то равномерная сходимость*

$$X_j^\varepsilon = \left(\Delta^p_{\varepsilon^{-1}}\right)_* {}^\varepsilon X_j \to [\varepsilon \to 0] \widehat{X}_j^p, \quad j = 1, \dots, 2n+1, \tag{2.17}$$

имеет место в точках из $\mathrm{Box}(p, \kappa_p)$ *и она равномерна по p на любом компакте.*

Предложение 2.2. *Векторные поля $\widehat{X}_k'^p = \left(\theta_p^{-1}\right)_* \widehat{X}_k^p$ для любой точки $x = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \theta_p^{-1}(\mathrm{Box}(p, \kappa_p))$ можно записать в виде*

$$\begin{gathered} \widehat{X}_j'^p = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_{j+n} \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \quad \widehat{X}_{j+n}'^p = \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} - 2x_j \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \\ \widehat{X}_{2n+1}'^p = \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \quad j = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Доказательство. Ввиду предложения 2.1 в [17] координаты векторного поля $\widehat{X}_k'^p = \left(\theta_p^{-1}\right)_* \widehat{X}_k^p = \sum\limits_{j=1}^{2n+1} \hat{u}_k^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $k = 1, \dots, 2n+1$, в стандартном базисе $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}$ в точке $x = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \theta_p^{-1}(\mathrm{Box}(p, \kappa_p))$ имеют вид

$$\hat{u}_k^j = \begin{cases} \delta_{kj} & \text{при } j \le 2n, \\ \sum\limits_{\substack{\alpha > 0 \\ |\alpha + e_k|_h = 2}} \widehat{F}^{p,j}_{\alpha, e_k} \cdot x^\alpha & \text{при } j = 2n+1, \end{cases} \tag{2.19}$$

где $\widehat{F}^{p,j}_{\alpha, e_k} = F^j_{\alpha, e_k}(p)$ постоянны. Тогда в силу (2.8) и (2.14) для $|e_m + e_l|_h = 2$, $1 \le m, l \le 2n$, найдем

$$\widehat{F}^{p,(2n+1)}_{e_m, e_l} = F^{2n+1}_{e_m, e_l}(p) = \begin{cases} 2 & \text{при } m - l = n, \\ -2 & \text{при } l - m = n, \\ 0 & \text{при } |m - l| \ne n. \end{cases} \tag{2.20}$$

Из соотношений (2.19) и (2.20) следует, что для $1 \le k \le n$

$$\hat{u}_k^j = \begin{cases} \delta_{kj} & \text{при } j \le 2n, \\ 2x_{n+k} & \text{при } j = 2n+1, \end{cases} \quad \hat{u}_{k+n}^j = \begin{cases} \delta_{kj} & \text{при } j \le 2n, \\ -2x_k & \text{при } j = 2n+1 \end{cases}$$

и $\hat{u}_{2n+1}^j = \delta_{(2n+1)j}$, откуда вытекает (2.18).

Замечание 2.1. В силу предложения 2.2 видим, что на $\mathrm{Box}(p, \kappa_p) \subset \mathscr{S}$ имеет место

$$\widehat{X}_k^p = (\theta_p)_* \widehat{X}_k'^p, \quad \widehat{X}_k^p(p) = (\theta_p)_{*0} \widehat{X}_k'^p(0) = (\theta_p)_{*0} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, \dots, 2n+1. \tag{2.21}$$

Из (2.18) вытекает, что на $\theta_p^{-1}(\mathrm{Box}(p,\kappa_p)) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ единственными нетривиальными коммутаторными отношениями между $\{\widehat{X}_j'^p\}$ будут

$$[\widehat{X}_j'^p, \widehat{X}_{n+j}'^p] = -[\widehat{X}_{n+j}'^p, \widehat{X}_j'^p] = -4\widehat{X}_{2n+1}'^p. \tag{2.22}$$

По следствию 3.2 в [19] на $\mathrm{Box}(p,\kappa_p) \subset \mathscr{S}$ имеет место

$$[\widehat{X}_j^p, \widehat{X}_{n+j}^p] = -[\widehat{X}_{n+j}^p, \widehat{X}_j^p] = -4\widehat{X}_{2n+1}^p. \tag{2.23}$$

Все остальные коммутаторы обращаются в нуль.

Отображение

$$\hat{\theta}_q : B_0(\hat{\kappa}_q)(\subset \mathbb{R}^{2n+1}) \to \widehat{O}_q \subset \mathscr{S}, \quad (x_1,\dots,x_{2n+1}) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1} x_j \widehat{X}_j^p\right)(q) \tag{2.24}$$

— гладкий диффеоморфизм евклидова шара $B_0(\hat{\kappa}_q)$, где $\hat{\kappa}_q$ — достаточно малое положительное число на некоторую окрестность $\widehat{O}_q$ точки $q \in \mathrm{Box}(p,\kappa_p)$, где κ_p из леммы 2.1. Более того, $\hat{\theta}_q$ определяет систему координат в $\widehat{O}_q$. Пусть $\widehat{\mathscr{O}}_p$ — область такая, что $\widehat{\mathscr{O}}_p \subset \hat{\theta}_q(B_0(\hat{\kappa}))$ для всех точек $q \in \mathrm{Box}(p,\kappa_p)$, и пусть $\hat{\kappa} = \inf\{\hat{\kappa}_q \mid q \in \mathrm{Box}(p,\kappa_p)\}$. Из определения $\widehat{\mathscr{O}}_p$ следует, что для произвольных $u, v \in \widehat{\mathscr{O}}_p$ существует единственный вектор $(y_1,\dots,y_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ такой, что $u = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} \hat{y}_j \widehat{X}_j^p\right)(v)$. Определим квазирасстояние $d_\infty^p(u,v)$ между $u, v \in \widehat{\mathscr{O}}_p$:

$$d_\infty^p(u,v) = \max\{|\hat{y}_1|,\dots,|\hat{y}_{2n}|,|\hat{y}_{2n+1}|^{\frac{1}{2}}\}. \tag{2.25}$$

Из предложения 2.3 в [17] следует, что $\mathscr{G}^p$ — локальная группа Карно, если $\widehat{\mathscr{O}}_p$ — вложенное многообразие и групповая операция определена по формуле

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1} y_i \widehat{X}_j^p\right) \circ \exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1} x_j \widehat{X}_j^p\right)(p) \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1} x_j \widehat{X}_j^p + \sum_{j=1}^{2n+1} y_j \widehat{X}_j^p + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{2n+1} x_j \widehat{X}_j^p, \sum_{j=1}^{2n+1} y_j \widehat{X}_j^p\right]\right)(p) \end{aligned} \tag{2.26}$$

для любых $x = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} x_j \widehat{X}_j^p\right)(p) \in \widehat{\mathscr{O}}_p$ и $y = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} y_j \widehat{X}_j^p\right)(p) \in \widehat{\mathscr{O}}_p$. Здесь второе равенство следует из формулы Бэйкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа (2.11) и (2.23), откуда видно, что $\mathscr{G}^p$ — локальная группа Гейзенберга, имеющая нильпотентную градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}^p$, порожденную $\{\widehat{X}_j^p\}$. При этом $\mathscr{G}^p$ называется *нильпотентным касательным конусом* $\mathscr{S}$ в p [17].

Определим метрику Карно — Каратеодори d_c^p на $\mathscr{G}^p$. Для каждого $x \in \mathscr{G}^p$ фиксируем квадратичную форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{G}^p}$ на $H_x\mathscr{G}^p$, относительно которой векторы $\widehat{X}_1^p(x),\dots,\widehat{X}_{2n}^p(x)$ ортонормальны:

$$\left|\sum_{j=1}^{2n} a_j \widehat{X}_j^p(x)\right|_{\mathscr{G}^p}^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{2n} a_j \widehat{X}_j^p(x), \sum_{j=1}^{2n} a_j \widehat{X}_j^p(x)\right\rangle_{\mathscr{G}^p} = \sum_{j=1}^{2n} a_j^2, \tag{2.27}$$

где $a_j \in \mathbb{R}$. Тогда *длина* $l_p(\xi)$ *горизонтальной кривой* ξ на $\mathscr{G}^p$ определяется по формуле

$$l_p(\xi) = \int\limits_0^1 \langle \dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t) \rangle_{\mathscr{G}^p}^{\frac{1}{2}}\, dt. \tag{2.28}$$

Расстояние Карно — Каратеодори $d_c^p(x,y)$ между точками $x, y \in \mathscr{G}^p$ определяется как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих x и y.

Определим однопараметрическую группу растяжений δ_t^p на $\mathscr{G}^p$:

$$\delta_t^p x = \exp\left(\sum_{j=1}^{2n} t x_j \widehat{X}_j^p + t^2 x_{2n+1} \widehat{X}_{2n+1}^p\right)(p) \in \mathscr{G}^p, \quad t \in (0, t(x)), \tag{2.29}$$

для $x = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{2n+1} x_j \widehat{X}_j^p\right)(p) \in \mathscr{G}^p$, где зависимость $t(x)$ определяется как верхняя граница такая, что при $0 < t < t(x)$ правая часть уравнения лежит в $\mathscr{G}^p$. Отношение $\delta_t^p x \cdot \delta_\tau^p x = \delta_{t\tau}^p x$ определено только для $t, \tau, t\tau \in (0, t(x))$. Из свойства 2.2 в [17] получаем

$$d_\infty^p\big(\delta_\varepsilon^p x, \delta_\varepsilon^p y\big) = \varepsilon d_\infty^p(x,y) \tag{2.30}$$

для произвольных $x, y \in \mathscr{G}^p$ и малого $\varepsilon > 0$.

§ 3. *hc*-Дифференциал квазиконформного отображения на $\mathscr{S}$ и доказательство п. (I) теоремы 1.1

Понятие дифференцируемости на группе Карно и результаты о фундаментальной дифференцируемости для квазиконформных отображений между группами Карно получены Пансю в [9], а понятие дифференцируемости для квазиконформных отображений между пространствами Карно — Каратеодори впервые предложены Маргулисом и Мостовым в [8]. В [4, 10] С. К. Водопьяновым введено понятие *hc*-дифференцируемости отображений между пространствами Карно — Каратеодори и установлена *hc*-дифференцируемость почти всюду для квазиконформных отображений между пространствами Карно — Каратеодори.

Напомним, что *горизонтальным гомоморфизмом* $L : \big(\mathscr{G}^p, d_c^p\big) \to \big(\mathscr{G}^q, d_c^q\big)$ локальных групп Гейзенберга называется гладкий гомоморфизм групп Гейзенберга такой, что

(1) включение $L(\mathscr{G}^p \cap \exp H\mathscr{G}^p) \subset \mathscr{G}^q \cap \exp H\mathscr{G}^q$ выполнено для любых $v \in \mathscr{G}^p \cap \exp H\mathscr{G}^p$ таких, что $L(v) \in \mathscr{G}^q$;

(2) $L\big(\delta_\varepsilon^p v\big) = \delta_\varepsilon^q L(v)$ для любых $v \in \mathscr{G}^p$ и $\varepsilon > 0$ таких, что $\delta_\varepsilon^p v \in \mathscr{G}^p$ и $\delta_\varepsilon^q L(v) \in \mathscr{G}^q$.

Отображение $f : \Omega \to \Omega'$ между двумя областями в многообразии Карно *hc-дифференцируемо* в точке $p \in \Omega$ [4], если существует горизонтальный гомоморфизм $L : \big(\mathscr{G}^p, d_c^p\big) \to \big(\mathscr{G}^{f(p)}, d_c^{f(p)}\big)$ нильпотентных касательных конусов такой, что

$$d_c^{f(p)}\big(\Delta_{t^{-1}}^{f(p)} f\big(\delta_t^p(v)\big), L(v)\big) = o(1) \quad \text{при } t \to 0, \tag{3.1}$$

где $o(\cdot)$ равномерно относительно v на каждом компакте в $\mathscr{G}^p$. Горизонтальный гомоморфизм $L : \big(\mathscr{G}^p, d_c^p\big) \to \big(\mathscr{G}^{f(p)}, d_c^{f(p)}\big)$, удовлетворяющий (3.1), называется *hc-дифференциалом* f в точке $p \in \Omega$ и обозначается через $Df(p)$. Более того, известно, что hc-дифференциал коммутирует с однопараметрической группой расширений (см. [10, с. 203]):

$$\delta_t^{f(p)} \circ Df(p) = Df(p) \circ \delta_t^p, \tag{3.2}$$

если обе части уравнения имеют смысл.

Поскольку $Df(p) : \mathscr{G}^p \to \mathscr{G}^{f(p)}$ — гладкий гомоморфизм, $Df(p)$ отображает единицу из $\mathscr{G}^p$ в единицу в $\mathscr{G}^{f(p)}$. Дифференциал $d(Df(p))$ отображения $Df(p)$ в точке p — линейное преобразование $T_p\mathscr{G}^p$ в $T_{f(p)}\mathscr{G}^{f(p)}$. С помощью естественного отождествления касательных пространств в единицах с алгебрами Ли это линейное преобразование $d(Df(p))$ индуцирует линейное преобразование левоинвариантных векторных полей из $\mathscr{G}^p$ в левоинвариантные векторные поля из $\mathscr{G}^{f(p)}$, т. е. линейное преобразование алгебры Ли $\mathfrak{g}^p$ группы $\mathscr{G}^p$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}^{f(p)}$ группы $\mathscr{G}^{f(p)}$, которое обозначим через $Df_*(p)$. А именно, $Df_*(p) : \mathfrak{g}^p \to \mathfrak{g}^{f(p)}$. Для $X \in \mathfrak{g}^p$ $Df_*(p)X$ — единичное векторное поле в $\mathfrak{g}^{f(p)}$ такое, что

$$(Df_*(p)X)(f(p)) = d(Df(p))(X(p)), \tag{3.3}$$

и $Df_*(p) : \mathfrak{g}^p \to \mathfrak{g}^{f(p)}$ — гомоморфизм алгебр Ли, т. е.

$$[Df_*(p)X, Df_*(p)Y] = Df_*(p)[X, Y] \tag{3.4}$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}^p$. Равенство

$$Df(p)(\exp(X)(p)) = \exp(Df_*(p)X)(f(p)) \tag{3.5}$$

выполняется для любых $X = \sum\limits_{j=1}^{2n+1} a_j \widehat{X}_j^p \in \mathfrak{g}^p$, $a_j \in \mathbb{R}$, таких, что обе его части имеют смысл. Заметим, что доказательства (3.4) и (3.5) аналогичны доказательствам теорем 3.14 и 3.32 в [24].

Предложение 3.1. *Для $p \in \mathscr{S}$ гомоморфизм алгебры Ли $Df_*(p)$, индуцированный hc-дифференциалом $Df(p)$ функции f в точке p, отображает горизонтальное пространство $H\mathscr{G}^p$ в горизонтальное пространство $H\mathscr{G}^{f(p)}$. Более того, $Df_*(p)\widehat{X}_{2n+1}^p = \gamma(p)\widehat{X}_{2n+1}^{f(p)}$ для некоторого $\gamma(p) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для произвольного $X \in H\mathscr{G}^p$ возьмем достаточно маленькое $t > 0$ такое, что $\exp(tX)(p) \in \mathscr{G}^p$ и $Df(p)(\exp(tX)(p)) \in \mathscr{G}^{f(p)}$. Поскольку по определению $Df(p)$ — горизонтальный гомоморфизм между $\mathscr{G}^p$ и $\mathscr{G}^{f(p)}$, существует $Y \in H\mathscr{G}^{f(p)}$ такой, что

$$Df(p)(\exp(tX)(p)) = \exp(Y)(f(p)). \tag{3.6}$$

Тогда в силу (3.5) имеем

$$\exp(tDf_*(p)X)(f(p)) = \exp(Y)(f(p)). \tag{3.7}$$

Так как $\hat{\theta}_{f(p)}$ — диффеоморфизм и $Df_*(p)X \in \mathfrak{g}^{f(p)}$, получим

$$Df_*(p)X = \frac{1}{t}Y \in H\mathscr{G}^{f(p)}. \tag{3.8}$$

Пусть $Df_*(p)\widehat{X}_{2n+1}^p = c_1X^{f(p)} + c_2\widehat{X}_{2n+1}^{f(p)}$ для некоторых $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $X^{f(p)} \in H\mathscr{G}^{f(p)}$. В силу (2.23), (3.4) имеем

$$\big[Df_*(p)\widehat{X}_j^p, Df_*(p)\widehat{X}_{j+n}^p\big] = Df_*(p)\big[\widehat{X}_j^p, \widehat{X}_{j+n}^p\big] = -4Df_*(p)\widehat{X}_{2n+1}^p, \tag{3.9}$$

при этом левая часть (3.9) — мультипликатор $\widehat{X}^p_{2n+1}$ ввиду (2.23), тем самым $c_1 = 0$. Предложение доказано.

В предложении 3.1 если $\gamma(p) > 0$, то f называется *сохраняющим ориентацию* в p, если $\gamma(p) < 0$, то — *меняющим ориентацию* в p. Следующее предложение позволяет вычислить hc-дифференциал через обычные производные.

По предложению 4.1 в [4] квазиконформное отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ hc-дифференцируемо почти всюду. Пусть f hc-дифференцируемо в точке $p \in \Omega_1$. Тогда по предложению 3.1 $Df_*(p)$ отображает горизонтальное пространство $H\mathscr{G}^p$ в горизонтальное пространство $H\mathscr{G}^{f(p)}$, поэтому можем предположить, что

$$Df_*(p)\big(\widehat{X}^p_1, \dots, \widehat{X}^p_{2n}\big) = \big(\widehat{X}^{f(p)}_1, \dots, \widehat{X}^{f(p)}_{2n}\big)A(p) \tag{3.10}$$

для некоторой вещественной $(2n \times 2n)$-матрицы $A(p) = (a_{jk})_{2n\times 2n}$. Также в силу предложения 3.1 имеем

$$Df_*(p)\widehat{X}^p_{2n+1} = \gamma(p)\widehat{X}^{f(p)}_{2n+1} \tag{3.11}$$

для некоторого $\gamma(p) \in \mathbb{R}$. Определим билинейную форму $B(\cdot,\cdot)$ на $H\mathscr{G}^p$:

$$\big[\widehat{X}^p_j, \widehat{X}^p_k\big] = -4B\big(\widehat{X}^p_j, \widehat{X}^p_k\big)\widehat{X}^p_{2n+1}, \quad j,k = 1,\dots,2n. \tag{3.12}$$

Тогда согласно (2.23)

$$\mathscr{B} := \big(B\big(\widehat{X}^p_j, \widehat{X}^p_k\big)\big) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где I_n — единичная $(n \times n)$-матрица.

Предложение 3.2. *Для квазиконформного отображения $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, hc-дифференцируемого в $p \in \Omega_1$, матрица A, заданная формулой* (3.10), *может быть записана в следующем виде:*

(I) $A = \sqrt{\gamma}S_1$ *при $\gamma(p) > 0$ для некоторой симплектической матрицы S_1;*

(II) $A = \sqrt{-\gamma}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} S_2$ *при $\gamma(p) < 0$ для некоторой симплектической матрицы S_2.*

Доказательство. В силу (3.10) имеем

$$Df_*(p)\widehat{X}^p_k = \sum_{j=1}^{2n} a_{jk}\widehat{X}^{f(p)}_j, \quad k = 1,\dots,2n.$$

Заметим, что $Df_*(p)$ — гомоморфизм алгебр Ли, т. е.

$$\big[Df_*(p)\widehat{X}^p_k, Df_*(p)\widehat{X}^p_l\big] = Df_*(p)\big[\widehat{X}^p_k, \widehat{X}^p_l\big]. \tag{3.14}$$

Сравнивая коэффициенты при $\widehat{X}^{f(p)}_{2n+1}$ в обеих частях (3.14), в силу (3.11), (3.12) получаем

$$B\left(\sum_{j=1}^{2n} a_{jk}\widehat{X}^{f(p)}_j, \sum_{j=1}^{2n} a_{jl}\widehat{X}^{f(p)}_j\right) = \gamma B\big(\widehat{X}^p_k, \widehat{X}^p_l\big).$$

А именно,

$$A^T\mathscr{B}A = \gamma\mathscr{B}. \tag{3.15}$$

(I) При $\gamma > 0$ положим $S_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}A$, тогда (3.15) влечет $S_1^T\mathscr{B}S_1 = \mathscr{B}$. Тем самым S_1 — симплектическая матрица.

(II) При $\gamma < 0$ положим $S_2 = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} A$. Тогда в силу (3.15) имеем

$$S_2^T \mathscr{B} S_2 = -\frac{1}{\gamma} A^T \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} A$$
$$= -\frac{1}{\gamma} A^T \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} A = \frac{1}{\gamma} A^T \mathscr{B} A = \mathscr{B}.$$

Таким образом, S_2 — симплектическая матрица. Предложение доказано.

Предложение 3.3. *Пусть Ω_1, Ω_2 — две области в $\mathscr{S}$. Предположим, что $f = (f_1, \dots, f_{2n+1}) : \Omega_1 \to \Omega_2$ — квазиконформное отображение, hc-дифференцируемое в точке $p \in \Omega_1$. Тогда f — дифференциал в точке p в горизонтальном направлении в обычном смысле. Положим $f_{*p}\widehat{X}_k^p(p) = \sum\limits_{j=1}^{2n+1} \widehat{X}_k^p f_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}$,*

$$f_{*p}\widehat{X}_k^p(p) = \big(Df_*(p)\widehat{X}_k^p\big)(f(p)). \tag{3.16}$$

Доказательство предложения 3.3 дано в § 4. Соответствующий результат на группе Гейзенберга установлен в [13, с. 31].

Доказательство теоремы 1.1(I). Получим уравнения Бельтрами вдоль кривой из теоремы C в [13] на группе Гейзенберга. Поскольку f квазиконформно, оно hc-дифференцируемо почти всюду. Пусть $p \in \Omega_1$ — точка hc-дифференцируемости f, тогда по предложению 3.1 $Df_*(p)\widehat{X}_{2n+1}^p = \gamma(p)\widehat{X}_{2n+1}^{f(p)}$ для некоторого $\gamma(p) \in \mathbb{R}$.

(i) Если f сохраняет ориентацию, т. е. $\gamma(p) > 0$, то в силу (3.10) и предложения 3.2 получаем

$$Df_*(p)\big(\widehat{X}_1^p, \dots, \widehat{X}_{2n}^p\big) = \big(\widehat{X}_1^{f(p)}, \dots, \widehat{X}_{2n}^{f(p)}\big)\sqrt{\gamma} S_1,$$

где S_1 — симплектическая матрица. В комплексифицированном подпространстве $\mathbb{C}H\mathscr{G}^p$ выберем комплексный базис:

$$\widehat{W}_k^p = \frac{1}{2}\big(\widehat{X}_k^p - i\widehat{X}_{n+k}^p\big), \quad \overline{\widehat{W}_k^p} = \frac{1}{2}\big(\widehat{X}_k^p + i\widehat{X}_{n+k}^p\big), \quad k = 1, \dots, n.$$

В этом базисе

$$Df_*(p)\big(\widehat{W}_1^p, \dots, \widehat{W}_n^p, \overline{\widehat{W}_1^p}, \dots, \overline{\widehat{W}_n^p}\big)$$
$$= \big(\widehat{W}_1^{f(p)}, \dots, \widehat{W}_n^{f(p)}, \overline{\widehat{W}_1^{f(p)}}, \dots, \overline{\widehat{W}_n^{f(p)}}\big)\sqrt{\gamma}\Gamma S_1 \Gamma^{-1}, \tag{3.17}$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{pmatrix}$. Если $S_1 = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$ с $(n \times n)$-матрицами C, D, E, F, то

$$S_c = \Gamma S_1 \Gamma^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (C+F) + i(-D+E) & (C-F) + i(D+E) \\ (C-F) - i(D+E) & (C+F) - i(-D+E) \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Можем записать $S_c = \begin{pmatrix} P & Q \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{pmatrix}$, где P обратима (см. [13, с. 29]). В силу (3.17) и (3.18) горизонтальное векторное поле $\widehat{W}_k^p$ отображается на горизонтальное векторное поле:

$$Df_*(p)\widehat{W}_k^p = V_k + \overline{U}_k, \quad k = 1, \dots, n, \tag{3.19}$$

где голоморфные и антиголоморфные компоненты имеют вид

$$V_k = \sqrt{\gamma}\sum_{j=1}^{n} p_{jk}\widehat{W}_j^{f(p)}, \quad \overline{U}_k = \sqrt{\gamma}\sum_{j=1}^{n} \hat{q}_{jk}\overline{\widehat{W}_j^{f(p)}}.$$

Поскольку $P = (p_{jk})$ обратима, имеем

$$U_k = \sum_{l=1}^{n} \mu_{lk} V_l, \tag{3.20}$$

где $\mu = (\mu_{lk}) = P^{-1}Q$ симметрична (см. [13, с. 29]). Если записать квазиконформное отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2 \subset \mathscr{S} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ в виде

$$f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (f_1(z_1, \ldots, z_{n+1}), \ldots, f_{n+1}(z_1, \ldots, z_{n+1})),$$

то по предложению 3.3 найдется $f_{*p}\widehat{W}_k^p(p)$ такое, что

$$f_{*p}\widehat{W}_k^p(p) = \sum_{s=1}^{n+1} \widehat{W}_k^p f_s(p)\frac{\partial}{\partial z_s} + \sum_{s=1}^{n+1} \widehat{W}_k^p \bar{f}_s(p)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_s}. \tag{3.21}$$

Теперь с использованием предложения 3.3 и (3.19) получим

$$f_{*p}\widehat{W}_k^p(p) = \big(Df_*(p)\widehat{W}_k^p\big)(f(p)) = V_k(f(p)) + \overline{U}_k(f(p)). \tag{3.22}$$

Отсюда

$$\overline{\widehat{W}_k^p} f_s(p) = \sum_{l=1}^{n} \mu_{lk}\widehat{W}_l^p f_s(p), \quad s = 1, \ldots, n+1.$$

В силу леммы 2.1(1) и (2.5) имеем

$$\widehat{W}_k^p(p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k(p)}} W_k(p), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Следовательно,

$$\overline{W}_k f_s(p) = \sum_{l=1}^{n} \mu_{lk}\frac{\sqrt{\lambda_k(p)}}{\sqrt{\lambda_l(p)}} W_l f_s(p), \quad s = 1, \ldots, n+1.$$

Тогда в силу (2.3) для Z_k и W_k получим

$$\begin{aligned}(\overline{Z}_1 f_s(p), \ldots, \overline{Z}_n f_s(p)) &= (\overline{W}_1 f_s(p), \ldots, \overline{W}_n f_s(p))U^{-1} \\ &= (W_1 f_s(p), \ldots, W_n f_s(p))\Upsilon U^{-1} = (Z_1 f_s(p), \ldots, Z_n f_s(p))\overline{U}\Upsilon U^{-1},\end{aligned} \tag{3.24}$$

где $\Upsilon = \left(\mu_{lk}\frac{\sqrt{\lambda_k(p)}}{\sqrt{\lambda_l(p)}}\right)$ и единичная матрица U задана в (2.2). Тем самым получаем (1.8) при

$$R = \overline{U}\Upsilon U^{-1}. \tag{3.25}$$

(ii) Если f меняет ориентацию, т. е. $\gamma(p) < 0$, то по предложению 3.2

$$Df_*(p)\big(\widehat{X}_1^p, \ldots, \widehat{X}_{2n}^p\big) = \big(\widehat{X}_1^{f(p)}, \ldots, \widehat{X}_{2n}^{f(p)}\big)\sqrt{-\gamma}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} S_2$$

для некоторой симплектической матрицы S_2. Для простоты используем то же обозначение $S_2 = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$ для симплектической матрицы, что и выше. В комплексифицированном подпространстве $\mathbb{C}H\mathscr{G}^p$ имеем

$$\begin{aligned}
&Df_*(p)\big(\widehat{W}_1^p, \dots, \widehat{W}_n^p, \overline{\widehat{W}_1^p}, \dots, \overline{\widehat{W}_n^p}\big) \\
&\quad= \big(\widehat{W}_1^{f(p)}, \dots, \widehat{W}_n^{f(p)}, \overline{\widehat{W}_1^{f(p)}}, \dots, \overline{\widehat{W}_n^{f(p)}}\big)\sqrt{-\gamma}\,\Gamma \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} S_2\Gamma^{-1} \\
&\quad= \sqrt{-\gamma}\big(\widehat{W}_1^{f(p)}, \dots, \widehat{W}_n^{f(p)}, \overline{\widehat{W}_1^{f(p)}}, \dots, \overline{\widehat{W}_n^{f(p)}}\big) \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} S_c \\
&\quad= \sqrt{-\gamma}\big(\widehat{W}_1^{f(p)}, \dots, \widehat{W}_n^{f(p)}, \overline{\widehat{W}_1^{f(p)}}, \dots, \overline{\widehat{W}_n^{f(p)}}\big) \begin{pmatrix} \overline{Q} & \overline{P} \\ P & Q \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$Df_*(p)\widehat{W}_k^p = V_k + \overline{U}_k = \sqrt{-\gamma}\sum_{j=1}^{n}\big(\hat{q}_{jk}\widehat{W}_j^{f(p)} + p_{jk}\overline{\widehat{W}_j^{f(p)}}\big),$$

и тем самым

$$V_k = \sum_{l=1}^{n} \bar{\mu}_{lk} U_l \tag{3.26}$$

при $\mu = (\mu_{lk}) = P^{-1}Q$. Из (3.21), (3.22) и (3.26) получаем

$$\widehat{W}_k^p f_s(p) = \sum_{l=1}^{n} \bar{\mu}_{lk}\overline{\widehat{W}_l^p} f_s(p), \quad s = 1, \dots, n+1. \tag{3.27}$$

Тогда в силу (2.3), (3.23) и (3.27) имеем

$$(Z_1 f_s(p), \dots, Z_n f_s(p)) = (\overline{Z}_1 f_s(p), \dots, \overline{Z}_n f_s(p))U\overline{\Upsilon U}^{-1},$$

где $\Upsilon = \Big(\mu_{lk}\frac{\sqrt{\lambda_k(p)}}{\sqrt{\lambda_l(p)}}\Big)$. Пусть теперь $\widetilde{R} = (\tilde{r}_{kj}) = U\overline{\Upsilon U}^{-1}$, тогда (1.8) выполнено. Теорема 1.1(I) доказана.

§ 4. Отношение между hc-дифференциалом и касательным отображением

Нам понадобится следующее важное свойство показательного отображения, исходящего из точки p (см. следствие 3.4 в [19], свойство 1.3 в [4]).

Лемма 4.1. *Пусть* $\max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{2n+1}|\} \le \eta_p$, *где* $\eta_p > 0$, *достаточно мало. Тогда*

$$\exp\Bigg(\sum_{j=1}^{2n+1}\alpha_j X_j\Bigg)(p) = \exp\Bigg(\sum_{j=1}^{2n+1}\alpha_j \widehat{X}_j^p\Bigg)(p). \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. Далее, если это необходимо, будем считать вложенное многообразие $\widehat{\mathscr{O}}_p$ сжатым в $\mathscr{G}^p$, например, так, что лемма 4.1 верна на $\widehat{\mathscr{O}}_p$.

Из леммы 4.1 непосредственно следует, что однопараметрическая группа растяжений δ_ε^p на $\mathscr{G}^p$ совпадает с группой расширений Δ_ε^p:

$$\Delta_\varepsilon^p x = \delta_\varepsilon^p x \tag{4.2}$$

для $x \in \widehat{\mathscr{O}}_p$, удовлетворяющих лемме 4.1, и $\varepsilon \le 1$ (см. свойство 1.4 в [4]).

Доказательство предложения 3.3 аналогично доказательству предложения 6 в [13] на группе Гейзенберга. Будем работать на локальной группе Гейзенберга $\mathscr{G}^p$ с вложенным многообразием $\widehat{\mathscr{O}}_p \subset \mathscr{S}$. Пусть V_p — достаточно малая окрестность точки p в $\mathscr{G}^p$. Тогда если $v \in V_p$, то $f(v) \in \widehat{\mathscr{O}}_{f(p)}$, $Df(p)(v) \in \widehat{\mathscr{O}}_{f(p)}$ в силу непрерывности f и $Df(p)$. Таким образом, по лемме 4.1 имеем

$$\begin{gathered} v = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} v_j \widehat{X}_j^p\biggr)(p) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} v_j X_j\biggr)(p), \\ f(v) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} v_j' \widehat{X}_j^{f(p)}\biggr)(f(p)) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} v_j' X_j\biggr)(f(p)), \\ Df(p)(v) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} \widetilde{v}_j \widehat{X}_j^{f(p)}\biggr)(f(p)) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} \widetilde{v}_j X_j\biggr)(f(p)) \end{gathered} \tag{4.3}$$

для $(v_1', \dots, v_{2n+1}'), (\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Поскольку f hc-дифференцируемо в $p \in \Omega_1$, в силу (3.1) и эквивалентности двух равномерных норм на группе Карно [25] получаем

$$d_\infty^{f(p)}\bigl(\Delta_{t^{-1}}^{f(p)} f\bigl(\delta_t^p(v)\bigr), Df(p)(v)\bigr) = o(1) \quad \text{при } t \to 0, \tag{4.4}$$

где $o(\cdot)$ равномерно относительно v на каждом компакте в $\mathscr{G}^p$. Тем самым для любых $\varepsilon > 0$ и $v \in V_p$ существует $\sigma > 0$ такое, что при $t < \sigma$ имеем $\Delta_{t^{-1}}^{f(p)} f\bigl(\delta_t^p(v)\bigr) \in \widehat{\mathscr{O}}_{f(p)}$ и

$$\begin{aligned} \varepsilon > d_\infty^{f(p)}\bigl(\Delta_{t^{-1}}^{f(p)} f\bigl(\delta_t^p(v)\bigr), Df(p)(v)\bigr) &= \frac{1}{t} d_\infty^{f(p)}\bigl(\delta_t^{f(p)}\Delta_{t^{-1}}^{f(p)} f\bigl(\delta_t^p(v)\bigr), \delta_t^{f(p)} Df(p)(v)\bigr) \\ &= \frac{1}{t} d_\infty^{f(p)}\bigl(f\bigl(\delta_t^p(v)\bigr), Df(p)\bigl(\delta_t^p(v)\bigr)\bigr) \end{aligned} \tag{4.5}$$

в силу однородности растяжения (2.30), (3.2) и (4.2). Положим $V_p' = \{x \in V_p \cap \exp H\mathscr{G}^p \mid \|x\|_1 < \sigma^2\}$, где $\|u\|_1 := \max\{|u_1|, \dots, |u_{2n+1}|\}$ для любых $u = \exp\biggl(\sum\limits_{j}^{2n+1} u_j \widehat{X}_j\biggr)(p)$. Введем замену $t = \frac{\|x\|_1}{\sigma}$ и $v = \delta_{t^{-1}}^p x$ для $x \in V_p'$ в (4.5), чтобы получить

$$d_\infty^{f(p)}(f(x), Df(p)(x)) < \frac{\varepsilon \|x\|_1}{\sigma}. \tag{4.6}$$

Поскольку $Df(p)$ горизонтально, по определению горизонтального гомоморфизма (1) для любого $x = \exp\biggl(\sum\limits_{j=1}^{2n} x_j \widehat{X}_j^p\biggr)(p) \in V_p'$ можем записать

$$Df(p)(x) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n} \tilde{x}_j \widehat{X}_j^{f(p)}\biggr)(f(p)) \tag{4.7}$$

для $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2n}, 0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Пусть

$$f(x) = \exp\biggl(\sum_{j=1}^{2n+1} x_j' X_j\biggr)(f(p)) \tag{4.8}$$

для $(x'_1,\dots,x'_{2n+1})\in\mathbb{R}^{2n+1}$. Так как $|x'_j|$, $|\tilde{x}_j|$ достаточно малы, найдется вектор $(y_1,\dots,y_{2n+1})\in\mathbb{R}^{2n+1}$ такой, что

$$f(x)=\exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1}y_j\widehat{X}_j^{f(p)}\right)(Df(p)(x))$$
$$=\exp\left(\sum_{j=1}^{2n+1}y_j\widehat{X}_j^{f(p)}\right)\circ\exp\left(\sum_{j=1}^{2n}\tilde{x}_j\widehat{X}_j^{f(p)}\right)(f(p)). \tag{4.9}$$

Тогда в силу (2.23) и (2.26)

$$f(x)=\exp\left(\sum_{j=1}^{2n}(\tilde{x}_j+y_j)\widehat{X}_j^{f(p)}+\left(y_{2n+1}+2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_{n+j}y_j-\tilde{x}_jy_{n+j})\right)\widehat{X}_{2n+1}^{f(p)}\right)(f(p)). \tag{4.10}$$

Таким образом,

$$y_k=x'_k-\tilde{x}_k,\ k=1,\dots,2n,\quad y_{2n+1}=x'_{2n+1}+2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_jx'_{j+n}-\tilde{x}_{j+n}x'_j). \tag{4.11}$$

Оценим $|x'_k-\tilde{x}_k|$, $|x'_{2n+1}|$, $k=1,\dots,2n$. В силу (4.6) и (4.11)

$$\frac{\varepsilon\|x\|_1}{\sigma}>d_\infty^{f(p)}(f(x),Df(p)(x))=\max\{|y_1|,\dots,|y_{2n}|,|y_{2n+1}|^{\frac12}\}$$
$$=\max\left\{|x'_1-\tilde{x}_1|,\dots,|x'_{2n}-\tilde{x}_{2n}|,\left|x'_{2n+1}+2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_jx'_{j+n}-\tilde{x}_{j+n}x'_j)\right|^{\frac12}\right\}.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}|x'_k-\tilde{x}_k|<\frac{\varepsilon\|x\|_1}{\sigma},\quad k=1,\dots,2n,\\ \left|x'_{2n+1}+2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_jx'_{j+n}-\tilde{x}_{j+n}x'_j)\right|<\frac{\varepsilon^2\|x\|_1^2}{\sigma^2}.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Следовательно, в силу непрерывности f

$$|x'_{2n+1}|\le\left|x'_{2n+1}+2\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_jx'_{j+n}-\tilde{x}_{j+n}x'_j)\right|+2\left|\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_jx'_{j+n}-\tilde{x}_{j+n}x'_j)\right|$$
$$\le\frac{\varepsilon^2\|x\|_1^2}{\sigma^2}+2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon\|x\|_1}{\sigma}|x'_{j+n}|+\frac{\varepsilon\|x\|_1}{\sigma}|x'_j|\right)\le c_1\big(\varepsilon^2\|x\|_1^2+\varepsilon\|x\|_1\big)$$

для некоторого $c_1\in\mathbb{R}_+$. Обозначим

$$\tilde{f}=\theta_{f(p)}^{-1}\circ f\circ\theta_p,\quad \widetilde{Df(p)}=\hat{\theta}_{f(p)}^{-1}\circ Df(p)\circ\hat{\theta}_p. \tag{4.13}$$

Тогда $\tilde{f}(0)=0$. Тем самым по определениям x'_j, $\tilde{x}_j$ (4.7) и (4.8) на $\hat{\theta}_p^{-1}(V'_p)$ имеем

$$\frac{1}{\|x\|_1}|\tilde{f}(x_1,\dots,x_{2n},0)-\widetilde{Df(p)}(x_1,\dots,x_{2n},0)|$$
$$=\frac{1}{\|x\|_1}|(x'_1,\dots,x'_{2n},x'_{2n+1})-(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{2n},0)|$$
$$=\frac{1}{\|x\|_1}\left(\sum_{k=1}^{2n}|x'_k-\tilde{x}_k|^2+|x'_{2n+1}|^2\right)^{\frac12}<c_2(\varepsilon^2+\varepsilon)$$

с некоторой положительной постоянной c_2. В частности, в силу (3.5) для $(\varsigma, 0, \dots, 0) \in \hat{\theta}_p^{-1}(V_p')$

$$\begin{aligned}
c_2(\varepsilon^2+\varepsilon) &> \frac{1}{|\varsigma|}|\tilde{f}(\varsigma,0,\dots,0) - \widetilde{Df(p)}(\varsigma,0,\dots,0)| \\
&= \left|\frac{\tilde{f}(\varsigma,0,\dots,0)}{\varsigma} - \frac{\hat{\theta}^{-1}_{f(p)}\big(\exp\big(\varsigma Df_*(p)\widehat{X}_1^p\big)(f(p))\big)}{\varsigma}\right| \\
&= \left|\frac{\tilde{f}(\varsigma,0,\dots,0)}{\varsigma} - \frac{\hat{\theta}^{-1}_{f(p)}\left(\exp\left(\varsigma\sum\limits_{j=1}^{2n} a_{j1}\widehat{X}_1^{f(p)}\right)(f(p))\right)}{\varsigma}\right| \\
&= \left|\frac{\tilde{f}(\varsigma,0,\dots,0)}{\varsigma} - (a_{11},\dots,a_{(2n)1},0)\right|, \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

где $A = (a_{jk})$ — матрица, ассоциированная с $Df_*(p)$ согласно (3.10). Пусть теперь $\varsigma \to 0$, тогда $\varepsilon \to 0$ в (4.14) и $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_1}(0)$ существует, при этом

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_1}(0) = (a_{11},\dots,a_{(2n)1},0). \qquad (4.15)$$

Аналогично

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_l}(0) = (a_{1l},\dots,a_{(2n)l},0), \quad l = 2,\dots,2n. \qquad (4.16)$$

Отсюда в силу (3.10)

$$Df_*(p)\widehat{X}_k^p = \sum_{j=1}^{2n} a_{jk}\widehat{X}_j^{f(p)} = \sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial\tilde{f}_j}{\partial x_k}(0)\widehat{X}_j^{f(p)}, \quad 1 \le k \le 2n.$$

Положим $\tilde{f}_{*0}\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum\limits_{j=1}^{2n+1}\frac{\partial\tilde{f}_j}{\partial x_k}(0)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum\limits_{j=1}^{2n}\frac{\partial\tilde{f}_j}{\partial x_k}(0)\frac{\partial}{\partial x_j}$, где второе равенство следует из (4.15) и (4.16). Тогда в силу (2.21)

$$\begin{aligned}
\big(Df_*(p)\widehat{X}_k^p\big)(f(p)) &= \sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial\tilde{f}_j}{\partial x_k}(0)\widehat{X}_j^{f(p)}(f(p)) \\
&= \sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial\tilde{f}_j}{\partial x_k}(0)(\theta_{f(p)})_{*0}\frac{\partial}{\partial x_j} = (\theta_{f(p)})_{*0}\tilde{f}_{*0}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \le k \le 2n.
\end{aligned}$$

Значит, f дифференцируемо в точке p в горизонтальном направлении в обычном смысле, и, полагая $f_{*p}\widehat{X}_k^p = \sum\limits_{j=1}^{2n+1}\widehat{X}_k^p f_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}$, в силу (2.21) и (4.13) получим

$$f_{*p}\widehat{X}_k^p(p) = (\theta_{f(p)})_{*0}\tilde{f}_{*0}\big(\theta_p^{-1}\big)_{*p}X_k(p) = (\theta_{f(p)})_{*0}\tilde{f}_{*0}\frac{\partial}{\partial x_k} = \big(Df_*(p)\widehat{X}_k^p\big)(f(p)).$$

Предложение 3.3 доказано.

§ 5. Оценки коэффициентов в уравнениях Бельтрами и их приложения

Поскольку $\mathscr{G}^p$ — локальная группа Гейзенберга, метрика d_c^p связана с растяжениями равенством

$$d_c^p\big(\delta_\varepsilon^p x, \delta_\varepsilon^p y\big) = \varepsilon d_c^p(x,y) \qquad (5.1)$$

для произвольных $x, y \in \widehat{\mathscr{O}}_p$ и малого $0 < \varepsilon < 1$. Согласно [6, с. 459; 26, с. 23] если $X \in H\mathscr{G}^p$ такое, что $\exp(X)(p)$ определено, то кривая $t \mapsto \exp(tX)(p)$ горизонтальна и минимизирует длину так, что

$$d_c^p(\exp(X)(p), p) = |X|_{\mathscr{G}^p}, \tag{5.2}$$

где $|\cdot|_{\mathscr{G}^p}$ определяется по формуле (2.27). Обозначим через $\widehat{B}(p,t)$ открытый шар $\{y \in \mathscr{G}^p \mid d_c^p(y,p) < t\}$. Нам потребуется следующий результат о локальной аппроксимации (теорема 7.32 в [27] или теорема о локальной аппроксимации в [18]), новое доказательство которого получено в [28], более убедительное и лаконичное по сравнению с [27] и восполняющее пробелы в рассуждениях из [18].

Теорема 5.1 (о локальной аппроксимации). *Разность между метриками d_c и d_c^p на $\widehat{B}(p,t)$ равна $o(t)$, т. е.*

$$t^{-1}(d_c(v_1, v_2) - d_c^p(v_1, v_2)) \to 0 \ \text{ при } t \to 0 \tag{5.3}$$

для любых $v_1, v_2 \in \widehat{B}(p,t)$.

Доказательство теоремы 1.1(II). Поскольку f квазиконформно, оно hc-дифференцируемо почти всюду на Ω_1. Пусть $p \in \Omega_1$ — точка hc-дифференцируемости f. По предложению 1.1 из [4] $d_c(\cdot, p)$ и $d_\infty(\cdot, p)$ эквивалентны на $\widehat{\mathscr{O}}_p$. Так как по лемме 4.1 $d_\infty^p(q,p) = d_\infty(q,p)$ для любого $q \in \widehat{\mathscr{O}}_p$, заключаем, что $d_c(\cdot,p)$ и $d_\infty^p(\cdot,p)$ эквивалентны на $\widehat{\mathscr{O}}_p$. Тогда в силу непрерывности f и $Df(p)$ существует малое $r_0 > 0$ такое, что $q \in \widehat{\mathscr{O}}_p$ и $f(q)$, $Df(p)(q) \in \widehat{\mathscr{O}}_{f(p)}$ при $d_c(q,p) < r_0$. Из (5.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует r_1 такое, что если $t < r_1$, то

$$\{q \in \widehat{\mathscr{O}}_p \mid d_c(q,p) = t\} \subset \{q \in \widehat{\mathscr{O}}_p \mid t(1-\varepsilon) \le d_c^p(q,p) \le t(1+\varepsilon)\} \tag{5.4}$$

и

$$(1-\varepsilon) d_c^{f(p)}(f(q), f(p)) \le d_c(f(q), f(p)) \le (1+\varepsilon) d_c^{f(p)}(f(q), f(p)), \tag{5.5}$$

поскольку $q \in \widehat{B}(p,t)$, $d_c(f(q), f(p)) \to 0$ при $t \to 0$ в силу непрерывности f. Заметим, что $f(\{d_c^p(q,p) = t(1-\varepsilon)\}) \subset f(\{d_c(q,p) \le t\})$, так как f — гомеоморфизм. Тогда для $0 < t < r_1$ в силу (5.2), (5.4) и (5.5) имеем

$$\begin{aligned}
\max_{d_c(q,p)=t} d_c(f(q), f(p)) &\ge \max_{d_c^p(q,p)=t(1-\varepsilon)} d_c(f(q), f(p)) \\
&\ge \max_{d_c^p(q,p)=t(1-\varepsilon)} (1-\varepsilon) d_c^{f(p)}(f(q), f(p)) \\
&= \max_{\substack{Y \in \mathfrak{g}^p, \\ d_c^p(\exp(Y)(p),p)=t(1-\varepsilon)}} (1-\varepsilon) d_c^{f(p)}(f(\exp(Y)(p)), f(p)) \\
&\ge \max_{\substack{X \in H\mathscr{G}^p, \\ d_c^p(\exp(X)(p),p)=t(1-\varepsilon)}} (1-\varepsilon) d_c^{f(p)}(f(\exp(X)(p)), f(p)) \\
&= \max_{\substack{\widehat{X} \in H\mathscr{G}^p, \\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p} = \beta(1-\varepsilon)}} (1-\varepsilon) d_c^{f(p)}\bigl(f\bigl(\delta_{t\beta^{-1}}^p \exp(\widehat{X})(p)\bigr), f(p)\bigr)
\end{aligned}$$

при выборе постоянной β настолько малой, что для любого $\widehat{X} \in H\mathscr{G}^p$ с $|\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p} = \beta$ выполнено $\exp(\widehat{X})(p) \in \widehat{\mathscr{O}}_p$ и $Df(p)(\exp(\widehat{X})(p)) \in \widehat{\mathscr{O}}_{f(p)}$. Далее полагаем t достаточно малым, чтобы вычисления имели смысл. Таким образом,

$$
\begin{aligned}
I &:= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t(1-\varepsilon)}\max_{d_c(q,p)=t} d_c(f(q),f(p)) \\
&\geq \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} d_c^{f(p)}\big(f\big(\delta^p_{t\beta^{-1}}\exp(\widehat{X})(p)\big),f(p)\big) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} d_c^{f(p)}\big(\Delta^{f(p)}_{t\beta^{-1}}\Delta^{f(p)}_{t^{-1}\beta}f\big(\delta^p_{t\beta^{-1}}\exp(\widehat{X})(p)\big),f(p)\big).
\end{aligned}
$$

Поскольку $f(p)$ — единичный элемент в $\mathscr{G}^{f(p)}$, в силу (4.2) и (5.1) получаем

$$
\begin{aligned}
I &\geq \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} d_c^{f(p)}\big(\delta^{f(p)}_{t\beta^{-1}}\Delta^{f(p)}_{t^{-1}\beta}f\big(\delta^p_{t\beta^{-1}}\exp(\widehat{X})(p)\big),f(p)\big) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\beta}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} d_c^{f(p)}\big(\Delta^{f(p)}_{t^{-1}\beta}f\big(\delta^p_{t\beta^{-1}}\exp(\widehat{X})(p)\big),f(p)\big).
\end{aligned}
$$

Тогда по (3.5), (5.2), определению hc-дифференциала [25] и предложению 3.1 имеем

$$
\begin{aligned}
I &\geq \frac{1}{\beta}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} d_c^{f(p)}(Df(p)(\exp(\widehat{X})(p)),f(p)) \\
&= \frac{1}{\beta}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} d_c^{f(p)}(\exp(Df_*(p)\widehat{X})(f(p)),f(p)) \\
&= \frac{1}{\beta}\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=\beta(1-\varepsilon)}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}} = (1-\varepsilon)\max_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Аналогично

$$
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t(1-\varepsilon)}\min_{d_c(q,p)=t} d_c(f(q),f(p)) \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)}\min_{\substack{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p,\\ |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}. \qquad (5.7)
$$

По определению K-квазиконформного отображения в силу (5.6) и (5.7) получаем

$$
K \geq \limsup_{t\to 0}\frac{\max\limits_{d_c(p,q)=t} d_c(f(p),f(q))}{\min\limits_{d_c(p,q)=t} d_c(f(p),f(q))} \geq \frac{(1-\varepsilon)^2\max\limits_{\{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p \mid |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1\}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}}{(1+\varepsilon)^2\min\limits_{\{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p \mid |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1\}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}}.
$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, находим, что

$$
\frac{\max\limits_{\{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p \mid |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1\}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}}{\min\limits_{\{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p \mid |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1\}} |Df_*(p)\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}} \leq K.
$$

Если f сохраняет ориентацию, то по предложению 3.2 $Df_*(p)\widehat{X} = \sqrt{\gamma}S_1\widehat{X}$ для некоторой симплектической матрицы S_1. Тогда

$$
\frac{\max\limits_{\{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p \mid |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1\}} |S_1\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}}{\min\limits_{\{\widehat{X}\in H\mathscr{G}^p \mid |\widehat{X}|_{\mathscr{G}^p}=1\}} |S_1\widehat{X}|_{\mathscr{G}^{f(p)}}} \leq K. \qquad (5.8)
$$

Поскольку симплектическая матрица S_1 имеет разложение Картана (см. [13, с. 27]): $S_1 = K_1 D_0 K_2$ для некоторых $K_1, K_2 \in \mathrm{U}(n)$ и $D_0 = \mathrm{diag}(e^{t_1}, \dots, e^{t_n}, e^{-t_1}, \dots, e^{-t_n})$, где $t_j \geq 0$ и e^{2t_j} и e^{-2t_j} — собственные значения $S_1^* S_1$, то

$$\max_{\substack{|\widehat{X}|_{\mathscr{G}p}=1,\\ \widehat{X}\in H\mathscr{G}p}} |S_1\widehat{X}|_{\mathscr{G}f(p)} = \max_j\{e^{t_j}\}, \qquad \min_{\substack{|\widehat{X}|_{\mathscr{G}p}=1,\\ \widehat{X}\in H\mathscr{G}p}} |S_1\widehat{X}|_{\mathscr{G}f(p)} = \min_j\{e^{-t_j}\}. \tag{5.9}$$

Тогда (5.8) и (5.9) влекут

$$\max_j\{e^{2t_j}\} \leq K. \tag{5.10}$$

Как и в [13], в комплексных обозначениях разложение Картана для S_c имеет вид

$$S_c = \begin{pmatrix} T_1 & \\ & \overline{T}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ \overline{H}_2 & \overline{H}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 & \\ & \overline{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{pmatrix},$$

где $T_1, T_2 \in \mathrm{U}(n)$, $H_1 = \mathrm{diag}(\cosh t_1, \dots, \cosh t_n)$, $H_2 = \mathrm{diag}(\sinh t_1, \dots, \sinh t_n)$. Тогда $\mu = P^{-1}Q = T_2^{-1} H_1^{-1} H_2 \overline{T}_2$, где μ задано по (3.20) и тем самым его норма равна

$$\|\mu\| = \max_j\left\{\frac{\sinh t_j}{\cosh t_j}\right\}. \tag{5.11}$$

В силу (5.10) и (5.11)

$$\|\mu\| \leq \frac{K-1}{K+1}. \tag{5.12}$$

Из (3.25) и (5.12) получаем

$$\|R\| = \|\overline{U}\Upsilon U^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{n}\Theta(K-1)}{K+1},$$

где U из (2.3) унитарна и $\Upsilon = \left(\mu_{lk}\frac{\sqrt{\lambda_k(p)}}{\sqrt{\lambda_l(p)}}\right)$ из (3.24). Аналогично имеем $\|\widetilde{R}\| \leq \frac{\sqrt{n}\Theta(K-1)}{K+1}$. Теорема 1.1(II) доказана.

Доказательство следствия 1.1. Поскольку $K = 1$, в силу (1.9) имеем $R = 0$ ($\widetilde{R} = 0$). Утверждение следствия вытекает из (1.8).

Следующая лемма о CR-расширении получена в [29].

Лемма 5.1. *Пусть $M \subset \mathbb{C}^n$, $M' \subset \mathbb{C}^N$ — C^ω-строго псевдовыпуклые гиперповерхности и $f : M \to M'$ — C^∞ — CR-отображение. Если $2 \leq n \leq N < 2n$, то f голоморфно в окрестности M.*

В [30] Н. Г. Кружилин и А. В. Лобода показали, что группа локальных автоморфизмов строго псевдовыпуклой гиперповерхности линеаризуема в следующем смысле.

Лемма 5.2. *Если вещественно аналитическая гиперповерхность строго псевдовыпукла и локально не эквивалентна сфере, то в окрестности любой ее точки можно выбрать нормальные координаты, в которых всякий автоморфизм, оставляющий эту точку неподвижной, имеет вид $z^* = \mathscr{U} z$, $w^* = w$, где $\mathscr{U}$ — матрица, сохраняющая форму Леви.*

Доказательство следствия 1.2. Для $q \in \Omega_1$ пусть f — гладкое сохраняющее ориентацию 1-квазиконформное отображение, оставляющее q неподвижной. По следствию 1.1 f удовлетворяет (1.11) п. в. на Ω_1. Поскольку Z_j и f гладкие, (1.11) верно всюду на Ω_1, т. е. f — CR-отображение. Тогда по лемме 5.1

f голоморфно. Так как f — гомеоморфизм по определению, f биголоморфно в окрестности q. Утверждение следствия вытекает из леммы 5.2.

Замечание 5.1. По теореме 1.1 в [6] 1-квазиконформные отображения между группами Карно гладкие. Будет ли гладким любое 1-квазиконформное отображение между строго псевдовыпуклыми CR-многообразиями?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mostow G. D.* Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. Math. Stud.; V. 78).
2. *Heinonen J.* Calculus on Carnot groups // Fall School in Analysis (Jyväskylä, 1994). Jyväskylä: Univ. Jyväskylä, 1995. Rep. 68. P. 1–31.
3. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1113–1136.
4. *Vodop′yanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemp. Math.; V. 424).
5. *Balogh Z. M., Holopainen I., Tyson J. T.* Singular solutions, homogeneous norms, and quasiconformal mappings in Carnot groups // Math. Ann. 2002. V. 324, N 1. P. 159–186.
6. *Capogna L., Cowling M.* Conformality and Q-harmonicity in Carnot groups // Duke Math. J. 2006. V. 135, N 3. P. 455–479.
7. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1142–1151.
8. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory space // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.
9. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
10. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.
11. *Водопьянов С. К.* Квазиконформные отображения на группах Карно и их приложения // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 4. С. 439–442.
12. *Wang W.* The Teichmüller distance on the space of spherical CR structures // Sci. China Ser. A. 2006. V. 49, N 11. P. 1523–1538.
13. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
14. *Wu Q. Y., Wang W.* Conformal mappings and CR mappings on the Engel group // Sci. China Ser. A. 2009. V. 52, N 12. P. 2759–2773.
15. *Ван В.* Устойчивость CR-отображений между нильпотентными двуступенчатыми группами Ли groups // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 512–535.
16. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on CR manifolds // Complex geometry and analysis. Berlin: Springer-Verl., 1990. P. 59–75. (Lect. Notes Math.; V. 1422).
17. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 290–312.
18. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within. Sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian Geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323. (Progr. Math.; V. 144).
19. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
20. *Folland G. B., Stein E. M.* Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27. P. 429–522.
21. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Локальная аппроксимационная теорема на многообразиях Карно в условиях минимальной гладкости // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 6. С. 731–736.
22. *Дынкин Е. Б.* Нормированные алгебры Ли и аналитические группы // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 1. С. 135–186.
23. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии. Семестр V. М.: Наука, 1982.

24. *Warner F. W.* Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Corrected reprint of the 1971 edition. New York; Berlin: Springer-Verl., 1983. (Grad. Texts Math.; V. 94).
25. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups // Princeton, NJ: Princeton Univ. Press; Tokyo: University of Tokyo Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
26. *Capogna L., Danielli D., Pauls S. D., Tyson J. T.* An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem. Basel: Birkhäuser Verl., 2007 (Progr. Math.; V. 259).
27. *Bellaïche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78. (Progr. Math.; V. 144).
28. *Karmanova M. B., Vodop'yanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics. Trends Math. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
29. *Pinchuk S., Sukhov A.* Extension of CR maps of positive codimension // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2006. V. 253. P. 267–276.
30. *Кружилин Н. Г., Лобода А. В.* Линеаризация локальных автоморфизмов псевдовыпуклых поверхностей // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 2. С. 280–282.

Статья поступила 6 августа 2009 г., окончательный вариант — 30 октября 2011 г.

Wu Qing Yan (У Цин Янь)
Department of Mathematics, Linyi University,
Shandong 276005, P. R. China;
Department of Mathematics, Zhejiang University,
Zhejiang 310027, P. R. China
whh1027@163.com

Wang Wei (Ван Вэй)
Department of Mathematics, Zhejiang University,
Zhejiang 310027, P. R. China
wwang@zju.edu.cn