Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.925.5+517.929

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

И. И. Матвеева, И. А. Мельник

Аннотация. Рассматривается задача Коши для одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности. Установлены свойства решений и доказано, что при достаточно большом числе дифференциальных уравнений последняя компонента решения является приближенным решением начальной задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, предельные теоремы, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

Введение

Во многих задачах биологии и химии возникают системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности (см., например, [1–4] и приведенную там литературу). В частности, при моделировании многостадийного синтеза вещества используется система следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad F(t,x) = \begin{pmatrix} g(t,x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\theta \geq 0$, $\tau > 0$ (см., например, [3, 4]). В этом случае размерность n системы определяется количеством стадий, $\tau > 0$ — время протекания процесса, $x_j(t)$ — концентрация вещества на j-й стадии. При очень большом числе стадий $n \gg 1$, естественно, возникает сложная задача нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$. Строгое математическое решение этой задачи дано Г. В. Демиденко в работе [3] (см. теоремы 1–4). Сформулируем полученный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 10–01–00035), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127), а также СО РАН (междисциплинарный проект № 107).

© 2012 Матвеева И. И., Мельник И. А.

результат. Предположим, что функция $g(t,v) \in C\big(\overline{\mathbb{R}}_2^+\big)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица

$$|g(t,v_1) - g(t,v_2)| \le L|v_1 - v_2|, \quad t \ge 0,\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Будем неограниченно увеличивать размерность системы (0.1) и рассматривать для каждой системы задачу Коши. Для простоты ограничимся случаем нулевых начальных условий $x|_{t=0} = 0$. Ясно, что при любом n задача Коши однозначно разрешима на произвольном отрезке $[0,T]$. Рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получим последовательность функций $\big\{x_n^n(t)\big\}$. Справедлива следующая

Теорема 1 (Г. В. Демиденко). *Последовательность $\big\{x_n^n(t)\big\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0,T]$, $T > \tau$:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \end{cases} \tag{0.2}$$

при этом

$$\max_{t\in[0,T]} \big|x_n^n(t) - y(t)\big| \le \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n > n_0.$$

В силу теоремы 1 для нахождения $x_n(t)$ при $n \gg 1$ можно не решать задачу Коши для системы (0.1) большой размерности с большими коэффициентами, а решать только начальную задачу для одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Полученный результат дает строгое математическое обоснование метода для численного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ при $n \gg 1$ с использованием уравнения с запаздывающим аргументом.

Теорема 1 послужила основой при получении аналогичных утверждений для различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [5–17]). Г. В. Демиденко предложил ряд методов для доказательства прямых и обратных предельных теорем, устанавливающих связи между решениями классов систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и обобщенными решениями уравнений с запаздывающим аргументом. С некоторыми из них можно познакомиться в обзорной статье [18].

Одним из эффективных и простым в применении является метод сравнения. Его идея заключается в том, чтобы исследуемую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \widetilde{A}_n(t)\tilde{x} + \widetilde{F}(t,\tilde{x}) \tag{0.3}$$

записывать как возмущение исходной системы (0.1), а затем сравнивать последние компоненты решений задач Коши для систем (0.1) и (0.3). Если при неограниченном увеличении числа уравнений из соответствующих оценок вытекает сходимость

$$\big|x_n^n(t) - \tilde{x}_n^n(t)\big| \to 0, \quad n \to \infty,\ t \in [0,T],$$

то в силу сформулированной теоремы 1 нахождение приближенных значений последней компоненты решения системы (0.3) при $\tilde{x}|_{t=0} = 0$, $n \gg 1$, сводится к решению задачи (0.2). В ряде случаев описанный метод позволяет очень просто доказывать предельные теоремы для различных систем дифференциальных уравнений большой размерности. Приведем некоторые примеры.

Рассмотрим систему следующего вида:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \widehat{A}_n\hat{x} + F(t,\hat{x}), \quad t > 0, \tag{0.4}$$

где

$$\widehat{A}_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau_{n-1}} & -\theta \end{pmatrix}, \quad F(t,\hat{x}) = \begin{pmatrix} g(t,\hat{x}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\tau_j = \tau\big(1 + \frac{\alpha_j}{(n-1)^\gamma}\big)$, $0 \le \alpha_j \le a$, $j = 1,\dots,n-1$, $\theta \ge 0$, $\tau > 0$, $\gamma > 1$. Доказано [15, 16], что при $n \gg 1$ последняя компонента $\hat{x}_n(t)$ решения задачи Коши для системы (0.4) с нулевыми начальными условиями аппроксимируется решением начальной задачи (0.2). Отметим, что систему (0.4) можно рассматривать как возмущение системы (0.1) линейными членами. В [16] также с использованием метода сравнения доказаны предельные теоремы для класса систем, которые можно рассматривать как возмущение системы (0.1) нелинейными членами:

$$\begin{cases} \frac{d\check{x}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau}\frac{\check{x}_1}{1+\rho\check{x}_1^\gamma} + g(t,\check{x}_n), \quad t > 0, \\ \frac{d\check{x}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau}\frac{\check{x}_{j-1}}{1+\rho\check{x}_{j-1}^\gamma} - \frac{n-1}{\tau}\frac{\check{x}_j}{1+\rho\check{x}_j^\gamma}, \quad j = 2,\dots,n-1, \\ \frac{d\check{x}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau}\frac{\check{x}_{n-1}}{1+\rho\check{x}_{n-1}^\gamma} - \theta\check{x}_n, \end{cases} \tag{0.5}$$

где $\theta \ge 0$, τ, $\rho > 0$, $\gamma > 1$. Установлено, что при $n \gg 1$ последняя компонента $\check{x}_n(t)$ решения задачи Коши для системы (0.5) с нулевыми начальными условиями аппроксимируется решением той же начальной задачи (0.2). Отметим, что для получения аналогичных утверждений для систем (0.4) и (0.5) при $0 < \gamma \le 1$ необходимо провести рассуждения, как при доказательстве теоремы 1. Доказательства этих результатов опубликованы в работах [15, 17] соответственно.

В настоящей работе мы рассматриваем еще один класс систем нелинейных дифференциальных уравнений большой размерности и, используя описанный выше метод сравнения, устанавливаем предельную теорему. Полученные результаты анонсированы в [19].

Авторы выражают глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г. В. Демиденко за полезные дискуссии и внимание к работе.

§ 1. Свойства решений задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\check{z}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_1}{1+\rho\check{z}_1^{\gamma}} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_2}{1+\rho\check{z}_2^{\gamma}} + g(t,\check{z}_n), \quad t>0, \\ \frac{d\check{z}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_{j-1}}{1+\rho\check{z}_{j-1}^{\gamma}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\check{z}_j}{1+\rho\check{z}_j^{\gamma}} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_{j+1}}{1+\rho\check{z}_{j+1}^{\gamma}}, \\ \quad j=2,\ldots,n-2, \\ \frac{d\check{z}_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_{n-2}}{1+\rho\check{z}_{n-2}^{\gamma}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\check{z}_{n-1}}{1+\rho\check{z}_{n-1}^{\gamma}}, \\ \frac{d\check{z}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_{n-1}}{1+\rho\check{z}_{n-1}^{\gamma}} - \theta\check{z}_n, \\ \check{z}|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\theta \geq 0$, $\tau_2 > \tau_1 > 0$, $\rho > 0$, $\gamma > 0$. Функция $g(t,v) \in C(\mathbb{R}_2)$ неотрицательна, ограничена $0 \leq g(t,v) \leq G$ и удовлетворяет условию Липшица по v. Очевидно, что исследуемая система переходит в систему (0.5) при $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 \to \infty$ и ее можно также рассматривать как возмущение системы (0.1) нелинейными членами.

Вначале заметим, что задача Коши (1.1) однозначно разрешима на всей полуоси $\{t \geq 0\}$. В этом нетрудно убедиться, следуя, например, схеме из [14]. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\tilde{z}_1}{1+\rho|\tilde{z}_1|^{\gamma}} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_2|}{1+\rho|\tilde{z}_2|^{\gamma}} + g(t,\tilde{z}_n), \quad t>0, \\ \frac{d\tilde{z}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{j-1}|}{1+\rho|\tilde{z}_{j-1}|^{\gamma}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\tilde{z}_j}{1+\rho|\tilde{z}_j|^{\gamma}} \\ \qquad + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_{j+1}|}{1+\rho|\tilde{z}_{j+1}|^{\gamma}}, \quad j=2,\ldots,n-2, \\ \frac{d\tilde{z}_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-2}|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-2}|^{\gamma}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\tilde{z}_{n-1}}{1+\rho|\tilde{z}_{n-1}|^{\gamma}}, \\ \frac{d\tilde{z}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-1}|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-1}|^{\gamma}} - \theta\tilde{z}_n, \\ \tilde{z}|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

В силу условий на функцию $g(t,v)$ задача Коши (1.2) имеет единственное непродолжаемое решение $\tilde{z}(t)$. Покажем, что оно определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\tilde{z}(t)$ имеет интервал существования (t_-, t_+), при этом $t_+ < \infty$. В этом случае $\|\tilde{z}(t)\| \to \infty$ при $t \to t_+$ (см., например, [20]). Обозначим

$$\varphi_1(t) = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{1}{1+\rho|\tilde{z}_1(t)|^{\gamma}}, \quad \psi_1(t) = \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_2(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_2(t)|^{\gamma}} + g(t,\tilde{z}_n(t)),$$

$$\varphi_j(t) = -\left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{1}{1+\rho|\tilde{z}_j(t)|^{\gamma}}, \quad j=2,\ldots,n-1,$$

$$\psi_j(t) = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{j-1}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{j-1}(t)|^{\gamma}} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_{j+1}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{j+1}(t)|^{\gamma}}, \quad j=2,\ldots,n-2,$$

$$\psi_{n-1}(t) = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-2}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-2}(t)|^{\gamma}},$$

$$\varphi_n(t) = -\theta, \quad \psi_n(t) = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-1}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-1}(t)|^{\gamma}}.$$

Очевидно, для каждой компоненты $\tilde{z}_j(t)$ решения имеем

$$\frac{d\tilde{z}_j(t)}{dt} \equiv \varphi_j(t)\tilde{z}_j(t) + \psi_j(t), \quad j=1,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$\tilde{z}_j(t) \equiv \int_0^t e^{\int_\xi^t \varphi_j(\eta)d\eta} \psi_j(\xi)\, d\xi, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Поэтому если $t_+ < \infty$, то в силу определений функций $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, получаем, что $\|\tilde{z}(t)\| \le c < \infty$ при $0 \le t \le t_+$; противоречие.

Поскольку $\psi_j(t) \ge 0$, в силу (1.3) имеем $\tilde{z}_j(t) \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$, при $t \ge 0$. Следовательно, $|\tilde{z}_j(t)| \equiv \tilde{z}_j(t)$, и $\tilde{z}(t)$ является решением задачи Коши (1.1) при $t \ge 0$.

Замечание 1. Если в (1.1) функция $g(t, v)$ имеет вид

$$g(t, v) = \frac{\alpha}{1 + \beta v^\sigma}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \sigma > 1,$$

то при доказательстве разрешимости задачи Коши (1.1) в первом уравнении системы из вспомогательной задачи Коши (1.2) вместо функции $g(t, \tilde{z}_n)$ нужно поставить $g(t, |\tilde{z}_n|)$. Все остальные рассуждения проводятся без изменения.

Замечание 2. В [21] предложен способ доказательства разрешимости задачи Коши для общего класса нелинейных систем с начальными условиями на границе области определения систем.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\gamma > 1$. Будем неограниченно увеличивать число n уравнений в (1.1) и рассмотрим последовательности $\{\check{z}_j^n(t)\}$, составленные из j-х компонент решений задач Коши вида (1.1). Ниже установим важные свойства для компонент $\check{z}_j^n(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$, с использованием которых в следующем параграфе докажем предельную теорему.

Теорема 2. *Существует $n_0 > 0$ такое, что при всех $n > n_0$ для компонент $\check{z}_j^n(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$, решения задачи Коши* (1.1) *имеют место оценки*

$$0 \le \check{z}_j^n(t) < \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}, \quad t \ge 0,\ \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Очевидно, в силу непрерывности решения задачи Коши (1.1) при достаточно малых значениях $t \ge 0$ неравенства (1.4) выполнены. Покажем, что они справедливы при всех $t \ge 0$. Предположим, что это неверно. Тогда найдутся значение $t_* > 0$ и хотя бы один номер $k < n$ такие, что

$$\check{z}_j^n(t) < \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}, \quad j = 1, \ldots, n-1,\ t \in [0, t_*), \tag{1.5}$$

$$\check{z}_k^n(t_*) = \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}. \tag{1.6}$$

Очевидно, что при этом $\frac{d\check{z}_k^n}{dt}\big|_{t=t^*} \ge 0$.

Пусть k — наибольший из номеров, для которых имеет место (1.6). Будем рассматривать n такие, что выполнено неравенство

$$\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1} \le z_*,$$

где $z_* = \left(\frac{1}{\rho(\gamma-1)}\right)^{1/\gamma}$ — точка, в которой достигается максимум функции

$$f(z) = \frac{z}{1 + \rho z^\gamma}, \quad z \ge 0,$$

т. е.

$$n \geq n_1 = 1 + \frac{\tau G(1+\rho)}{z_*}.$$

Рассмотрим случай, когда $k = n-1$. В силу (1.1) имеем

$$0 \leq \left.\frac{d\check{z}^n_{n-1}}{dt}\right|_{t=t^*} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\check{z}^n_{n-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-1}(t_*)\big)^\gamma}$$
$$< \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_{n-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-1}(t_*)\big)^\gamma}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\check{z}^n_{n-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-1}(t_*)\big)^\gamma} = \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} < \frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma}, \tag{1.7}$$

что невозможно. Действительно, в силу непрерывности функции $\check{z}^n_{n-2}(t)$ и неравенства (1.5) получаем

$$\check{z}^n_{n-2}(t_*) \leq \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}.$$

Так как функция $f(z)$ возрастает на интервале $z \in \big(0, \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)$, при $n > n_1$ имеем

$$\frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma} \leq \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)},$$

что противоречит (1.7). Следовательно, случай $k = n-1$ невозможен.

Предположим теперь, что $1 < k < n-1$. Тогда

$$\frac{\check{z}^n_{k+1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k+1}(t_*)\big)^\gamma} < \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} = \frac{\check{z}^n_k(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_k(t_*)\big)^\gamma}.$$

Поскольку $\check{z}^n_k(t)$ — одна из компонент решения задачи Коши (1.1), то

$$0 \leq \left.\frac{d\check{z}^n_k}{dt}\right|_{t=t^*} = \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\check{z}^n_{k-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k-1}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_k(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_k(t_*)\big)^\gamma}\right)$$
$$- \frac{n-1}{\tau_2}\left(\frac{\check{z}^n_k(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_k(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_{k+1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k+1}(t_*)\big)^\gamma}\right)$$
$$< \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\check{z}^n_{k-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k-1}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_k(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_k(t_*)\big)^\gamma}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\check{z}^n_k(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_k(t_*)\big)^\gamma} = \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} < \frac{\check{z}^n_{k-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k-1}(t_*)\big)^\gamma},$$

что невозможно. Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить рассуждения, приведенные после (1.7).

Остается рассмотреть случай $k = 1$. Как выше, имеем

$$\frac{\check{z}^n_2(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_2(t_*)\big)^\gamma} < \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} = \frac{\check{z}^n_1(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_1(t_*)\big)^\gamma}.$$

В силу (1.1) получаем

$$0 \le \frac{d\check{z}_1^n}{dt}\Big|_{t=t_*} = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_1^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_1^n(t_*)\big)^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_2^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_2^n(t_*)\big)^\gamma} + g\big(t_*, \check{z}_n^n(t_*)\big)$$
$$< -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_1^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_1^n(t_*)\big)^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_1^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_1^n(t_*)\big)^\gamma} + g\big(t_*, \check{z}_n^n(t_*)\big)$$
$$= -\frac{G(1+\rho)}{1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma} + g\big(t_*, \check{z}_n^n(t_*)\big) \le G\left(1 - \frac{1+\rho}{1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma}\right).$$

Правая часть этого неравенства отрицательна при $n > n_2 = 1 + \tau G(1+\rho)$. Следовательно, при таких n приходим к противоречию.

Таким образом, при $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ оценки (1.4) выполнены.

Теорема доказана.

§ 2. Предельная теорема

В этом параграфе с использованием свойств решений задачи Коши (1.1), установленных в теореме 2, докажем предельную теорему, которая является аналогом теоремы 1 и результатов для решений систем (0.4) и (0.5), описанных во введении.

По аналогии с рассуждениями, проведенными для системы (0.5) в [16], теорема 2 позволяет сформулировать естественное предположение о свойствах последней компоненты $\check{z}_n(t)$ решения задачи Коши (1.1). Для этого рассмотрим правую часть нелинейной системы из (1.1) и в каждом из отношений $h_j = \frac{\check{z}_j}{1+\rho\check{z}_j^\gamma}$ воспользуемся оценками (1.4) для выражений, стоящих в знаменателе. Тогда

$$\frac{\check{z}_j}{1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma} \le h_j \le \check{z}_j, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{2.1}$$

Выпишем теперь две системы почти линейных дифференциальных уравнений («нижнюю» и «верхнюю»), которые отличаются от системы из (1.1) тем, что вместо всех нелинейных слагаемых вида h_j будем писать линейные слагаемые, стоящие слева и справа в (2.1) соответственно.

«Верхняя» система, соответствующая верхним оценкам в (2.1), имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = B_n z + F(t, z),$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \cdots & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\theta \end{pmatrix}.$$

«Нижняя» система, соответствующая нижним оценкам в (2.1), имеет вид

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = \widehat{B}_n \hat{z} + F(t, \hat{z}),$$

где

$$\widehat{B}_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\hat\tau_1} & \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\frac{n-1}{\hat\tau_1} - \frac{n-1}{\hat\tau_2} & \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\frac{n-1}{\hat\tau_1} - \frac{n-1}{\hat\tau_2} & \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\frac{n-1}{\hat\tau_1} - \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\theta \end{pmatrix},$$

$\hat\tau_j = \tau_j\big(1 + \frac{a}{(n-1)^\gamma}\big)$, $j = 1, 2$, $a = \rho(\tau G(1+\rho))^\gamma$. Для каждой из этих систем рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = B_n z + F(t, z), \quad t > 0, \\ z|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat z}{dt} = \widehat{B}_n \hat z + F(t, \hat z), \quad t > 0, \\ \hat z|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Как известно [11, 15], для последних компонент $z_n(t)$ и $\hat z_n(t)$ решений каждой из этих задач Коши при достаточно больших $n \gg 1$ имеют место аппроксимации

$$z_n(t) \approx y(t), \quad \hat z_n(t) \approx y(t),$$

где $y(t)$ — решение начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \ \tau = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Очевидно также, что для каждой из задач (2.2) и (2.3) справедлив аналог теоремы 2. Поэтому возникает совершенно естественное предположение, что для последней компоненты решения задачи Коши (1.1) для «промежуточной» системы также имеет место аппроксимация

$$\check z_n(t) \approx y(t), \quad n \gg 1,$$

где $y(t)$ — решение той же начальной задачи (2.4). Доказательство этого факта дается в теореме, приведенной ниже.

Рассмотрим последовательность $\{\check z_n^n(t)\}$, составленную из последних компонент решений задач Коши вида (1.1). Имеет место

Теорема 3. *Пусть $T > \tau$ такое, что*

$$\frac{L(1 - e^{-\theta T})}{\theta}\frac{\tau}{\tau_1} < 1. \tag{2.5}$$

Тогда последовательность $\{\check z_n^n(t)\}$ равномерно сходится на отрезке $[0, T]$:

$$\check z_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи (2.4).

Доказательство будем проводить, следуя схеме, описанной во введении. Будем неограниченно увеличивать число n уравнений в (2.2) и рассмотрим последовательности $\{z_j^n(t)\}$, составленные из j-х компонент решений задач Коши вида (2.2). Оценим разность $\check z_n^n(t) - z_n^n(t)$. Для этого введем обозначения

$u_j^n(t) = \check{z}_j^n(t) - z_j^n(t)$, $j = 1, \ldots, n$. Нетрудно убедиться, что вектор-функция $u^n(t) = \big(u_1^n(t), \ldots, u_n^n(t)\big)^T$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{du^n}{dt} = B_n u^n + G_1(t) + G_2(t), \tag{2.6}$$

где матрица B_n совпадает с матрицей системы из (2.2),

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} g\big(t, \check{z}_n^n(t)\big) - g\big(t, z_n^n(t)\big) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2(t) = \rho(n-1) \begin{pmatrix} \frac{(\check{z}_1^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_1^n(t))^\gamma)} - \frac{(\check{z}_2^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_2(1+\rho(\check{z}_2^n(t))^\gamma)} \\ -\frac{(\check{z}_1^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_1^n(t))^\gamma)} + \big(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\big)\frac{(\check{z}_2^n(t))^{\gamma+1}}{1+\rho(\check{z}_2^n(t))^\gamma} - \frac{(\check{z}_3^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_2(1+\rho(\check{z}_3^n(t))^\gamma)} \\ \vdots \\ -\frac{(\check{z}_{n-2}^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_{n-2}^n(t))^\gamma)} + \big(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\big)\frac{(\check{z}_{n-1}^n(t))^{\gamma+1}}{1+\rho(\check{z}_{n-1}^n(t))^\gamma} \\ -\frac{(\check{z}_{n-1}^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_{n-1}^n(t))^\gamma)} \end{pmatrix}.$$

В следующей вспомогательной лемме указаны оценки для функций $u_j^n(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Лемма. *Существует $n_0 > 0$ такое, что при всех $n > n_0$ для функций $u_j^n(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$, имеют место оценки*

$$\big|u_j^n(t)\big| < \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(j + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right), \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

где $\tau = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2-\tau_1}$, $K = \frac{\rho(\tau_1+\tau_2)(\tau G(1+\rho))^{1+\gamma}}{\tau_1\tau_2}$.

Доказательство. При получении оценок (2.7) будем следовать схеме доказательства теоремы 2. Очевидно, в силу непрерывности функций $u_j^n(t)$ при достаточно малых $t \geq 0$ неравенства (2.7) выполнены. Покажем, что они справедливы при $t \geq 0$. Предположим, что это неверно. Тогда найдутся значение $t_* > 0$ и хотя бы один номер $i < n$ такие, что

$$\big|u_j^n(t)\big| < \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(j + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right), \ \ j = 1, \ldots, n-1, \ t \in [0, t_*), \tag{2.8}$$

$$\big|u_i^n(t_*)\big| = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{2.9}$$

Пусть i — наибольший из номеров, для которого выполнено (2.9). Выделим три случая: $i = 1$; $2 \leq i \leq n-2$; $i = n-1$.

Вначале рассмотрим случай $i = 1$. Возможны два варианта:

$$u_1^n(t_*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) \tag{2.10}$$

или

$$u_1^n(t_*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{2.11}$$

Предположим, что имеет место (2.10). Тогда в силу (2.6)

$$0 \le \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = -\frac{n-1}{\tau_1}u_1^n(t_*) + \frac{n-1}{\tau_2}u_2^n(t_*) + g\big(t_*, \tilde{z}_n^n(t_*)\big) - g\big(t_*, z_n^n(t_*)\big) + G_{2,1}(t_*),$$

где $G_{2,1}(t)$ — первая компонента вектор-функции $G_2(t)$. В силу выбора t_* и номера i для $u_2^n(t_*)$ выполнено неравенство (2.7). Используя результат теоремы 2, для компонент $G_{2,j}(t)$ вектор-функции $G_2(t)$ при $n > n_0$ получаем оценки

$$|G_{2,j}(t)| < \frac{K}{(n-1)^\gamma}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$0 \le \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} < -\frac{\tau}{\tau_1}\left(L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right)$$
$$+ \frac{\tau}{\tau_2}\left(L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(2 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) + L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma} = 0.$$

Приходим к противоречию. Значит, если $i = 1$, то равенство (2.10) невозможно. Предположим, что выполнено (2.11). Тогда получаем

$$0 \ge \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = -\frac{n-1}{\tau_1}u_1^n(t_*) + \frac{n-1}{\tau_2}u_2^n(t_*) + g\big(t_*, \tilde{z}_n^n(t_*)\big) - g\big(t_*, z_n^n(t_*)\big) + G_{2,1}(t_*).$$

Проводя рассуждения, как при рассмотрении случая (2.10), можем выписать оценку снизу:

$$0 \ge \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} > \frac{\tau}{\tau_1}\left(L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right)$$
$$- \frac{\tau}{\tau_2}\left(L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(2 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) - L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| - \frac{K}{(n-1)^\gamma} = 0,$$

что опять приводит к противоречию. Следовательно, случай $i = 1$ невозможен.

Рассмотрим случай $2 \le i \le n-2$. Как выше, возможны два варианта:

$$u_i^n(t_*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) \tag{2.12}$$

либо

$$u_i^n(t_*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]}|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{2.13}$$

Предположим, что имеет место (2.12). Тогда в силу (2.6)

$$0 \le \frac{du_i^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = \frac{n-1}{\tau_1}\big(u_{i-1}^n(t_*) - u_i^n(t_*)\big) - \frac{n-1}{\tau_2}\big(u_i^n(t_*) - u_{i+1}^n(t_*)\big) + G_{2,i}(t_*).$$

С учетом выбора t_* и номера i для $u_{i+1}^n(t_*)$ выполнено (2.7). В силу непрерывности и условия (2.8) для функции $u_{i-1}^n(t)$ справедливо неравенство

$$\big|u_{i-1}^n(t_*)\big| \le \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i - 1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right).$$

Следовательно,

$$0 \le \frac{du_i^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} < -\frac{\tau}{\tau_1}\frac{K}{(n-1)^\gamma} + \frac{\tau}{\tau_2}\frac{K}{(n-1)^\gamma} + \frac{K}{(n-1)^\gamma} = 0,$$

что невозможно. Аналогично показывается, что равенство (2.13) также невозможно.

Остается рассмотреть случай $i = n-1$. Как выше, возможны два варианта:

$$u^n_{n-1}(t_*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\left|u^n_n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right)$$

либо

$$u^n_{n-1}(t_*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\left|u^n_n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right).$$

Для определенности рассмотрим второе равенство. Тогда

$$\begin{aligned}0 \ge \left.\frac{du^n_{n-1}}{dt}\right|_{t=t_*} &= \frac{n-1}{\tau_1}\left(u^n_{n-2}(t_*) - u^n_{n-1}(t_*)\right) - \frac{n-1}{\tau_2}u^n_{n-1}(t_*) + G_{2,n-1}(t_*)\\ &\ge \frac{\tau}{\tau_1}\frac{K}{(n-1)^\gamma} + \frac{\tau}{\tau_2}\left(L\max_{s\in[0,T]}\left|u^n_n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) - \frac{K}{(n-1)^\gamma}\\ &= \frac{\tau}{\tau_2}\left(L\max_{s\in[0,T]}\left|u^n_n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) > 0,\end{aligned}$$

что невозможно. Следовательно, оценки (2.7) выполнены при $t \ge 0$.

Лемма доказана.

Используя лемму, ниже получим оценки для $u^n_n(t)$. Пусть $n_0 > 0$ такое, что при всех $n > n_0$ выполнены оценки (1.4) и (2.7). В силу определения для $u^n_n(t)$ имеем тождество

$$\frac{du^n_n(t)}{dt} \equiv \frac{n-1}{\tau_1}u^n_{n-1}(t) - \theta u^n_n(t) + G_{2,n}(t),$$

где $G_{2,n}(t)$ — последняя компонента вектор-функции $G_2(t)$. Таким образом,

$$u^n_n(t) \equiv \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\left(\frac{n-1}{\tau_1}u^n_{n-1}(s) + G_{2,n}(s)\right)ds.$$

Применяя оценки (1.4) и (2.7), получаем

$$\left|u^n_n(t)\right| < \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta}\left(\frac{\tau}{\tau_1}L\max_{s\in[0,T]}\left|u^n_n(s)\right| + \frac{\tau}{\tau_1}\frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right) + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\right).$$

Отсюда, если выполнено неравенство (2.5), то для $u^n_n(t)$ справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u^n_n(t)\right| < \left(1 - \frac{L(1-e^{-\theta T})}{\theta}\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{-1}\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\frac{\tau K}{\tau_1(n-1)^\gamma}\left(n+\frac{\tau-\tau_1}{\tau_2}\right).$$

В силу полученного неравенства имеем равномерную сходимость

$$u^n_n(t) = \check{z}^n_n(t) - z^n_n(t) \to 0, \quad n\to\infty,\ t\in[0,T],$$

где T определяется неравенством (2.5). Как было отмечено выше, последовательность $\{z^n_n(t)\}$ равномерно сходится к решению $y(t)$ начальной задачи (2.4). Отсюда вытекает равномерная сходимость

$$\check{z}^n_n(t) \to y(t), \quad n\to\infty,\ t\in[0,T].$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Для некоторых систем вида (0.1) и (1.1) проводились численные исследования (см., например, работы [3, 22, 23]).

Замечание 4. Используя метод сравнения, описанный во введении, и опираясь на схему рассуждений, указанную перед теоремой 3, можно получить предельные теоремы для более общих классов нелинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

2. *Хидиров Б. Н.* Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // Мат. моделирование. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.

3. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.

4. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

5. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А.* О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.

6. *Demidenko G. V., Khropova Yu. E., Kotova T. V.* On one class of infinite-order systems of differential equations and on delay differential equations // Proc. Fifth Intern. conf. bioinformatics of genome regulation and structure (Novosibirsk, Russia, July 16–22 2006). Novosibirsk: Inst. Cytology Genetics, 2006. V. 3. P. 29–32.

7. *Demidenko G. V., Khropova Yu. E.* On properties of solutions of one delay differential equation // Proc. Fifth Intern. conf. bioinformatics of genome regulation and structure (Novosibirsk, Russia, July 16–22 2006). Novosibirsk: Inst. Cytology Genetics, 2006. V. 3. P. 38–42.

8. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.

9. *Мудров А. В.* О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 2. С. 57–69.

10. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.* О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 34–46.

11. *Демиденко Г. В., Мельник И. А., Хропова Ю. Е.* Уравнения с запаздывающим аргументом в задачах многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2009. 26 с. (Препринт/Ин-т математики; № 233).

12. *Матвеева И. И., Попов А. М.* О свойствах решений одной системы, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 3. С. 86–94.

13. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.

14. *Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Mel'nik I. A.* On properties of solutions to equations of multistage substance synthesis // J. Anal. Appl. 2010. V. 8, N 1. P. 47–61.

15. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // J. Anal. Appl. 2010. V. 8, N 2. P. 63–74.

16. *Котова Т. В., Мельник И. А.* О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметрами. Новосибирск, 2010. 17 с. (Препринт/Ин-т математики; № 253).

17. *Мельник И. А.* Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений, моделирующей многостадийный синтез вещества // Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, № 5. С. 1254–1259.

18. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 42–53.

19. *Матвеева И. И., Мельник И. А.* О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений большой размерности. Новосибирск, 2011. 17 с. (Препринт/Ин-т математики; № 261).

20. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

21. *Иванов В. В.* Разрешимость задачи Коши с начальными условиями на границе // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 487–490.

22. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Штокало Д. Н.* Об исследовании нелинейных моделей многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2010. 37 с. (Препринт/Ин-т математики; № 246).

23. *Ващенко Г. В., Новиков Е. А.* Параллельная реализация явного метода Эйлера с контролем точности вычислений // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 1. С. 70–76.

Статья поступила 21 марта 2011 г.

Матвеева Инесса Изотовна, Мельник Ирина Алексеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
matveeva@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru