Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.643

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД РЕШЕТКАМИ

А. В. Жуклина

Аннотация. Приводится наибольшее решение матричных уравнений над булевыми решетками. Устанавливается наименьшее (наибольшее) решение матричного уравнения над дистрибутивной решеткой с матрицей, удовлетворяющей определенным свойствам.

Ключевые слова: решеточная матрица, матричное уравнение над решеткой, решетка.

1. Обозначения и терминология

Пусть L — частично упорядоченное множество. Будем обозначать через 0(1) наименьший (наибольший) элемент в L (если он существует). Если L — решетка, то через $\vee$ и $\wedge$ будем обозначать операции объединения и пересечения соответственно.

Пусть L — решетка. *Решеточными* называются матрицы, элементы которых принадлежат множеству L. Обозначим через $L^{m\times n}$ множество всех решеточных матриц размера $m \times n$ ($m, n \geq 1$) с элементами из L. Элементы матриц будем обозначать соответствующими малыми буквами: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ и т. д. На множестве $L^{m\times n}$ определим частичный порядок: для любых матриц $A, B \in L^{m\times n}$ отношение $A \leq B$ равносильно тому, что $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Матрицу, полученную из A транспонированием, будем обозначать через A^T.

Если L — решетка с 0 и 1, то определена единичная матрица $E = E_{n\times n} \in L^{n\times n}$, где

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Операции сложения и умножения решеточных матриц над решеткой L определяются, как обычно: вместо операции сложения используется операция объединения $\vee$, а вместо операции умножения — операция пересечения $\wedge$.

Подмножество решетки с нулем называется *ортогональной системой*, если пересечение двух любых его различных элементов равно нулю.

Пусть L — решетка с 0 и 1. Говорят, что *элемент a имеет дополнение в решетке L*, если существует такой элемент $b \in L$, что $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Элемент b называется при этом *дополнением элемента a* и обозначается через $\bar{a}$. Решетка, любой элемент которой имеет дополнение, называется *решеткой с дополнениями.*

Решетка L называется *дистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in L$ выполняется равенство $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой.*

Пентагоном называется решетка $(\{0, 1, a, b, c\}, \leq)$, для которой $0 < a < 1$, $0 < c < b < 1$, $c \vee a = b \vee a = 1$, $c \wedge a = b \wedge a = 0$.

Диамантом называется решетка $(\{0, 1, a, b, c\}, \leq)$, для которой $a \vee b = b \vee c = c \vee a = 1$, $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 0$.

Пусть L — решетка, $a, b, c \in L$ и $a \in [b, c]$. Элемент d называется *относительным дополнением элемента a в интервале* $[b, c]$, если $a \vee d = c$ и $a \wedge d = b$. В дальнейшем нас будет интересовать относительное дополнение элемента a в интервале $[0, b]$, где $a, b \in L$, 0 — нуль решетки L, т. е. элемент, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a \vee x = b, \\ a \wedge x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что если L — дистрибутивная решетка с 0, то для всех $a, b \in L$ ($a \leq b$) из совместности системы (1) следует единственность ее решения. В самом деле, если допустить, что система (1) имеет два решения, то решетка L будет содержать пентагон или диамант, что противоречит следующему утверждению.

Решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда она не содержит ни пентагонов, ни диамантов [1, теорема II.1.1].

Для удобства условимся в дистрибутивной решетке с 0 обозначать относительное дополнение элемента a в интервале $[0, b]$ через d_a^b.

2. Доказательство основных результатов

Теорема 1. *Пусть L — дистрибутивная решетка с 0 и 1. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть матричное уравнение $AX = B$, где $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times k}$, таково, что в решетке L для любых $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $t \in \{1, \dots, k\}$ существуют элементы $d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_{it}}$ и $\overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_{it}}}$. Если уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = (r_{jt})_{n\times k}$, где*

$$r_{jt} = \bigwedge_{1\leq i\leq m} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_{it}}},$$

является его наибольшим решением.

(2) *Пусть матричное уравнение $XA = B$, где $A \in L^{n\times k}$, $B \in L^{m\times k}$, таково, что в решетке L для любых $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $t \in \{1, \dots, k\}$ существуют элементы $d^{a_{jt}}_{a_{jt}\wedge b_{it}}$ и $\overline{d^{a_{jt}}_{a_{jt}\wedge b_{it}}}$. Если уравнение $XA = B$ разрешимо, то матрица $R = (r_{ij})_{m\times n}$, где*

$$r_{ij} = \bigwedge_{1\leq t\leq k} \overline{d^{a_{jt}}_{a_{jt}\wedge b_{it}}},$$

является его наибольшим решением.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для случая $k = 1$. В общем случае рассуждения аналогичны, поскольку матричное уравнение $AX = B$, где $A \in L^{m\times n}$, $B \in L^{m\times k}$, равносильно системе линейных уравнений

$$\bigvee_{1\leq j\leq n} (a_{ij} \wedge x_{jt}) = b_{it}, \quad i = 1, \dots, m, \ t = 1, \dots, k.$$

Пусть система линейных уравнений $AX = B$ совместна. Покажем, что указанный в формулировке теоремы вектор R является наибольшим решением этой системы. Сначала установим, что наибольшим решением неравенства $a_{ij} \wedge x_{ij} \leq b_i$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$) является элемент $\overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij} \wedge b_i}}$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} a_{ij} \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}} &= \big((a_{ij} \wedge b_i) \vee d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}\big) \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}} \\ &= \big((a_{ij} \wedge b_i) \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}\big) \vee \big(d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i} \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}\big) = a_{ij} \wedge b_i \wedge \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}} \leq b_i. \end{aligned}$$

Предположим, что $a_{ij} \wedge g \leq b_i$ для некоторого $g \in L$. Тогда

$$g \wedge d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i} = a_{ij} \wedge g \wedge d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i} \leq a_{ij} \wedge b_i \wedge d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i} = 0,$$

откуда нетрудно вывести, что элемент $g \vee \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}$ является дополнением элемента $d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}$ в L. Поскольку в дистрибутивной решетке дополнения единственны, получаем $g \leq g \vee \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}} = \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}$.

Очевидно, элемент $\bigwedge\limits_{1 \leq i \leq m} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}$ является наибольшим решением системы неравенств

$$\begin{cases} a_{1j} \wedge x_j \leq b_1, \\ a_{2j} \wedge x_j \leq b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{mj} \wedge x_j \leq b_m, \end{cases}$$

поэтому вектор $R = (r_j)_{n \times 1}$, где $r_j = \bigwedge\limits_{1 \leq i \leq m} \overline{d^{a_{ij}}_{a_{ij}\wedge b_i}}$, является наибольшим решением матричного неравенства $AX \leq B$. Поскольку система линейных уравнений $AX = B$ совместна, вектор R является и наибольшим решением уравнения $AX = B$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть L — булева решетка. Если $A \in L^{m \times n}$, $B \in L^{m \times k}$ и матричное уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = (r_{jt})_{n \times k}$, где*

$$r_{jt} = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} (\overline{a_{ij}} \vee b_{it}),$$

является его наибольшим решением. Симметрично если $A \in L^{n \times k}$, $B \in L^{m \times k}$ и матричное уравнение $XA = B$ разрешимо, то матрица $R = (r_{ij})_{m \times n}$, где

$$r_{ij} = \bigwedge_{1 \leq t \leq k} (\overline{a_{jt}} \vee b_{it}),$$

является его наибольшим решением.

Доказательство. Если L — булева решетка, $a, b \in L$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что $d^a_{a \wedge b} = a \wedge \overline{b}$. Применяя теорему 1, получаем справедливость нужного утверждения. Следствие доказано.

Частным случаем данного следствия является критерий разрешимости матричного уравнения $AX = B$ над $\{0, 1\}$-решетками. Этот критерий представлен в [2]. Разрешимость матричных уравнений над $\{0, 1\}$-решетками исследовалась также в [3].

Следующая теорема принадлежит Л. А. Скорнякову [4].

Теорема Скорнякова. *Пусть L — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $A \in L^{n\times n}$. Матрица A обратима над L тогда и только тогда, когда она является ортогональной матрицей, т. е. $AA^T = A^T A = E$.*

Отметим, что ортогональная матрица $A \in L^{n\times n}$ обладает свойствами:
1) $a_{ik} \wedge a_{jk} = 0$ для всех $i \neq j$, $k = 1, \dots, n$;
2) $a_{i1} \vee \ldots \vee a_{in} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$;
3) $a_{ki} \wedge a_{kj} = 0$ для всех $i \neq j$, $k = 1, \dots, n$;
4) $a_{1i} \vee \ldots \vee a_{ni} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Пусть L — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $A, B \in L^{n\times n}$, A — ортогональная матрица. Из теоремы Скорнякова следует, что уравнение вида $AX = B$ разрешимо и решением является матрица $X = A^T B$.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости уравнений вида $AX = B$, где матрица A обладает некоторыми свойствами ортогональной матрицы.

Теорема 2. *Пусть L — дистрибутивная решетка с 0, $B \in L^{m\times k}$ и матрица $A \in L^{m\times n}$ такова, что элементы каждой ее строки образуют ортогональную систему. Если матричное уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = A^T B$ является его наименьшим решением.*

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 1$. Пусть система линейных уравнений $AX = B$ совместна. Покажем, что указанный вектор R является ее наименьшим решением.

Очевидно, имеет место равенство $(a_{i1} \wedge b_i) \vee (a_{i2} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_i) = b_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Если $b_i = (a_{i1} \wedge f_1) \vee (a_{i2} \wedge f_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge f_n)$, где $f_1, f_2, \dots, f_n \in L$, то в силу того, что $a_{ij} \wedge a_{ik} = 0$ при $j \neq k$, получаем

$$a_{i1} \wedge b_i = a_{i1} \wedge f_1, a_{i2} \wedge b_i = a_{i2} \wedge f_2, \dots, a_{in} \wedge b_i = a_{in} \wedge f_n,$$

откуда следует справедливость равенств

$$a_{i1} \wedge b_i = a_{i1} \wedge b_i \wedge f_1, a_{i2} \wedge b_i = a_{i2} \wedge b_i \wedge f_2, \dots, a_{in} \wedge b_i = a_{in} \wedge b_i \wedge f_n,$$

значит,

$$a_{i1} \wedge b_i \leq f_1, a_{i2} \wedge b_i \leq f_2, \dots, a_{in} \wedge b_i \leq f_n.$$

Таким образом, вектор $(a_{i1} \wedge b_i, a_{i2} \wedge b_i, \dots, a_{in} \wedge b_i)$ является наименьшим решением уравнения $(a_{i1} \wedge x_1) \vee (a_{i2} \wedge x_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge x_n) = b_i$.

Пусть вектор $F = (f_j)_{n\times 1}$ — некоторое решение системы уравнений $AX = B$. В силу установленного выше для произвольного фиксированного индекса $j \in \{1, \dots, n\}$ будет $f_j \geq a_{ij} \wedge b_i$ для всех $i = 1, \dots, m$, поэтому $f_j \geq \bigvee\limits_{1\leq i\leq m} (a_{ij} \wedge b_i)$, следовательно, $F \geq R$.

Далее, для любого $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
b_i = (a_{i1} \wedge b_i) \vee (a_{i2} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_i) \\
\leq (a_{i1} \wedge [(a_{11} \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_{i1} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{m1} \wedge b_m)]) \\
\vee (a_{i2} \wedge [(a_{12} \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_{i2} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{m2} \wedge b_m)]) \vee \ldots \\
\vee (a_{in} \wedge [(a_{1n} \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_i) \vee \ldots \vee (a_{mn} \wedge b_m)]) \\
\leq (a_{i1} \wedge f_1) \vee (a_{i2} \wedge f_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge f_n) = b_i,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $(a_{i1} \wedge r_1) \vee (a_{i2} \wedge r_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge r_n) = b_i$ для всех $i = 1, \dots, m$, т. е. R — решение уравнения $AX = B$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть L — дистрибутивная решетка с 0, $B \in L^{m\times 1}$, $A \in L^{m\times n}$, и пусть элементы каждого столбца матрицы A образуют ортогональную систему. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Система линейных уравнений $AX = B$ совместна.*
2. *Каждое уравнение системы $AX = B$ имеет решение.*
3. *Системе $AX = B$ удовлетворяет вектор $R = A^T B$.*

Доказательство. Покажем справедливость импликации $2 \Rightarrow 3$. Так как уравнение $(a_{k1} \wedge x_1) \vee (a_{k2} \wedge x_2) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge x_n) = b_k$, где $k \in \{1, \ldots, m\}$, имеет решение, справедливо равенство

$$(a_{k1} \wedge b_k) \vee (a_{k2} \wedge b_k) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge b_k) = b_k. \tag{2}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&(a_{k1} \wedge r_1) \vee (a_{k2} \wedge r_2) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge r_n) \\
&\quad = \Big(a_{k1} \wedge \Big[\bigvee_{1\le i\le m} (a_{i1} \wedge b_i)\Big]\Big) \vee \Big(a_{k2} \wedge \Big[\bigvee_{1\le i\le m} (a_{i2} \wedge b_i)\Big]\Big) \vee \\
&\qquad \ldots \vee \Big(a_{kn} \wedge \Big[\bigvee_{1\le i\le m} (a_{in} \wedge b_i)\Big]\Big) \\
&\quad = ([a_{k1} \wedge (a_{11} \wedge b_1)] \vee \ldots \vee [a_{k1} \wedge (a_{k1} \wedge b_k)] \vee \ldots \vee [a_{k1} \wedge (a_{m1} \wedge b_m)]) \\
&\quad \vee ([a_{k2} \wedge (a_{12} \wedge b_1)] \vee \ldots \vee [a_{k2} \wedge (a_{k2} \wedge b_k)] \vee \ldots \vee [a_{k2} \wedge (a_{m2} \wedge b_m)]) \vee \\
&\quad \ldots \vee ([a_{kn} \wedge (a_{1n} \wedge b_1)] \vee \ldots \vee [a_{kn} \wedge (a_{kn} \wedge b_k)] \vee \ldots \vee [a_{kn} \wedge (a_{mn} \wedge b_m)]) \\
&\quad = (a_{k1} \wedge b_k) \vee \ldots \vee (a_{kn} \wedge b_k) = b_k
\end{aligned}$$

с учетом (2) и равенства $a_{kj} \wedge a_{tj} = 0$ при $k \ne t$.

Таким образом, указанный вектор R является решением системы уравнений $AX = B$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть L — дистрибутивная решетка с 0, $B \in L^{m\times k}$ и матрица $A \in L^{m\times n}$ такова, что элементы каждого ее столбца образуют ортогональную систему. Если матричное уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = A^T B$ является его решением.*

Теорема 4. *Пусть L — дистрибутивная решетка с 0 и 1, $B \in L^{m\times k}$ и матрица $A \in L^{m\times n}$ такова, что элементы каждого ее столбца образуют ортогональную систему, при этом объединение всех элементов любого столбца равно 1. Если матричное уравнение $AX = B$ разрешимо, то матрица $R = A^T B$ является его наибольшим решением.*

Доказательство. Пусть $k = 1$. Если система линейных уравнений $AX = B$ совместна, то согласно теореме 3 вектор $R = A^T B$ является решением этой системы. Пусть $F = (f_j)_{n\times 1}$ — некоторое решение системы $AX = B$. Покажем, что $F \le R$.

В самом деле, для любых $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $a_{ij} \wedge f_j \le b_i$ и $a_{ij} \wedge f_j \le a_{ij}$, поэтому $a_{ij} \wedge f_j \le a_{ij} \wedge b_i$.

Следовательно,

$$f_j = f_j \wedge 1 = f_j \wedge \Big(\bigvee_{1\le i\le m} a_{ij}\Big) = \bigvee_{1\le i\le m} (f_j \wedge a_{ij}) \le \bigvee_{1\le i\le m} (b_i \wedge a_{ij}).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
2. *Duca L., Duca M.* La resolution des equations matricielles boolennes // Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. 1999. V. 61, N 1–2. P. 81–90.
3. *Kim K. H.* Boolean matrix theory and its applications. New York: Marcel Dekker, 1992.
4. *Скорняков Л. А.* Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 26, № 2. С. 182–185.

Статья поступила 24 декабря 2009 г., окончательный вариант — 7 сентября 2011 г.

Жуклина Анна Владимировна
Красноярский гос. аграрный университет,
кафедра высшей и прикладной математики,
пр. Мира, 90, Красноярск 660049
a_zhuklina@mail.ru