Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.98

МАЖОРИРУЕМАЯ СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ НА ПОЛУКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА И СРЕДНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. М. Бикчентаев, А. А. Сабирова

Аннотация. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Доказано, что каждая порядково ограниченная последовательность τ-компактных операторов обладает подпоследовательностью, средние арифметические которой сходятся по мере τ. Доказан некоммутативный аналог леммы Пратта для пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Результаты являются новыми даже для алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$. Получено приложение основного результата к пространствам $L_p(\mathcal{M},\tau)$, $0 < p \leq 1$. Приведены примеры, показывающие необходимость перехода к средним арифметическим и существенность τ-компактности мажорирующего оператора.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный полуконечный след, измеримый оператор, топология сходимости по мере, спектральная теорема, банахово пространство, свойство Банаха — Сакса, среднее арифметическое.

Введение

Известно (см. пример 3.4 ниже и теорему 2.6.7 в [1]), что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ может сходиться к нулю по вероятности, но последовательность средних арифметических $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ может не сходиться к нулю по вероятности. Однако если, кроме того, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно интегрируема, то $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k \to 0$ по вероятности. Закон больших чисел дает сходимость средних арифметических независимых одинаково распределенных интегрируемых случайных величин по вероятности [2, гл. III, § 3, теорема 2]. Существование подпоследовательностей со сходящимися средними арифметическими связано и со свойством Банаха — Сакса для банаховых пространств. Исследования в этом контексте проведены в [3].

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. В [4] получены результаты о сходимости средних арифметических

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки (госконтракт № 02.740.11.0193).

измеримых операторов в рамках теории некоммутативного интегрирования Сигала [5]. Закон больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных операторов из $L_1(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ установлен в теореме 5.4 из [6].

В данной работе доказано, что каждая порядково ограниченная последовательность τ-компактных операторов обладает подпоследовательностью, средние арифметические которой сходятся по мере τ. Получен некоммутативный аналог леммы Пратта для пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$. Результаты являются новыми даже для алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$. Получены приложения основного результата к пространствам $L_p(\mathcal{M},\tau)$, $0 < p \le 1$, и приведены примеры, показывающие необходимость перехода к средним арифметическим и существенность τ-компактности мажорирующего оператора. Часть результатов (без доказательств) анонсирована в кратком сообщении [7].

§ 1. Определения и обозначения

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов алгебры $\mathcal{M}$, I — единица алгебры $\mathcal{M}$ и $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\|\cdot\|$ — C^*-норма в $\mathcal{M}$.

Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^{\perp}) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций.

Пусть $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через $\mathcal{L}^{+}$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^{+}$, будем обозначать через $\le$; запись $X_n \downarrow X$ означает, что $X_n \le X_m$ при $m \le n$ и $X = \inf\limits_{n} X_n$.

В $*$-алгебре $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере (см. [8, 9]), фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon,\delta} = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \exists P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\ (\|XP\| \le \varepsilon,\ \tau(P^{\perp}) \le \delta)\}, \quad \varepsilon > 0,\ \delta > 0.$$

Известно, что $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй, причем $\mathcal{M}$ плотно в $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$. Для обозначения сходимости последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ к $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ в топологии t_τ используется запись $X_n \xrightarrow{\tau} X$; при этом, говорят, что $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к X по мере τ*.

Через $\mu_t(X)$ обозначим *невозрастающую перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т. е. функцию $\mu(X)\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P^{\perp}) \le t\}, \quad t > 0.$$

Топология t_τ определяется F-нормой

$$\rho_\tau(X) = \inf_{t>0} \max\{t, \mu_t(X)\}, \quad X \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Множество τ-компактных операторов

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \lim_{t\to\infty} \mu_t(X) = 0\}$$

является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$. Пусть m — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < \infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$, может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F-нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на $\mathcal{M} \cap L_1(\mathcal{M}, \tau)$, а затем и на все $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ обозначаем той же буквой τ.

Банахово пространство $\mathcal{E}$ *обладает свойством Банаха — Сакса* (см., например, [10]), если из любой ограниченной последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{E}$ можно выделить подпоследовательность $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, средние арифметические $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} X_{n_i}$ которой сходятся по норме.

Каждое равномерно выпуклое банахово пространство обладает свойством Банаха — Сакса [11]. При $1 < p < \infty$ пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ равномерно выпукло [12]. Непрерывность операторных функций в $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ исследована в [13–15].

Замечание 1.1. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$. При этом $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ есть идеал компактных операторов в $\mathcal{H}$ и

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s-чисел оператора X, т. е. собственных чисел оператора $|X|$, взятых в порядке их убывания с учетом кратности, χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Имеем $L_p(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathrm{tr}) = \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ — идеал Шаттена — фон Неймана, $0 < p < \infty$.

Если $\mathcal{M}$ абелева, то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\tau(f) = \int\limits_\Omega f\,d\nu$, где (Ω, Σ, ν) — локализуемое пространство с мерой, алгебра $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, ν), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология t_τ является обычной топологией сходимости по мере. Перестановка $\mu_t(f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$.

Если $\tau(I) < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из всех замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$, присоединенных к $\mathcal{M}$. При этом топология t_τ не зависит от конкретного выбора такого следа и минимальна среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ [16].

§ 2. Мажорируемая сходимость по мере τ

Лемма 2.1. *Пусть $X_k \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\lambda_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \leq 1$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |X_k|^2. \tag{1}$$

Если $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $|X_k|^2 \leq Y$ ($k = \overline{1,n}$), то

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right| \leq \sqrt{Y}. \tag{2}$$

Доказательство. Для $n = 1$ неравенство (1) очевидно. Из неравенства $(X_1-X_2)^*(X_1-X_2) \ge 0$ получаем $X_1^*X_2+X_2X_1^* \le X_1^*X_1+X_2^*X_2$. Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned}|\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2|^2 &= \lambda_1^2 X_1^* X_1 + \lambda_1\lambda_2(X_1^*X_2 + X_2^*X_1) + \lambda_2^2 X_2^* X_2\\ &\le (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1 X_1^*X_1 + \lambda_2 X_2^* X_2) \le \lambda_1|X_1|^2 + \lambda_2|X_2|^2.\end{aligned}$$

Пусть неравенство (1) выполнено для всех $X_k \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и чисел $\lambda_k > 0$, $k = \overline{1, n-1}$, с $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_k \le 1$. Положим

$$t_k = \frac{\lambda_k}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\lambda_k}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n-1} t_k = 1$ и по предположению индукции

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} t_k X_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n-1} t_k |X_k|^2. \tag{3}$$

В силу установленного для случая $n = 2$ неравенства (1) и (3) имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\right|^2 = \left|\left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k X_k\right) + \lambda_n X_n\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k|X_k|^2\right) + \lambda_n|X_n|^2 \le \sum_{k=1}^{n}\lambda_k|X_k|^2.$$

Поскольку функция $t \mapsto \sqrt{t}$ $(0 \le t < \infty)$ операторно монотонна, из (1) вытекает

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|X_k|^2\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Далее, если $|X_k|^2 \le Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ $(k = \overline{1, n})$, то, еще раз воспользовавшись операторной монотонностью функции $t \mapsto \sqrt{t}$ $(0 \le t < \infty)$, из (4) получаем (2). $\square$

В частности, в силу леммы 2.1 имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k|^2 \ge \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right|^2.$$

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и $X_n, X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, $X \ge 0$ с $|X_n|^2 \le X$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда существует подпоследовательность $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, средние арифметические*

$$\widetilde{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_{n_i} \tag{5}$$

которой t_τ-сходятся к некоторому оператору $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ с $|\widetilde{X}|^2 \le X$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано, $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — спектральный проектор оператора X такой, что $\tau(P) < \infty$ и $\|XP^\perp\| \le \varepsilon^2$. Положим $Y_n \equiv X_n(I+X)^{-1/2}P$, тогда

$$\begin{aligned}|Y_n|^2 &= P(I+X)^{-1/2}X_n^*X_n(I+X)^{-1/2}P\\ &\le P(I+X)^{-1/2}X(I+X)^{-1/2}P \le PIP = P, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Для ограниченной в гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{M},\tau)$ последовательности $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ в силу свойства Банаха — Сакса существуют оператор $Y \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и подпоследовательность $\{Y_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_{n_i} \equiv \widetilde{Y}_k \to Y \quad \text{при } k\to\infty \text{ в } L_2(\mathcal{M},\tau).$$

Непрерывность естественного вложения пространства $L_2(\mathcal{M},\tau)$ в $(\widetilde{\mathcal{M}}_0, t_\tau)$ (см., например, [17, теорема 3.2] или [16, теорема 1]) дает $\widetilde{Y}_k \xrightarrow{\tau} Y$ $(k\to\infty)$. Поэтому $\widetilde{Y}_k(I+X)^{1/2} \xrightarrow{\tau} Y(I+X)^{1/2}$ $(k\to\infty)$ в силу t_τ-непрерывности операции умножения в $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Мы уже показали, что $\widetilde{X}_kP \xrightarrow{\tau} Y(I+X)^{1/2}$ при $k\to\infty$, тем самым последовательность $\{\widetilde{X}_kP\}_{k=1}^{\infty}$ t_τ-фундаментальна:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N=N(\varepsilon)\,\forall k,m\geq N \quad (\widetilde{X}_kP-\widetilde{X}_mP\in U_{\varepsilon,\varepsilon}). \tag{6}$$

Так как согласно лемме 2.1

$$|\widetilde{X}_k|^2 \leq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}|X_{n_i}|^2 \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X = X, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

имеем

$$|\widetilde{X}_kP^{\perp}|^2 = P^{\perp}|\widetilde{X}_k|^2P^{\perp} \leq P^{\perp}XP^{\perp} \leq \varepsilon^2 P^{\perp}$$

и операторная монотонность функции $\lambda\mapsto\sqrt{\lambda}$ $(\lambda\geq 0)$ дает $|\widetilde{X}_kP^{\perp}|\leq\varepsilon P^{\perp}$, $k\in\mathbb{N}$. Следовательно, $\widetilde{X}_kP^{\perp}\in U_{\varepsilon,\varepsilon}$, $k\in\mathbb{N}$. Поскольку

$$U_{a,b}+U_{c,d}\subset U_{a+c,b+d} \tag{8}$$

для всех $a,b,c,d>0$ (см. [8,9]), имеем

$$\forall k,m\in\mathbb{N} \quad (\widetilde{X}_kP^{\perp}-\widetilde{X}_mP^{\perp}\in U_{2\varepsilon,2\varepsilon}). \tag{9}$$

Из (6), (9) с учетом (8) получаем

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N=N(\varepsilon)\,\forall k,m\geq N \quad (\widetilde{X}_k-\widetilde{X}_m\in U_{3\varepsilon,3\varepsilon}),$$

т. е. последовательность $\{\widetilde{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ t_τ-фундаментальна. В силу t_τ-замкнутости идеала $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ она t_τ-сходится к некоторому оператору $\widetilde{X}\in\widetilde{\mathcal{M}}_0$. Имеем $\widetilde{X}_k^* \xrightarrow{\tau} \widetilde{X}^*$ $(k\to\infty)$ в силу t_τ-непрерывности инволюции в $\widetilde{\mathcal{M}}$. Поскольку произведение операторов t_τ-непрерывно на $\widetilde{\mathcal{M}}\times\widetilde{\mathcal{M}}$, получаем $|\widetilde{X}_k|^2=\widetilde{X}_k^*\widetilde{X}_k \xrightarrow{\tau} \widetilde{X}^*\widetilde{X}=|\widetilde{X}|^2$ при $k\to\infty$.

Так как $X-|\widetilde{X}_k|^2 \xrightarrow{\tau} X-|\widetilde{X}|^2$ при $k\to\infty$, неравенство $|\widetilde{X}|^2\leq X$ следует из t_τ-замкнутости конуса $\widetilde{\mathcal{M}}^+$. □

Интересный случай совпадения t_τ с сильной операторной топологией на ограниченных частях $\mathcal{M}$ при $\tau(I)<\infty$ исследован в лемме 3.1 из [18], в условиях которой из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.3. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ и $X_n, X\in\mathcal{M}\cap\widetilde{\mathcal{M}}_0$, $X\geq 0$ с $|X_n|^2\leq X$ $(n\in\mathbb{N})$. Тогда существует подпоследовательность $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, средние арифметические* (5) *которой сходятся в сильной операторной топологии к некоторому оператору* $\widetilde{X} \in \mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{M}}_0$ *с* $|\widetilde{X}|^2 \leq X$.

Замечание 2.4. Пусть $\mathcal{E}$ — симметричное пространство на $(\mathbb{R}^+, m)$ со свойством Фату,

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(X) \in \mathcal{E}\}, \quad \|X\|_{\mathcal{E}(\mathcal{M},\tau)} := \|\mu(X)\|_{\mathcal{E}}.$$

В [19, теорема 2.8] доказано, что для всякой последовательности $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}(\mathcal{M}, \tau)$ с $\sup \|Y_n\|_{\mathcal{E}(\mathcal{M},\tau)} < \infty$ существуют $Y \in \mathcal{E}(\mathcal{M}, \tau)$ и подпоследовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что для каждой последующей подпоследовательности $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ средние арифметические (5) t_τ-сходятся к Y.

Этот замечательный глубокий результат не перекрывает нашу теорему 2.2: если $\tau(I) < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \widetilde{\mathcal{M}}$, а $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \tau) \subseteq L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Пусть $\mathcal{M} = L_\infty([0,1], m)$; рассмотрим функцию

$$X(t) = \begin{cases} t^{-2}, & \text{если } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

и последовательность $X_n = \frac{n}{n+1} X^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$. В этой ситуации применима теорема 2.2, но теорема 2.8 из [19] не работает.

В условиях следствия 2.3 предполагается, что из $\tau(I) < \infty$ вытекает включение $\mathcal{M} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Условия следствия 2.3 можно переписать в виде $X_n, X \in \mathcal{M} \subseteq L_1(\mathcal{M}, \tau)$, поэтому утверждение следствия 2.3 получается также из теоремы 2.8 в [19] и леммы 3.1 в [18].

Далее нам понадобится

Предложение 2.5 [20, теорема 3.6]. *Пусть* $T_n, T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ $(n \in \mathbb{N})$ *и* $T_n \xrightarrow{\tau} T$, *пусть также* $0 < p < \infty$, $S_n, S \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ $(n \in \mathbb{N})$ *и выполнены условия:*

(i) $\mu_t(T_n) \leq \mu_t(S_n)$ (*оно выполнено, если* $|T_n| \leq |S_n|$);

(ii) $\|S\|_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\|_p$;

(iii) $\mu_t(S) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_t(S_n)$ (*оно выполнено, если* $S_n \xrightarrow{\tau} S$).

Тогда $T_n, T \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\|_p = 0$.

Если $p = 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(T_n) = \tau(T)$.

Следствие 2.6. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом* τ *и* $X_n, X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $X \geq 0$ *с* $|X_n|^2 \leq X^2$ $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, *средние арифметические* (5) *которой сходятся в* $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ *к некоторому оператору* $\widetilde{X}$ *с* $|\widetilde{X}|^2 \leq X^2$.

Доказательство. При $1 < p < \infty$ утверждение следствия вытекает из свойства Банаха — Сакса для $L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Пусть $0 < p \leq 1$. Из теоремы 2.2 следует, что существует подпоследовательность $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, средние арифметические (5) которой удовлетворяют условию $|\widetilde{X}_n|^2 \leq X^2$ $(n \in \mathbb{N})$ (см. (7)) и t_τ-сходятся к некоторому оператору $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ с $|\widetilde{X}|^2 \leq X^2$. Поэтому $|\widetilde{X}_n| \leq X$ $(n \in \mathbb{N})$ и $|\widetilde{X}| \leq X$ в силу операторной монотонности функции $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ $(\lambda \geq 0)$ и $\widetilde{X} \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Остается применить предложение 2.5 с $T_n = \widetilde{X}_n$ и $S_n = X$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Заметим, что следствие 2.6 при $0 < p \leq 1$ совпадает с теоремой 2.3 в [4], приведенное здесь доказательство является новым.

Предложение 2.7. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и $X_n, X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^h$, $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ и*

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n \leq \dots \leq X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда существует такой $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^h$, что $X_n \xrightarrow{\tau} Y$ и $Y_n \xrightarrow{\tau} Y$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что

$$X \geq X_n \geq Y_n = Y_{n-1} + \frac{1}{n^2 - n}\sum_{k=1}^{n-1}(X_n - X_k) \geq Y_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $X_1 \geq 0$ (в противном случае положим $\widetilde{X_n} = X_n + |X_1|$; тогда $\widetilde{Y_n} = Y_n + |X_1|$, $n \in \mathbb{N}$). Имеем

$$Y_{n^2} \geq \frac{X_{n+1} + \dots + X_{n^2}}{n^2} \geq \frac{n^2 - n}{n^2} X_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из предложения 1.1 в [21] следует, что существует точная верхняя грань $Y = \sup\limits_n X_n = \sup\limits_n Y_n \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$. Поскольку $0 \leq Y \leq X$, найдется оператор $Z \in \mathcal{M}$ такой, что $\|Z\| \leq 1$ и $Y = ZXZ^*$ (см. [22, предложение на с. 261]). Так как $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ — идеал в $\widetilde{\mathcal{M}}$, имеем $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+$. Следовательно, $Y - X_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+$ и $Y - X_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$, поэтому $Y - X_n \xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$ в силу леммы 3.14 из [23]. Аналогично $Y_n \xrightarrow{\tau} Y$ при $n \to \infty$.

Условия монотонности и ограниченности последовательности $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ существенны (см. пример 3.4(б) ниже). $\square$

Замечание 2.8. Пусть $\mathcal{E}$ — F-нормированное пространство и $X_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$. Для $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ имеем

$$\frac{1}{n}X_n = Y_n - \frac{n-1}{n}Y_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Если $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $\mathcal{E}$, то $\frac{1}{n}X_n \to 0$ в $\mathcal{E}$ при $n \to \infty$.

§ 3. Примеры

3.1. (а) Условие $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ существенно в теореме 2.2. Пусть $\Omega = (0, \infty)$, m — мера Лебега на Ω и алгебра фон Неймана $\mathcal{M} = \widehat{L}_\infty(\Omega, m)$ действует (мультипликаторами) в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, m)$. Положим $X = \chi_\Omega$, $X_n = \chi_{(0,\,n]}$, тогда $X_n \leq X$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $X_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ $(n \in \mathbb{N})$, но $X \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Пусть $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ — произвольная подпоследовательность в $\mathbb{N}$. Тогда $n_k \geq k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\widetilde{X}_k = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} X_{n_i}$, $Z_k = \widetilde{X}_{2k} - \widetilde{X}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\widetilde{X}_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \omega < n_1, \\ 1 - \frac{m}{k}, & \text{если } n_m < \omega \leq n_{m+1},\ m = \overline{1, k-1}, \\ 0, & \text{если } \omega > n_k; \end{cases}$$

$$Z_k(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \omega < n_1 \text{ или } \omega > n_{2k}, \\ \frac{m}{2k}, & \text{если } n_m < \omega \leq n_{m+1},\ m = \overline{1, k-1}, \\ 1 - \frac{m}{2k}, & \text{если } n_m < \omega \leq n_{m+1},\ m = \overline{k, 2k-1}. \end{cases}$$

Значит, $Z_k(\omega) = 1/2$, если $n_k < \omega \le n_{k+1}$, поэтому последовательность $\{\widetilde{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ не фундаментальна по мере m.

(б) Условие $|X_n|^2 \le X$ $(n \in \mathbb{N})$ в теореме 2.2 нельзя ослабить до условия $\mu(X_n)^2 \le \mu(X)$ $(n \in \mathbb{N})$. Рассмотрим в рамках примера (а) последовательность

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \omega \le n-1 \text{ или } \omega > n, \\ (\omega - n + 1)^{-1}, & \text{если } n-1 < \omega \le n. \end{cases}$$

Тогда $X_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\mu(X_n) = X_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку носители функций X_n попарно дизъюнктны, переход к подпоследовательности ничего не меняет. Для $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ имеем $m\{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \ge 1\} = 1$. Так как $|Y_{2n} - Y_n| = Y_{2n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не фундаментальна по мере m.

3.2. Примеры, в которых переход к средним арифметическим в теореме 2.2 необходим.

(а) Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Рассмотрим в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ последовательность частичных изометрий $A_n = \langle\cdot,\xi_1\rangle\xi_n$, тогда $A_n^* = \langle\cdot,\xi_n\rangle\xi_1$, $A_nA_n^* = \langle\cdot,\xi_n\rangle\xi_n = P_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $A_n^*A_n = P_1$, то

$$|A_n| = P_1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей:

$$\|A_n - A_k\| = \sup_{\|\eta\|_{\mathcal{H}} \le 1} \|\langle\eta,\xi_1\rangle\xi_n - \langle\eta,\xi_1\rangle\xi_k\|_{\mathcal{H}} = \|\xi_n - \xi_k\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{2}, \quad n \ne k.$$

Имеем $\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right\| = n^{-1/2} \to 0$ при $n \to \infty$.

(б) В алгебре $\mathcal{M} = L_\infty([0,1],m)$ (m — мера Лебега на $[0,1]$) рассмотрим последовательность функций Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi t$, $0 \le t \le 1$. Очевидно, что $|r_n(t)| \le 1$, $0 \le t \le 1$.

Последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет сходящихся по мере m подпоследовательностей:

$$m\{t \in [0,1] : |r_n(t) - r_k(t)| \ge 1\} = m\{t \in [0,1] : r_n(t) \ne r_k(t)\} = \frac{1}{2}, \quad n \ne k.$$

Переход к подпоследовательности в теореме 2.2 здесь не является необходимым: согласно неравенству Хинчина [24] если $0 < p < \infty$ и $S_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k r_k(t)$ — полином по системе Радемахера с вещественными коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n$, то

$$\int\limits_0^1 |S_n(t)|^p\,dt \le \left(\frac{p}{2} + 1\right)^{p/2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{p/2}$$

и для $a_k = 1/n$ имеем $S_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} r_k(t)$ и $S_n \to 0$ при $n \to \infty$ в $L_p([0,1],m)$.

3.3. Примеры, в которых переход к средним арифметическим в теореме 2.2 не является необходимым.

(а) Пусть $\mathcal{M} = l_\infty$, $\tau(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ для $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}^+$. Тогда $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = c_0$ — пространство комплексных последовательностей, сходящихся к нулю.

Хорошо известно, что если $X_n, X \in c_0$ и $|X_n| \leq X$ $(n \in \mathbb{N})$, то существуют подпоследовательность $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ и $Y \in c_0$ такие, что $X_{n_i} \to Y$ в $\mathcal{M}$.

(б) Пусть l_p $(0 < p < \infty)$ — пространство комплексных последовательностей $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Если $X_n, X \in l_p$ и $|X_n| \leq X$ $(n \in \mathbb{N})$, то существуют подпоследовательность $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ и $Y \in l_p$ такие, что $X_{n_i} \to Y$ в l_p.

Действительно, пространство l_p вложено в c_0, а значит, для последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются условия п. (а) и предложения 2.5 с $T_i = X_{k_{n_i}}$, $T = Y$ и $S_i = S = X$, $i \in \mathbb{N}$.

3.4. (а) Пример сходящейся по мере последовательности, средние арифметические которой не сходятся по мере. В алгебре $\mathcal{M} = L_\infty([0,1], m)$ положим

$$f_1 = f_2 = \chi_{[0,1]}, \quad f_3 = 2\chi_{[0,1/2)}, \quad f_4 = 2\chi_{[1/2,1]},$$

$$f_5 = 2^2\chi_{[0,1/2^2)}, \quad f_6 = 2^2\chi_{[1/2^2,1/2)}, \quad f_7 = 2^2\chi_{[1/2,3/2^2)}, \quad f_8 = 2^2\chi_{[3/2^2,1]},$$

$$f_9 = 2^3\chi_{[0,1/2^3)}, \quad f_{10} = 2^3\chi_{[1/2^3,1/2^2)}, \quad f_{11} = 2^3\chi_{[1/2^2,3/2^3)},$$

$$f_{12} = 2^3\chi_{[3/2^3,1/2)}, \quad f_{13} = 2^3\chi_{[1/2,5/2^3)}, \ldots .$$

Тогда $f_n \to 0$ по мере m, но $g_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ не сходится к нулю по мере m, поскольку $g_{2^n} = \chi_{[0,1]}$ и $g_{2^n+2^{n-1}} = \frac{2}{3}\chi_{[0,1]} + \frac{2}{3}\chi_{[0,1/2)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(б) Пример сходящейся к нулю по мере последовательности, средние арифметические которой сходятся по мере к единице. В алгебре $\mathcal{M} = L_\infty([0,1], m)$ положим

$$f_1 = \chi_{[0,1]}, \quad f_2 = 2\chi_{[0,1/2)}, \quad f_3 = 2\chi_{[1/2,1]}, \quad f_4 = 3\chi_{[0,1/3)}, \quad f_5 = 3\chi_{[1/3,2/3)},$$

$$f_6 = 3\chi_{[2/3,1]}, \quad f_7 = 4\chi_{[0,1/4)}, \quad f_8 = 4\chi_{[1/4,1/2)}, \quad f_9 = 4\chi_{[1/2,3/4)},$$

$$f_{10} = 4\chi_{[3/4,1]}, \quad f_{11} = 5\chi_{[0,1/5)}, \ldots .$$

Тогда $f_n \to 0$ по мере m, но

$$g_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k \to \chi_{[0,1]}$$

равномерно на $[0,1]$: имеем $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2 = k_n$ и $g_{k_n} = \chi_{[0,1]}$; если $k_n < k < k_{n+1}$, то

$$g_k = \frac{k_n}{k}\chi_{[0,1]} + \frac{n+1}{k}\chi_{[0,(k-k_n/(n+1)))}$$

и

$$\frac{k_n}{k_{n+1}} < \frac{k_n}{k} < 1, \quad \frac{n+1}{k} < \frac{2}{n}, \quad \frac{k_n}{k_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$$

при $n \to \infty$.

(в) Сходимость средних арифметических не всегда сохраняется при переходе к подпоследовательностям: в последовательности из примера (б) в качестве искомой подпоследовательности выбираем последовательность из (а) начиная с f_2.

§ 4. Средние арифметические измеримых операторов

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{E}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Алгебраическая сумма отклонений отдельных членов набора $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{E}$ от средней арифметической $A = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - A) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - A) = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0. \quad \square$$

Эта особенность характерна для средней арифметической: последняя является единственным корнем уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - X) = 0.$$

Действительно, имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - nX = 0$, поэтому $X = A$.

Теорема 4.2. *Сумма квадратов модулей отклонений отдельных членов набора $X_1, \dots, X_n \in \widetilde{\mathcal{M}}$ от средней арифметической*

$$A = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

меньше суммы квадратов модулей их отклонений от любого отличного от A оператора $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

Доказательство. Для $S, T \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{h}}$ термин «S меньше T» означает, что $S \leq T$ и $S \neq T$. При любом k справедливо соотношение $X_k - B = (X_k - A) - (A - B)$. Поэтому

$$|X_k - B|^2 = |X_k - A|^2 + |A - B|^2 - (X_k - A)^*(A - B) - (A - B)^*(X_k - A).$$

Суммируя эти равенства по всем k, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |X_k - B|^2 = \sum_{k=1}^{n} |X_k - A|^2 + n|A - B|^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} (X_k - A) \right)^* (A - B) - (A - B)^* \sum_{k=1}^{n} (X_k - A).$$

В силу (10) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |X_k - B|^2 = \sum_{k=1}^{n} |X_k - A|^2 + n|A - B|^2. \quad \square \tag{11}$$

Предложение 4.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — унитарное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ — норма в $\mathcal{K}$ и $X_1,\dots,X_n\in\mathcal{K}$. Тогда*

$$\inf_{B\in\mathcal{K}}\sum_{k=1}^{n}\|X_k-B\|_{\mathcal{K}}^2=\sum_{k=1}^{n}\|X_k-A\|_{\mathcal{K}}^2,\quad\text{где}\quad A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k.$$

Для $\mathcal{K}=L_2(\mathcal{M},\tau)$ это хорошо известное утверждение следует и из (11).

Предложение 4.4. *Если $X\in\widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $n\in\mathbb{N}$, то*

$$\frac{I+X+X^2+\dots+X^{n-1}}{n}\geq X^{(n-1)/2}.$$

Доказательство. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для числа $x>0$ и $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{n}\geq\sqrt[n]{1\cdot x\cdot x^2\cdot\ldots\cdot x^{n-1}}=\sqrt[n]{x^{n(n-1)/2}}=x^{(n-1)/2}$$

и применяем спектральную теорему для самосопряженного оператора X. $\square$

Замечание 4.5. Утверждения леммы 2.1, теоремы 4.2 и предложения 4.4 переносятся с аналогичными доказательствами на *-алгебры $S(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов [22], присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

§ 5. Некоммутативный аналог леммы Пратта

Лемму Пратта для случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ см., например, в [2, с. 227, 228].

Теорема 5.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и $X,Z,X_n,Z_n\in\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{h}}\cap L_1(\mathcal{M},\tau)$, $Y,Y_n\in\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{h}}$ с $X_n\leq Y_n\leq Z_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Пусть*

$$X_n\xrightarrow{\tau}X, Y_n\xrightarrow{\tau}Y, Z_n\xrightarrow{\tau}Z\quad\text{и}\quad\tau(X_n)\to\tau(X),\ \tau(Z_n)\to\tau(Z)\quad\text{при } n\to\infty.$$

Тогда

(i) *$Y,Y_n\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau(Y_n)\to\tau(Y)$ при $n\to\infty$;*

(ii) *если к тому же $X_n\leq 0\leq Z_n$ и $X_n\leq(Y_n)^p\leq Z_n$, где $0<p<\infty$ такое, что определена функция $\mathbb{R}\ni\lambda\mapsto\lambda^p\in\mathbb{R}$, то $Y_n,Y\in L_p(\mathcal{M},\tau)$ и $\|Y_n-Y\|_p\to 0$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. (i) В силу t_τ-замкнутости конуса $\widetilde{\mathcal{M}}^+$ имеем $X\leq Y\leq Z$. Следовательно, $-|X|\leq X\leq Y\leq Z\leq|Z|$ и $-(|X|+|Z|)\leq Y\leq|X|+|Z|$. Существует [25] такой унитарный оператор $V\in\mathcal{M}^h$, что

$$|Y|\leq\frac{|X|+|Z|+V(|X|+|Z|)V}{2}.$$

Поэтому $Y\in L_1(\mathcal{M},\tau)$. (Это следует из хорошо известного факта (см., например, [26, следствие 2]) с $f(t)=\max\{0,t\}$: если $A,B\in\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{h}}$ и $A\leq B$, то $\tau(A^+)\leq\tau(B^+)$. Здесь $A=A^+-A^-$ — разложение Жордана с $A^+,A^-\in\widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $A^+A^-=0$.) Аналогично $Y_n\in L_1(\mathcal{M},\tau)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Воспользуемся некоммутативной леммой Фату [20, теорема 3.5(i)]: *если $T,T_n\in\widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $T_n\xrightarrow{\tau}T$, то $\tau(T)\leq\liminf\limits_{n\to\infty}\tau(T_n)$.* Имеем $Y_n-X_n\xrightarrow{\tau}Y-X(n\to\infty)$ и

$$\tau(Y-X)\leq\liminf_{n\to\infty}\tau(Y_n-X_n)=\liminf_{n\to\infty}\tau(Y_n)-\tau(X),$$

откуда $\tau(Y) \le \liminf_{n\to\infty} \tau(Y_n)$. Поскольку $Z_n - Y_n \xrightarrow{\tau} Z - Y (n \to \infty)$ и

$$\tau(Z - Y) \le \liminf_{n\to\infty} \tau(Z_n - Y_n) = \tau(Z) - \limsup_{n\to\infty} \tau(Y_n),$$

получаем $\tau(Y) \ge \limsup_{n\to\infty} \tau(Y_n)$. Следовательно, $\tau(Y) = \lim_{n\to\infty} \tau(Y_n)$.

(ii) Напомним [20, теорема 3.7], что если $A_n, A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ $(n \in \mathbb{N})$, то

$$\|A_n - A\|_1 \to 0 \Longleftrightarrow A_n \xrightarrow{\tau} A \quad \text{и} \quad \|A_n\|_1 \to \|A\|_1$$

при $n \to \infty$. Имеем

$$\|X\|_1 = -\tau(X), \quad \|Z\|_1 = \tau(Z), \quad \|X_n\|_1 = -\tau(X_n), \quad \|Z_n\|_1 = \tau(Z_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $X_n \to X$ и $Z_n \to Z$ при $n \to \infty$ в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку $-(Z_n - X_n) \le (Y_n)^p \le Z_n - X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $Z_n - X_n \to Z - X$ при $n \to \infty$ в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то выполнено условие (ii) теоремы 3.1 из [27] с $b_n = Z_n - X_n$, $a_n = Y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\sigma = p$. Следовательно, $Y_n, Y \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и $\|Y_n - Y\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Авторы выражают свою признательность О. Е. Тихонову, А. Н. Шерстневу, С. В. Асташкину и Ф. А. Сукочеву за полезные обсуждения. Авторы благодарят рецензента за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dugue D.* Traité de statistique théorique et appliquée. Paris: Masson et Cie., 1958.
2. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
3. *Mamporia B., Shangua A., Tarieladze V.* Permutations and convergence in probability // Bull. Georgian Acad. Sci. 2005. V. 172, N 1. P. 23–25.
4. *Бикчентаев А. М.* К геометрии некоммутативных пространств L_p $(0 < p \le 1)$ // Функциональный анализ: Межвуз. сб. науч. тр. Ульяновск: УлГПИ, 1990. № 31. С. 29–34.
5. *Segal I. E.* A noncommutative extension of abstract integration // Ann. Math. 1953. V. 57, N 3. P. 401–457.
6. *Batty C. J. K.* The strong law of large numbers for states and traces of a W^*-algebra // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 1979. Bd 48, Heft 2. S. 177–191.
7. *Бикчентаев А. М., Сабирова А. А.* Мажорируемая сходимость по мере измеримых операторов и свойство Банаха — Сакса // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 1. С. 78–79.
8. *Nelson E.* Notes on non-commutative integration // J. Funct. Anal. 1974. V. 15, N 2. P. 103–116.
9. *Terp M.* L^p-spaces associated with von Neumann algebras. Copenhagen: Copenhagen Univ., 1981.
10. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. Киев: Вища школа, 1980.
11. *Kakutani S.* Weak convergence in uniformly convex spaces // Tôhoku Math. J. 1938. V. 45. P. 188–193.
12. *Kosaki H.* Application of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: Non-commutative L^p-spaces // J. Funct. Anal. 1984. V. 56, N 1. P. 29–78.
13. *Padmanabhan A. R.* Probabilistic aspects of von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1979. V. 31, N 2. P. 139–149.
14. *Тихонов О. Е.* Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана // Изв. вузов. Математика. 1987. N 1. P. 77–79.
15. *Dodds P. G., Dodds T. K., de Pagter B., Sukochev F. A.* Lipschitz continuity of the absolute value and Riesz projections in symmetric operator spaces // J. Funct. Anal. 1997. V. 148, N 1. P. 28–69.
16. *Бикчентаев А. М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
17. *Stinespring W. F.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90, N 1. P. 15–56.

18. *Beltiţă D.* Lie theoretic significance of the measure topologies associated with a finite trace // Forum Math. 2010. V. 22, N 2. P. 241–253.

19. *Dodds P. G., Dodds T. K., Sukochev F. A.* Banach–Saks properties in symmetric spaces of measurable operators // Studia Math. 2007. V. 178, N 2. P. 125–166.

20. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.

21. *Dodds P. G., Dodds T. K., de Pagter B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.

22. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. V. 74, N 2. P. 257–268.

23. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 41–54.

24. *Khiintchine A.* Über dyadische Bruche // Math. Z. 1923. Bd 18, Heft 1. S. 109–116.

25. *Бикчентаев А. М.* Об одном неравенстве для эрмитовых операторов // Алгебра и анализ: Материалы конф., посвящ. 100-летию Б. М. Гагаева. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 1997. С. 35–36.

26. *Lieberman A.* Spectral distribution of the sum of self-adjoint operators // Pacific J. Math. 1974. V. 53, N 1. P. 211–216.

27. *Ciach L. J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. Math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.

Статья поступила 25 февраля 2011 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
НИИ математики и механики
Казанского (Приволжского) федерального университета,
ул. Профессора Нужина, 1/37, Казань 420008
`Airat.Bikchentaev@ksu.ru`

Сабирова Альбина Альбертовна
Казанской (Приволжский) федеральный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`fakhra@mail.ru`