Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.53+517.537.7

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РОСТ НА КРИВЫХ РЯДА ДИРИХЛЕ С ПРАВИЛЬНОЙ МАЖОРАНТОЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

Н. Н. Аиткужина

Аннотация. Изучаются классы целых рядов Дирихле, определяемые выпуклыми мажорантами роста. Получены точные оценки роста и убывания функций из заданного класса.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимальный член, выпуклая мажоранта роста.

Введение. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < \infty. \tag{1}$$

Тогда

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \tag{2}$$

— целая функция экспоненциального типа не выше πD^*, где D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ:

$$D^* = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{N(t)}{t}, \quad N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\, dx, \quad n(t) = \sum_{\lambda_j \le t} 1.$$

Всюду $D^* \le D \le eD^*$ [1].

Обозначим через $D(\Lambda)$ класс всех целых функций F, представимых абсолютно сходящимися во всей комплексной плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it). \tag{3}$$

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ положительных функций. Пусть Φ — выпуклая функция из L,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M(\sigma) \le \Phi(m\sigma)\} \quad (m \ge 1),$$

где $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Положим $D(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3081–2008.1).

Вместе с рядом (3) введем в рассмотрение следующий ряд:

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \tag{4}$$

Так как Q — целая функция экспоненциального типа, ряд (4) абсолютно сходится во всей плоскости, а его сумма F^* — целая функция.

Предположим, что введенная выше функция Φ такова, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty, \tag{5}$$

где φ — функция, обратная к Φ. Введем в рассмотрение класс функций

$$W(\varphi) = \left\{ \omega \in L : \sqrt{x} \le \omega(x),\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int_1^x \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt = 0 \right\}.$$

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых γ, уходящих в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \to \infty$, то $\operatorname{Re} s \to +\infty$. Для любых $F \in D(\Lambda)$ и $\gamma \in \Gamma$ положим

$$d(F;\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\substack{s\in\gamma,\\ s\to\infty}}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M(\operatorname{Re} s)}, \quad d(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma). \tag{6}$$

Пусть $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (3) и (4) соответственно.

В [2] доказана

Теорема A. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие*

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} = 0, \tag{7}$$

то для любой функции $F \in D(\Phi)$ и любого β $(0 < \beta \le \frac{1}{5})$ существует множество E_β нулевой нижней плотности такое, что справедлива оценка

$$\overline{\lim_{\substack{\sigma\in e_\beta,\\ \sigma\to\infty}}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \le 2\beta + (1-2\beta) d(F;\gamma), \tag{8}$$

где $e_\beta = [0,\infty) \setminus E_\beta$, γ — любая кривая из семейства Γ, а $d(F;\gamma)$ — величина, определенная формулой (6).

Пусть $F \in \underline{D}(\Phi)$, где

$$\underline{D}(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m(\Phi),$$

$$\underline{D}_m(\Phi) = \{F \in L : (\exists\{\sigma_n\}) 0 < \{\sigma_n\} \uparrow \infty,\ \ln M(\sigma_n) \le \Phi(m\sigma_n)\} \quad (m \ge 1).$$

Нетрудно видеть, что эти два класса ($D(\Phi)$ и $\underline{D}(\Phi)$) в каком-то смысле «двойственные», как, например, функции конечного R-порядка и конечного нижнего R-порядка. В связи с этим возникает естественный вопрос: как сохранить справедливость утверждения теоремы A для класса $\underline{D}(\Phi)$? Иными словами, необходимо найти новое условие на последовательность Λ, аналогичное условию (7), при котором оценка (8) была бы верна для любой функции F из класса $\underline{D}(\Phi)$. В данной статье дается ответ на этот вопрос (теорема 1). Как следствие доказана теорема 2, где указаны необходимые и достаточные условия, при которых $d(F) = 1$ для любой функции F из $\underline{D}(\Phi)$.

Основные результаты. Справедлива

Теорема 1. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{\lambda_n\le x}\frac{1}{\lambda_n}=0, \tag{9}$$

то для любой функции $F\in\underline{D}(\Phi)$ и любого β $(0<\beta\le\frac{1}{5})$ существует множество E_β нулевой нижней плотности такое, что справедлива оценка (8).

Для доказательства теоремы 1 понадобятся следующие утверждения.

Теорема B [3]. *Пусть $\Phi\in L$ и для функции φ, обратной к Φ, выполняется условие* (5). *Пусть $u(\sigma)$ — неубывающая положительная непрерывная на $[0,\infty)$ функция, причем*

$$\lim_{\sigma\to\infty}u(\sigma)=\infty,\quad \varliminf_{\sigma\to\infty}\frac{u(\sigma)}{\ln\Phi(\sigma)}<\infty.$$

Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, выбранная так, что

$$u(x_n)\le C\ln\Phi(x_n)\quad(0<C<\infty).$$

Предположим, что функция w принадлежит классу $W(\varphi)$. Если $v=v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w(v)=e^{u(\sigma)},$$

то при $\sigma\to\infty$ вне некоторого множества $E\subset[0,\infty)$,

$$\operatorname{mes}(E\cap[0,x_n])\le o(\varphi(v(x_n)))+4\int\limits_{v(x_1)}^{v(x_n)}\frac{w^*(t)}{t^2}\,dt=o(\varphi(v(x_n)))\quad(x_n\to\infty),$$

имеет место оценка

$$u\left(\sigma+\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right)<u(\sigma)+o(1).$$

Здесь w^* — некоторая функция из класса $W(\varphi)$, имеющая вид $w^*(t)=\beta(t)w(t)$ $(\beta\in L)$.

Теорема C [4]. *Пусть $F\in\underline{D}(\Phi)$, где $\Phi\in L$. Тогда существуют последовательность $\sigma_j\uparrow\infty$ и $m\ge1$ такие, что при $\sigma=\sigma_j$*

$$\ln\mu(\sigma)\le\Phi(m\sigma),\quad \ln\mu_b^*(\sigma)\le\Phi(m\sigma),$$

где $\mu(\sigma)$, $\mu_b^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (3) *и* (4) *соответственно.*

Теорема D [5]. *Пусть γ — кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\{z:|z-z_0|=R\}$ и состоящая из конечного числа кусочно гладких жордановых кривых, а $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $D(z_0;R)=\{z:|z-z_0|<R\}$ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}(z_0;R)$. Пусть*

$$M=\max_{\overline{D}(z_0;R)}|g(t)|,\quad m=\max_{\gamma}|g(t)|.$$

Тогда при $0<\beta\le\frac{1}{5}$ для всех z из круга $\overline{D}(z_0;\beta R)$ верна оценка

$$|g(z)|\le m^{1-2\beta}M^{2\beta}. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность. Стало быть,

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{n(x)}{x} < \infty, \quad \varlimsup_{x\to\infty} \frac{N(x)}{x} < \infty.$$

Проверяется, что

$$\sup_{x>0} \left| \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} - \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2} \right| = a < \infty.$$

Отсюда с учетом (9) получаем, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_0^x \frac{N(t)}{t^2}\, dt = 0.$$

Положим $\omega(t) = \max(\sqrt{t}, N(et))$. Ясно, что $\omega \in W(\varphi)$. Тогда существует функция $\omega^* \in W(\varphi)$ такая, что $\omega^*(x) = \beta(x)\omega(x)$ $(\beta \in L)$.

Пусть $v = v(\sigma)$, $p = p(\sigma)$ — решения уравнений

$$\omega_1(v) = 3\ln\mu(\sigma), \quad \omega_1(p) = 2\ln\mu^*(\sigma), \tag{11}$$

где $\omega_1(v) = \sqrt{\beta(x)}\omega(x)$. Положим

$$R_v = \sum_{\lambda_j > v} |a_j| e^{\lambda_j \sigma}, \quad h = \frac{\omega_1(v)}{v} \quad (v = v(\sigma)).$$

Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $C = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$, поэтому верна оценка (см., например, [5])

$$R_v \le C\mu(\sigma + h)\exp[-(1 + o(1))\omega_1(v)]. \tag{12}$$

Рассмотрим функции $u(\sigma) = \ln 3 + \ln\ln\mu(\sigma)$, $u^*(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln\mu^*(\sigma)$. Поскольку $F \in \underline{D}(\Phi)$, согласно теореме C найдется последовательность $\{\tau_j\}$ $(0 < \tau_j \uparrow \infty)$ такая, что

$$u(\sigma) \le \ln\Phi(m\sigma), \quad u^*(\sigma) \le \ln\Phi(m\sigma), \quad \sigma = \tau_j \quad (m \ge 1).$$

С учетом (11) при $\sigma = \tau_j$ $(j \ge 1)$ имеем

$$\ln w_1(v(\sigma)) = u(\sigma) \le \ln\Phi(m\sigma), \quad \ln w_1(p(\sigma)) = u^*(\sigma) \le \ln\Phi(m\sigma) \quad (m \ge 1).$$

Значит,

$$\frac{1}{\sigma} \le \frac{m}{\varphi(\omega_1(v(\sigma)))}, \quad \frac{1}{\sigma} \le \frac{m}{\varphi(\omega_1(p(\sigma)))}, \quad \sigma = \tau_j \quad (m \ge 1). \tag{13}$$

Учитывая условие (5) и то, что $\sqrt{x} \le \omega_1(x)$, имеем

$$\varphi(x) \le C_1\varphi(\omega_1(x)), \quad x \ge x_0 \quad (0 < C_1 < \infty). \tag{14}$$

В итоге из (13) и (14) получим оценки

$$\frac{1}{\sigma} \le \frac{C_2}{\varphi(v(\sigma))}, \quad \frac{1}{\sigma} \le \frac{C_2}{\varphi(p(\sigma))}, \quad \sigma = \tau_j \quad (0 < C_2 < \infty). \tag{15}$$

Далее, поскольку $\omega^* \in W(\varphi)$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\omega^*(x)}{x\varphi(x)} = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_1^x \frac{\omega^*(t)}{t^2}\, dt = 0. \tag{17}$$

Очевидно, при замене условия $u(\sigma) \le C \ln \Phi(\sigma)$ при $\sigma = \tau_j$ на $u(\sigma) \le \ln \Phi(m\sigma)$ при $\sigma = \tau_j$ $(j \ge 1,\ m \ge 1)$ заключение теоремы B останется тем же, если остальные условия оставить без изменений. Поэтому, применяя теорему B для функций u и w_1 и учитывая при этом (15)–(17), вне некоторого множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$

$$\operatorname{mes}(E'_\beta \cap [0, \tau_j]) \le o(\varphi(v(\tau_j))) + 4 \int\limits_{v(\tau_1)}^{v(\tau_j)} \frac{\omega^*(t)}{t^2}\, dt = o(\tau_j) \quad (\tau_j \to \infty), \tag{18}$$

при $\sigma \to \infty$ получаем, что

$$\mu(\sigma + (\beta^{-1} + 1)h(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1+o(1)} \quad (0 < \beta \le 1). \tag{19}$$

Следовательно, ввиду (12), (19) при $\sigma \to \infty$ вне $E_\beta^{'}$

$$R_v \le C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp[-\omega_1(v)(1 + o(1))] = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{20}$$

Пусть

$$P_a(s) = \sum_{\lambda_n \le a} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it).$$

Справедливы следующие формулы А. Ф. Леонтьева для коэффициентов [1]:

$$a_n = e^{-\alpha\lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \varphi_n(t) P_a(t + \alpha)\, dt,$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{q'_a(\lambda_n)} \int\limits_0^\infty \frac{q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t}\, d\lambda, \quad q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \le a} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму q_a, т. е. начало координат. Учитывая (20) и пользуясь данными формулами, легко показать, что при $\sigma \to \infty$ вне E'_β (это делается точно так же, как в [5])

$$|a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \le \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi-\alpha| \le h(\sigma)} |F(\xi)| \quad (n \ge 1). \tag{21}$$

Пусть

$$R_p^* = \sum_{\lambda_n > p} |a_n||Q'(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma} \quad (p = p(\sigma)).$$

Но $u^*(\sigma) \le \Phi(m\sigma)$ при $\sigma = \tau_j$ ($\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше), где $u^*(\sigma) = \ln 2 + \ln \ln \mu^*(\sigma)$. Поэтому, применяя теорему B, из тех же рассуждений, при помощи которых была получена оценка для R_v, получаем, что

$$R_p^* \le C\mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}, \quad C = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n^2},$$

если $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ (E_1 от β не зависит),

$$\operatorname{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j]) \leq o(\varphi(p(\tau_j))) = o(\tau_j) \quad (\tau_j \to \infty). \tag{22}$$

Отсюда следует, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma)$, если $\sigma \geq \sigma_1$, $\sigma \notin E_1$. Здесь $k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (4).

Пусть $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$. Учитывая (13), (18), (22) и то, что $w^* \in W(\varphi)$, при $\tau_j \to \infty$ получаем, что

$$\frac{\operatorname{mes}(E_\beta \cap [0, \tau_j])}{\tau_j} \leq C_2 \left[\frac{\operatorname{mes}(E'_\beta \cap [0, \tau_j])}{\varphi(v(\tau_j))} + \frac{\operatorname{mes}(E_1 \cap [0, \tau_j])}{\varphi(p(\tau_j))} \right] = o(1).$$

Поскольку $R_v \leq 1$, $R^*_p \leq 1$ ($v = v(\sigma)$, $p = p(\sigma)$) при $\sigma \geq \sigma_3$, $\sigma \notin E_\beta$, очевидно,

1) $\lambda_{\nu(\sigma)} \leq v(\sigma)$;

2) $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma)$, где $\nu(\sigma)$, $k(\sigma)$ — центральные индексы рядов (3), (4).

Далее, для $\lambda_n \leq p(\sigma)$

$$|Q'(\lambda_n)| \leq \frac{2}{\lambda_1} \prod_{\lambda_j \leq p(\sigma)} \left| 1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2} \right|.$$

Но при $\lambda_n \leq p(\sigma)$ и $\sigma \to \infty$

$$\ln \prod_{\lambda_j \leq p(\sigma)} \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2} \right) \leq n(p) \frac{\lambda_n}{p} + 2N(p) \leq 3N(ep) = o(\ln \mu^*(\sigma)), \quad p = p(\sigma),$$

так что для $\lambda_n \leq p(\sigma)$ и $\sigma \to \infty$ имеем $|Q'(\lambda_n)| \leq [\mu^*(\sigma)]^{o(1)}$. Следовательно, $\mu^*(\sigma) = |a_k Q'(\lambda_k)| e^{\lambda_k \sigma} \leq \mu(\sigma)[\mu^*(\sigma)]^{o(1)}$, где $p = p(\sigma)$, $k = k(\sigma)$. Значит, $(1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$. Стало быть, $\omega_1(p) = 2 \ln \mu^*(\sigma) < 3 \ln \mu(\sigma) = \omega_1(v)$ ($\sigma \geq \sigma_4$). Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)} \leq p(\sigma) < v(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_4$, $\sigma \notin E_\beta$. С учетом этого из (21) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$

$$\mu^*(\sigma) < 1 + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)|, \tag{23}$$

где $\alpha = \sigma + i\tau$ ($\alpha \in \gamma$).

Дальнейшие рассуждения основаны на теореме D. Пусть $\gamma(\alpha)$ — часть кривой, содержащейся в круге $\overline{D}(\alpha; h\beta^{-1})$ ($0 < \beta \leq \frac{1}{5}$, $h = h(\sigma)$). С помощью теоремы D в [2] показано, что

$$\max_{|\xi - \alpha| \leq h(\sigma)} |F(\xi)| \leq (2|F(z'_\alpha)|)^{1-2\beta} M^{2\beta}(\sigma + \beta^{-1} h(\sigma)), \tag{24}$$

где z'_α — некоторая точка из $\gamma(\alpha)$. Используя теорему B, получим (см. (19))

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) \leq M(\sigma) \leq M(\sigma + \beta^{-1} h(\sigma)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n (\sigma + \beta^{-1} h(\sigma))} \\ \leq \mu(\sigma + (1 + \beta^{-1}) h(\sigma)) \Big[n(v(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-h(\sigma)\lambda_n} \Big] < \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \end{aligned} \tag{25}$$

когда $\sigma \to \infty$ вне E'_β. Следовательно, с учетом оценок (24), (25) из (23) при $\sigma \to \infty$ вне множества $E_\beta = E'_\beta \cup E_1$ нулевой нижней плотности имеем

$$(1 + o(1)) \mu^*(\sigma) \leq 2 |F(z'_\alpha)|^{1-2\beta} \mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta} \quad (z'_\alpha \in \gamma(\alpha)).$$

Следовательно, при $\sigma \to \infty$ вне E_β

$$\frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \le (1 + o(1))2\beta + (1 - 2\beta)\frac{\ln |F(z'_\alpha)|}{\ln \mu(\sigma)} \quad (0 < \beta \le 1/5).$$

Так как $|\operatorname{Re} z'_\alpha - \sigma| \le \beta^{-1}h$, учитывая еще раз оценки (25), отсюда окончательно получаем, что

$$\varlimsup_{\substack{\sigma \in e_\beta,\\ \sigma \to \infty}} \frac{\ln \mu^*(\sigma)}{\ln \mu(\sigma)} \le 2\beta + (1 - 2\beta)d(F;\gamma),$$

где $0 < \beta \le \frac{1}{5}$, $e_\beta = [0, \infty)/E_\beta$.

Теорема 1 полностью доказана.

Будем говорить, что последовательность $\{Q^{'}(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$-*нормальна*, если существует $\theta \in L$ такая, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_1^x \frac{\theta(t)}{t^2}\, dt = 0, \quad -\ln |Q'(\lambda_n)| \le \theta(\lambda_n) \quad (n \ge 1).$$

Теорема 2. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Предположим, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$-нормальна.*

Для того чтобы для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ выполнялось равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (9).

Замечание. Функция $\Phi(\sigma) = \underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma)$ $(k \ge 1)$ удовлетворяет условиям теорем 1, 2. Отметим, что для случая $k = 1$ аналогичные результаты доказаны в [6].

Доказательство теоремы 2. Достаточность следует из теоремы 1 точно так же, как равенство $d(F) = 1$ получается из соответствующей теоремы из [6].

Необходимость. Будем доказывать от противного. Пусть для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ выполняется равенство $d(F) = 1$, но

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} > 0. \tag{26}$$

Рассмотрим функцию

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \lambda_n)^2} \frac{\psi^2(\lambda_n)}{Q'(\lambda_n)} e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it),$$

где

$$\psi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{-\frac{\lambda}{\lambda_n}}, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Поскольку $n(x) = O(x)$ при $x \to \infty$, учитывая (26), как и в [7], убеждаемся в том, что

$$\ln \psi(x) \le -dx\varphi(x) \quad (x > 0), \tag{27}$$

где $0 < d < \infty$.

Покажем, что $F \in \underline{D}(\Phi)$. Сначала оценим $\frac{1}{|Q'(\lambda_n)|}$. Ввиду $W(\varphi)$-нормальности последовательности $\{Q'(\lambda_n)\}$ существует $\theta(x) \in L$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{\theta(t)}{t^2}\,dt = 0, \quad -\ln|Q'\bigl(\lambda_n\bigr)| \le \theta(\lambda_n) \quad (n \ge 1).$$

Отсюда видно, что, в частности,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta\bigl(\frac{x}{2}\bigr)}{\frac{x}{2}\varphi(x)} = 0.$$

С учетом (5) имеем

$$\varphi(x) \le c\varphi(\sqrt{x}) \le c\varphi(x/2) \quad (x \ge 4).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x\varphi(x)} = 0.$$

Поэтому

$$\theta(x) \le \varepsilon(x)x\varphi(x), \quad x \ge x_0, \tag{28}$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Таким образом, учитывая (28), для любого $\delta > 0$ при некотором $C_1 = C_1(\delta)$ $(0 < C_1 < \infty)$ имеем

$$\frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \le e^{\theta(\lambda_n)} \le C_1 e^{\delta\lambda_n\varphi(\lambda_n)} \quad (n \ge 1). \tag{29}$$

Зафиксируем δ, $0 < \delta < 2d$. Тогда из (27), (28) получаем, что

$$M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n)^2} \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \psi^2(\lambda_n) e^{\lambda_n\sigma}$$

$$\le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n)^2} e^{\delta\lambda_n\varphi(\lambda_n)} e^{-2d\lambda_n\varphi(\lambda_n)} e^{\lambda_n\sigma} \le C \max_{t\ge 0} \exp[(\delta - 2d)t\varphi(t) + t\sigma],$$

где $C = C_1C_2$, $C_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n)^2}$. Заметим, что данный максимум достигается в точке $t^* \le \Phi\bigl(\frac{\sigma}{2d-\delta}\bigr)$. Тем самым

$$M(\sigma) \le Ce^{\sigma t^*} \le Ce^{\sigma\Phi(\frac{\sigma}{2d-\delta})}.$$

Но Φ — возрастающая выпуклая функция. Следовательно, $\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \uparrow \infty$ при $\sigma \to \infty$. Значит, $M(\sigma) \le Ce^{\Phi(\sigma)\Phi(\frac{\sigma}{2d-\delta})} \le Ce^{\Phi^2(A\sigma)}$, $0 < A < \infty$. Стало быть, $M(\sigma) \le Ce^{\Phi^2(B\sigma)}$ при некотором $B > A$ и при всех σ. Далее, из (5) следует, что $\Phi^2(\sigma) \le \Phi(T\sigma)$ при $\sigma \ge \sigma_1$ $(0 < T < \infty)$. Учитывая это, окончательно получаем, что $\ln M(\sigma) \le \Phi(k\sigma)$ (σ любое, k — некоторое натуральное число). Это означает, что $F \in D(\Phi)$. Тем более $F \in \underline{D}(\Phi)$.

В [7] показано, что $|F(\sigma)| \le M < \infty$ $(0 \le \sigma < \infty)$. Это означает, что $d(F; [0, \infty)) \le 0$. Тем самым $d(F) \le 0$. Получили противоречие. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \le x} \frac{1}{\lambda_n} = 0.$$

Теорема 2 доказана.

Автор благодарит профессора А. М. Гайсина за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.

2. *Юсупова Н. Н.* Поведение рядов Дирихле заданного роста на кривых // Вестн. УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3. С. 40–45.

3. *Юсупова Н. Н.* Теорема типа Бореля — Неванлинны для функции заданного роста // Матер. XLIV Междунар. науч. студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс». Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006. С. 32.

4. *Юсупова Н. Н.* Устойчивость логарифма максимального члена ряда Дирихле заданного роста // VI Региональная школа-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии: Сб. тр. Математика. Уфа: БашГУ, 2006. Р. 190–202.

5. *Гайсин А. М.* Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 55–82.

6. *Гайсин А. М., Латыпов И. Д.* Асимптотическое поведение суммы ряда Дирихле заданного роста на кривых // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 37–51.

7. *Гайсин А. М.* Об одной гипотезе Полиа // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 2. С. 73–92.

Статья поступила 28 июня 2008 г.

Аиткужина Наркес Нурмухаметовна
Башкирский гос. университет, математический факультет,
ул. Фрунзе, 32, Уфа 450074
`YusupovaN@rambler.ru`