Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 512.542

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ $\mathbb{P}$–СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

А. Ф. Васильев,
Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов

Аннотация. Подгруппа H конечной группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если H либо совпадает с группой G, либо ее можно соединить с группой G цепью подгрупп с простыми индексами. Если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, то G называется w-*сверхразрешимой группой*. Получены свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп и свойства групп, которые являются произведением двух своих $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп, в частности, своих $\mathbb{P}$-субнормальных w-сверхразрешимых подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа, w-сверхразрешимая группа, произведение подгрупп.

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Строение группы, факторизуемой двумя циклическими подгруппами, приведено в [1, гл. 6, § 10]. Продолжая данные исследования, Л. С. Казарин [2] начал изучение строения группы G, представимой в виде $G = X_1X_2\dots X_n$, где X_i — циклическая группа для любого $i = 1, 2, \dots, n$ и $X_i(X_1X_2\dots X_{i-1}) = (X_1X_2\dots X_{i-1})X_i$ для всех $i > 1$. Он нашел все неабелевы композиционные факторы группы G, обладающей рядом подгрупп $1 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = G$, где $|X_i : X_{i-1}|$ — простое число для всех $i = 1, \dots, n$. Отметим, что данная цепь начинается с единичной подгруппы X_0. В связи с этим в [3] введено следующее естественное

Определение 1. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной в* G (обозначается через $H\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G$), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является $\mathbb{P}$-субнормальной. Поскольку строение силовских подгрупп группы G и их вложение в данную группу в значительной мере определяет структуру группы G, естественно в качестве системы подгрупп рассматривать множество всех ее силовских подгрупп. Для изучения данной ситуации в [3] введено

Определение 2. Группа G называется *расширенно сверхразрешимой* (кратко w-*сверхразрешимой*), если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.

Класс w-сверхразрешимых групп обозначается через $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Заметим, что класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп содержится в $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. В [3] приведен пример, показывающий, что обратное включение неверно. Как правило, произведение двух групп из заданного класса не является группой из этого же класса. В частности, хорошо известно, что произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп не всегда является сверхразрешимой группой. Бэр в [4] доказал сверхразрешимость группы G в случае, когда G есть произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и имеет нильпотентный коммутант. В [5, гл. 4, теорема 3.4] показано, что если группа G является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов, то G сверхразрешима. Во многих работах, в частности в [6–10], ослабление понятий нормальности и сверхразрешимости позволило получить некоторые аналогичные результаты. В силу соотношений между классами $\mathfrak{U}$ и w$\mathfrak{U}$ естественно рассмотреть аналогичные факторизационные задачи в более широком классе w$\mathfrak{U}$. Данная работа является продолжением исследований, начатых авторами в [3]. В ней изучаются свойства групп, представимых в виде произведения $\mathbb{P}$-субнормальных w-сверхразрешимых подгрупп. Следствием полученных теорем является ряд хорошо известных результатов о факторизациях сверхразрешимыми подгруппами.

2. Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, при необходимости см. [11, 12]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через $|G|$ обозначается порядок группы G; $\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей порядка группы G; $\mathrm{Core}_G(M)$ — ядро подгруппы M в G, т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G, и $F_p(G)$ — p-нильпотентный радикал группы G, т. е. произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп группы G.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ (p_i — простое число, $i = 1, 2, \dots, n$) называется *дисперсивной по Оре* [11, с. 251], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Используются следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы; 2) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным* экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп $(G \mid G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G))$.

По теореме Гашюца — Любезедер — Шмида формация насыщенна тогда и только тогда, когда она локальна.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G [11, 13], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$

такая, что H_{i-1} максимальна в H_i и $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Отметим следующие свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 2.1 [13, лемма 6.1.7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в K;*

2) *если H_1 и H_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы в G, то $(H_1 \cap H_2)$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G.*

3. Свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп

В данном разделе приведены основные свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 3.1. *Пусть H — подгруппа группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H $\mathbb{P}$-sn G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn N и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N;*

2) *если $N \subseteq H$ и H/N $\mathbb{P}$-sn G/N, то H $\mathbb{P}$-sn G;*

3) *если HN_i $\mathbb{P}$-sn G, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ $\mathbb{P}$-sn G;*

4) *если H $\mathbb{P}$-sn K и K $\mathbb{P}$-sn G, то H $\mathbb{P}$-sn G;*

5) *если H $\mathbb{P}$-sn G, то H^x $\mathbb{P}$-sn G для любого $x \in G$;*

6) *если $G^{\mathfrak{U}} \subseteq H$, то H $\mathbb{P}$-sn G.*

Доказательство. 1. Ввиду $\mathbb{P}$-субнормальности H в G можно считать, что $H \cap N \neq N$ и $HN/N \neq G/N$. В G найдется цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$. Так как $H \cap N \neq N$, то $H_j \cap N \neq H_{j-1} \cap N$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $|H_j \cap N : H_{j-1} \cap N| = |(H_j \cap N)H_{j-1} : H_{j-1}|$. Из $H_{j-1} \subseteq (H_j \cap N)H_{j-1} \subseteq H_j$ и максимальности H_{j-1} в H_j заключаем, что $(H_j \cap N)H_{j-1} = H_j$ и $|H_j \cap N : H_{j-1} \cap N| = |H_j : H_{j-1}|$ — простое число. Отбрасывая из цепи $H \cap N = H_0 \cap N \subseteq H_1 \cap N \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \cap N \subseteq H_n \cap N = N$ повторения, получим для $H \cap N$ в G цепь подгрупп с простыми индексами. Значит, $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn N.

Заметим, что $H_kN/N \neq H_{k-1}N/N$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $|H_kN/N : H_{k-1}N/N| = |H_k : H_{k-1}| : |(H_k \cap N)H_{k-1} : H_{k-1}| \neq 1$. Отсюда и из того, что $H_{k-1} \subseteq (H_k \cap N)H_{k-1} \subseteq H_k$ и $|H_k : H_{k-1}|$ — простое число, следует, что $(H_k \cap N)H_{k-1} = H_{k-1}$ и $|H_kN/N : H_{k-1}N/N|$ — простое число. Отбрасывая из цепи $HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1}N/N \subseteq H_nN/N = G/N$ повторения, получим для HN/N в G/N цепь подгрупп с простыми индексами. Таким образом, HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N.

Утверждение 2 следует из того, что если существует цепь подгрупп $H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \cdots \subset H_{m-1}/N \subset H_m/N = G/N$ с простыми индексами $|H_i/N : H_{i-1}/N|$, $i = 1, \ldots, m$, то $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{m-1} \subset H_m = G$ является цепью подгрупп с $|H_i : H_{i-1}| = |H_i/N : H_{i-1}/N|$.

3. Пусть HN_i $\mathbb{P}$-sn G, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$. Если существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $HN_i = G$, то $HN_{3-i} \cap HN_i = HN_{3-i}$ $\mathbb{P}$-sn G.

Пусть $HN_1 \neq G \neq HN_2$. Так как HN_1 $\mathbb{P}$-sn G, существует цепь подгрупп $HN_1 = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{t-1} \subset K_t = G$ с простыми индексами $|K_j : K_{j-1}|$, $j = 1, \ldots, t$.

Если $HN_1 \cap HN_2 = HN_2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ $\mathbb{P}$-sn G.

Допустим, что $HN_1 \cap HN_2 \neq HN_2$. Тогда найдется такое $j \in \{1, \ldots, t\}$, что $K_j \cap HN_2 \neq K_{j-1} \cap HN_2$. Так как $K_{j-1} \subseteq (K_j \cap HN_2)K_{j-1} \subseteq K_j$ и $(K_j \cap HN_2)K_{j-1} = (K_j \cap N_2)K_{j-1}$ — подгруппа в K_j, то $(K_j \cap HN_2)K_{j-1} = K_j$.

Поэтому $|K_j \cap HN_2 : K_{j-1} \cap HN_2| = |(K_j \cap HN_2)K_{j-1} : K_{j-1}|$ — простое число. Отбрасывая в цепи $HN_1 \cap HN_2 = K_0 \cap HN_2 \subseteq K_1 \cap HN_2 \subseteq \cdots \subseteq K_{t-1} \cap HN_2 \subseteq K_t \cap HN_2 = HN_2$ повторения и учитывая $\mathbb{P}$-субнормальность HN_2 в G, получим для $HN_1 \cap HN_2$ в G цепь подгрупп с простыми индексами. Значит, $HN_1 \cap HN_2$ $\mathbb{P}$-sn G.

Утверждения 4 и 5 прямо следуют из определения $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы, утверждение 6 справедливо ввиду утверждения 2. Лемма доказана.

Из свойств силовских подгрупп и леммы 3.1 получается

Лемма 3.2. *Пусть силовская p-подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой в G и $N \trianglelefteq G$. Тогда силовская p-подгруппа группы N и силовская p-подгруппа группы G/N являются $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами в N и G/N соответственно.*

В [11, замечание, с. 93] отмечено, что если $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$ для максимальной подгруппы M группы G, то $|G : M|$ — простое число. Обратно, если $|G : M| = p$ — простое число и M не покрывает абелев главный фактор H/K группы G, то $|H/K| = p$ и $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$.

Отсюда следует, что всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная в группе G подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. В общем случае обратное не выполняется. Например, в знакопеременной группе степени 5 подгруппа, изоморфная знакопеременной группе степени 4, $\mathbb{P}$-субнормальна, но не $\mathfrak{U}$-субнормальна в группе. Однако для разрешимой группы из определения $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппы и отмеченного замечания из [11] получается

Лемма 3.3. *Пусть G — разрешимая группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{U}$-субнормальной в G тогда и только тогда, когда H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Применение лемм 2.1 и 3.3 дает следующие свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 3.4. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H $\mathbb{P}$-sn G, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)$ $\mathbb{P}$-sn K;*
2) *если H_i $\mathbb{P}$-sn G, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)$ $\mathbb{P}$-sn G.*

Нам потребуются следующие свойства w-сверхразрешимых групп, полученные в [3].

Теорема 3.5 [3, теорема 2.3]. *Любая* w*-сверхразрешимая группа разрешима.*

Теорема 3.6 [3, теорема 2.6]. *Класс* $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ *является наследственной насыщенной формацией.*

Теорема 3.7 [3, предложение 2.8]. *Любая* w*-сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.*

Обозначим через $\mathrm{Syl}(G)$ множество всех силовских подгрупп группы G.

Теорема 3.8 [3, теорема 2.10]. *Формация* $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ *является локальной и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого p.*

Теорема 3.9 [3, теорема 2.11]. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она метанильпотентна и* w*-сверхразрешима.*

4. Произведения $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп

Лемма 4.1. *Пусть группа $G = AB$ — произведение подгрупп A и B. Если существуют цепи подгрупп*

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$$

с простыми индексами $|A_i : A_{i-1}|$, $|B_j : B_{j-1}|$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, то $(A_{i-1} \cap B)$ $\mathbb{P}$-sn A_{i-1} и $(B_{j-1} \cap A)$ $\mathbb{P}$-sn B_{j-1} для любого $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Доказательство. Для тех $k \in \{1, \dots, m\}$, для которых $A_{i-1} \cap B_{k-1} \neq A_{i-1} \cap B_k$, выполняются равенства $|A_{i-1} \cap B_k : A_{i-1} \cap B_{k-1}| = |(A_{i-1} \cap B_k)B_{k-1} : B_{k-1}| = |B_k : B_{k-1}|$. Поэтому, отбросив в цепи подгрупп $A_{i-1} \cap B = A_{i-1} \cap B_0 \subseteq A_{i-1} \cap B_1 \subseteq \dots \subseteq A_{i-1} \cap B_{m-1} \subseteq A_{i-1} \cap B_m = A_{i-1}$ повторения, получаем для $A_{i-1} \cap B$ в A_{i-1}, $i = 1, \dots, n$, цепь подгрупп с простыми индексами. Аналогичные рассуждения проводим для B_{j-1}, $j = 1, \dots, m$. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Пусть группа $G = AB$ — произведение разрешимых подгрупп A и B. Если A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G, то G разрешима.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, A и B — разрешимые подгруппы, A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G, а G не является разрешимой. В G найдутся цепи подгрупп $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G$ и $B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \subset A_m = G$ с простыми индексами $|A_{i+1} : A_i|$, $|B_{j+1} : B_j|$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. По лемме 4.1 $(A_{n-1} \cap B)$ $\mathbb{P}$-sn A_{n-1} и $(B_{m-1} \cap A)$ $\mathbb{P}$-sn B_{m-1}. Тогда $A_{n-1} = A(B \cap A_{n-1})$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных в A_{n-1} разрешимых подгрупп A и $B \cap A_{n-1}$, $B_{m-1} = (B_{m-1} \cap A)B$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных в B_{m-1} разрешимых подгрупп $B_{m-1} \cap A$ и B. Ввиду выбора G подгруппы A_{n-1} и B_{m-1} разрешимы.

Обозначим $M = A_{n-1}$, $W = B_{m-1}$ и $D = M \cap W$. Тогда $G = MW$, $|G : M| = p$, $|G : W| = q$, где p и q — простые числа. Так как $G \notin \mathfrak{S}$, то $D \neq 1$.

Если $\mathrm{Core}_G(M) \neq 1$, то $G/\mathrm{Core}_G(M) \in \mathfrak{S}$ ввиду выбора G. Отсюда получаем, что $G \in \mathfrak{S}$. Это противоречит выбору G. Аналогично приходим к противоречию при $\mathrm{Core}_G(W) \neq 1$.

Значит, $\mathrm{Core}_G(M) = \mathrm{Core}_G(W) = 1$. Тогда, рассматривая представления τ_1 и τ_2 группы G перестановками смежных классов по подгруппам M и W соответственно, получим, что $G/\mathrm{Ker}\,\tau_1 \simeq G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_p на p символах, а $G/\mathrm{Ker}\,\tau_2 \simeq G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_q на q символах. Так как $|S_p| = p!$ и $|S_q| = q!$, то $p = q$ — наибольший делитель $|G|$. Подгруппа D является максимальной в M и W. По лемме 4.7 из [11] $\mathrm{Core}_M(D) \subseteq \mathrm{Core}_G(W) = 1$ и $\mathrm{Core}_W(D) \subseteq \mathrm{Core}_G(M) = 1$.

Поскольку M и W разрешимы, по теореме 15.2 из [12, гл. A] $M = DN_1$ и $W = DN_2$, где N_1 и N_2 — минимальные нормальные подгруппы в M и W соответственно, $N_1 = C_M(N_1)$, $N_2 = C_W(N_2)$, $N_1 \cap D = 1$, $N_2 \cap D = 1$. Отсюда $|N_1| = |N_2| = p$. Тогда из $M/N_1 \simeq D$ и $W/N_2 \simeq D$ следует, что D изоморфна подгруппе из Z_{p-1}. По теореме 1.7 из [5] M и W сверхразрешимы, а значит, дисперсивны по Оре. Поэтому силовская p-подгруппа P_1 из M нормальна в M и силовская p-подгруппа P_2 из W нормальна в W. По лемме 11.6 из [11] силовская p-подгруппа P группы G имеет вид $P = P_1P_2$. Так как $|M| \leq |MP| \leq |G| = |M|p$, то $|P : (P \cap M)| = p$. Аналогично $|P : (P \cap W)| = p$. Отсюда следует, что $P \cap M$ и $P \cap W$ — максимальные подгруппы в P и $P \cap M = P_1 \trianglelefteq P$, $P \cap W = P_2 \trianglelefteq P$. Таким образом, $G = MP \subseteq N_G(P_1)$ и $G = WP \subseteq N_G(P_2)$. Это означает, что $P_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$. Отсюда $P \trianglelefteq G$. Из $G/P \simeq M/M \cap P \in \mathfrak{S}$ следует, что $G \in \mathfrak{S}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Лемма 4.3. *Пусть $G = AB$, где подгруппы A и B дисперсивны по Оре и имеют простые индексы в G. Тогда G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, подгруппы A и B дисперсивны по Оре, $|G : A|$, $|G : B|$ — простые числа, а G не дисперсивна по Оре. По теореме 4.2 группа G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из дисперсивности по Оре групп A и B и выбора группы G следует, что G/N дисперсивна по Оре. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией [11, п. 7, с. 35], то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N = C_G(N)$, $\Phi(G) = 1$.

Если $N \subseteq A \cap B$, то N содержится в силовских p-подгруппах P_1 и P_2 групп A и B соответственно, p — наибольший простой делитель $|A|$ и $|B|$. Тогда $P = P_1P_2$ — силовская p-подгруппа группы G, p — наибольший простой делитель $|G|$. Из $N \subseteq P$ и дисперсивности по Оре G/N получаем, что G дисперсивна по Оре. Это противоречит выбору G.

Пусть $N \not\subseteq A \cap B$. Если $N \not\subseteq A$, то $G = AN$ и $A \cap N = 1$. Тогда $|N|$ является простым числом. Из $N = C_G(N)$ и $A \simeq G/N$ следует, что G — сверхразрешимая группа. Получили противоречие с выбором G. Если $N \not\subseteq B$, то $G = BN$, $B \cap N = 1$ и, рассуждая, как выше, приходим к противоречию с выбором G. Лемма доказана.

Теорема 4.4. *Группа G дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда $G = AB$, где подгруппы A и B дисперсивны по Оре и $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, A и B — дисперсивные по Оре $\mathbb{P}$-субнормальные в G подгруппы, а G не дисперсивна по Оре. Тогда существуют цепи подгрупп $A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = G$, $B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$ такие, что $|A_i : A_{i-1}|$ и $|B_j : B_{j-1}|$ являются простыми числами для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. По лемме 4.1 $(A_{n-1} \cap B)$ $\mathbb{P}$-sn A_{n-1} и $(B_{m-1} \cap A)$ $\mathbb{P}$-sn B_{m-1}.

Так как A_{n-1} и B_{m-1} являются произведениями дисперсивных по Оре подгрупп $A, (A_{n-1} \cap B)$ и $(B_{m-1} \cap A), B$ соответственно, то A_{n-1} и B_{m-1} дисперсивны по Оре ввиду выбора G. Тогда по лемме 4.3 группа $G = A_{n-1}B_{m-1}$ дисперсивна по Оре. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В работе [9] введено следующее понятие: подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*вложенной в* G, если либо $H = G$, либо любая максимальная цепь подгрупп от H до G имеет простые индексы.

Следствие 4.4.1 [9]. *Группа G дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда она имеет дисперсивные по Оре подгруппы A и B такие, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$ и A, B $\mathbb{P}$-вложены в G.*

Согласно [6, 7] группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных* (*взаимно sn-перестановочных*) *подгрупп* A и B, если A перестановочна с любой (соответственно субнормальной) подгруппой из B, а B перестановочна с любой (соответственно субнормальной) подгруппой из A.

Согласно [10] для подгрупп A и B группы G подгруппа A называется *наследственно G-перестановочной* с B, если $AB^g = B^gA$ для некоторого $g \in \langle A, B\rangle$.

Лемма 4.5. *Пусть $G = AB$, где A — разрешимая подгруппа, а подгруппа B либо перестановочна с любой субнормальной подгруппой из A, либо наследственно G-перестановочна с любой подгруппой из A. Тогда B $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Для $G = 1$ лемма верна. Пусть $|G| > 1$. Можно считать, что $G \neq B$. В A найдется субнормальный ряд $1 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = A$ с простыми индексами $|A_j : A_{j-1}|$, $j = 1, \dots, n$. Тогда из $B \neq G$ следует, что $A_{j-1}B \neq A_jB$ для некоторого j. Выберем наибольшее j, для которого $A_{j-1}B \neq A_jB$, а $A_jB = G$. Заметим, что $A_{j-1} \subseteq (A_j \cap B)A_{j-1} \subseteq A_j$.

Если B перестановочна с любой субнормальной подгруппой из A, то $A_j \cap A_{j-1}B = (A_j \cap B)A_{j-1}$ — подгруппа группы G. Предположим, что B наследственно G-перестановочна с любой подгруппой из A. Тогда $BA_{j-1}^g = A_{j-1}^gB$ для некоторого $g \in \langle B, A_{j-1}\rangle$. По тождеству Дедекинда $\langle B, A_{j-1}\rangle = (\langle B, A_{j-1}\rangle \cap A_j)B$. Поэтому найдутся $a \in \langle B, A_{j-1}\rangle \cap A_j$ и $b \in B$ такие, что $g = ab$. Отсюда и из субнормальности A_{j-1} в A_j следует, что $A_{j-1}^gB = A_{j-1}^bB = BA_{j-1}^b$. Значит, $\left(A_{j-1}^bB\right)^{b^{-1}} = A_{j-1}B$ и $A_j \cap A_{j-1}B = (A_j \cap B)A_{j-1}$ — подгруппа группы G.

Теперь из $1 \neq |A_jB : A_{j-1}B| = |A_j : A_{j-1}| : |(A_j \cap B)A_{j-1} : A_{j-1}|$ заключаем, что $|A_jB : A_{j-1}B| = |A_j : A_{j-1}|$ — простое число. Так как B либо перестановочна с любой субнормальной подгруппой из A_{j-1}, либо наследственно $(A_{j-1}B)$-перестановочна с любой подгруппой из A_{j-1}, по индукции B $\mathbb{P}$-$sn\,(A_{j-1}B)$. Следовательно, B $\mathbb{P}$-$sn\,G$. Лемма доказана.

Отметим, что если A и B — подгруппы G, то из условия $(|G : A|, |G : B|) = 1$ следует $G = AB$.

Теорема 4.6. *Если группа G имеет* w*-сверхразрешимые подгруппы A и B такие, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$ и A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G, то G* w*-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть P — силовская подгруппа группы G. Если $P^x \subseteq A$ для некоторого $x \in G$, то ввиду w-сверхразрешимости A получаем, что P^x $\mathbb{P}$-sn A. Из утверждений 4 и 5 леммы 3.1 и A $\mathbb{P}$-sn G заключаем, что P $\mathbb{P}$-sn G. При $P^x \subseteq B$ аналогичными рассуждениями устанавливаем, что P $\mathbb{P}$-$sn\,G$. Итак, G — w-сверхразрешимая группа. Теорема доказана.

Следствие 4.6.1. *Если группа G имеет сверхразрешимые подгруппы A и B такие, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$ и A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G, то G* w*-сверхразрешима.*

Отсюда с учетом теоремы 3.9 следует теорема 3.4 из [5, гл. 4].

Ввиду леммы 4.5 получается

Следствие 4.6.2. *Если группа G имеет* w*-сверхразрешимые* (*сверхразрешимые*) *подгруппы A и B такие, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$ и A и B взаимно sn-перестановочны* (*взаимно перестановочны*), *то G* w*-сверхразрешима.*

Обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 4.7. *Пусть группа $G = AB$ — произведение* w*-сверхразрешимых подгрупп A и B. Если A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G* w*-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Ввиду теорем 3.5 и 4.2 группа G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Для G/N все условия теоремы выполняются. Тогда G/N — w-сверхразрешимая группа. По теореме 3.6 класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией. Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$, $N = C_G(N) = F(G)$, N — p-группа, где p — некоторое простое число. Тогда $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G, $N \cap M = 1$. Подгруппа $M \simeq G/N$ w-сверхразрешима. Из теорем 3.7 и 4.4 следует, что G дисперсивна по Оре. Поэтому p — наибольшее простое число, делящее $|G|$.

Если $p \in \pi(M)$, то ввиду дисперсивности по Оре группы M силовская p-подгруппа из M является нормальной в M. С другой стороны, $O_p(M) = 1$ ввиду леммы 3.9 из [11]; противоречие. Следовательно, N — силовская p-подгруппа группы G.

Рассмотрим AN. Заметим, что $AN = AN \cap NM = N(AN \cap M)$. Так как $N = C_G(N) = C_{AN}(N)$, то $O_{p'}(AN) = 1$ и $F_p(AN) = N$. Из того, что $AN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, по лемме 4.5 из [11] и теореме 3.8 следует, что $AN/F_p(AN) \simeq AN \cap M \in f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$. Аналогично получаем, что $BN \cap M \in f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$. Заметим также, что $M = (AN \cap M)(BN \cap M)$. Так как по условию обобщенный коммутант группы G нильпотентен и $F(G) = N$, M является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Пусть $q \in \pi(M)$. По лемме 11.6 из [11] найдутся силовские q-подгруппы Q, Q_1 и Q_2 из $M, AN \cap M, BN \cap M$ соответственно такие, что $Q = Q_1Q_2$. Из абелевости Q и $Q_i \in \mathfrak{A}(p-1)$, $i = 1, 2$, следует, что $Q \in \mathfrak{A}(p-1)$. В силу произвольности выбора $q \in \pi(M)$ получаем, что $M \in (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$. Так как $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in (H \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$, по лемме 4.5 из [11] следует, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$; противоречие. Теорема доказана.

Из $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и того, что обобщенный коммутант группы содержится в ее коммутанте, получаются следующие результаты.

Следствие 4.7.1. *Пусть $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных в G сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G* w*-сверхразрешима.*

Следствие 4.7.2. *Пусть $G = AB$ — произведение $\mathbb{P}$-субнормальных в G сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Отсюда вытекает отмеченный выше результат Бэра из [4].

Следующий результат получается из теорем 4.7 и 4.4 с учетом леммы 4.5.

Следствие 4.7.3 [10]. *Пусть $G = AB$, где A, B — сверхразрешимые подгруппы группы G и либо коммутант группы G нильпотентен, либо A и B имеют взаимно простые порядки. Если A наследственно G-перестановочна со всякой подгруппой группы B, а B наследственно G-перестановочна со всякой подгруппой группы A, то группа G сверхразрешима.*

Ввиду теоремы 3.9 получается

Следствие 4.7.4 [8]. *Пусть $G = AB$ — произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

С учетом леммы 4.5 из теоремы 4.7 вытекают известные результаты.

Следствие 4.7.5 [7]. *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно sn-перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.7.6 [6]. *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Теоремы 4.6 и 4.7 включают соответственно теоремы 3.2 и 3.1 из [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. Berlin: Springer-Verl., 1967. Bd I.
2. *Казарин Л. С.* О группах с факторизацией // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 26–29.
3. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
4. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. N 1. P. 115–187.
5. Between nilpotent and solvable / M. Weinstein (Editor) Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.
6. *Assad M., Shaalan A.* On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, N 4. P. 318–326.
7. *Alejandre M., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M.* On some permutable products of supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. V. 20. P. 413–425.
8. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. Т. 426, № 11. С. 10–14.
9. *Targonskiy E. A., Skiba A. N.* Finite groups with given systems of $\mathbb{P}$-embedded subgroups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. V. 36, N 3. P. 74–76.
10. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.
11. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
12. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
13. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

Статья поступила 4 февраля 2011 г.

Васильев Александр Федорович, Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
formation56@mail.ru, tyutyanov@front.ru

Васильева Татьяна Ивановна
Белорусский гос. университет транспорта,
кафедра высшей математики,
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru