Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.956

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Д. К. Потапов

Аннотация. Рассматриваются коэрцитивные эллиптические вариационные неравенства второго порядка со спектральным параметром и разрывными нелинейностями. Вариационным методом устанавливается предложение о разрешимости таких задач. Полученные результаты применяются к задаче Гольдштика.

Ключевые слова: вариационное неравенство, разрывная нелинейность, спектральный параметр, вариационный метод, задача Гольдштика.

Введение

Вариационные неравенства с разрывными нелинейными операторами в рефлексивных банаховых пространствах изучались В. Н. Павленко в [1–3]. В этих работах рассмотрены также приложения общих теорем к эллиптическим вариационным неравенствам с дифференциальными операторами высокого порядка и разрывными нелинейностями в коэрцитивном случае. Резонансные эллиптические вариационные неравенства второго порядка с разрывными нелинейностями рассматривались в работах [4, 5]. Актуальность рассмотрения проблемы отыскания решений вариационных неравенств с разрывными нелинейностями диктуется внутренними потребностями развития теории вариационных неравенств.

Данная работа является продолжением исследований работ [1–5] и посвящена изучению задач со спектральным параметром для эллиптических вариационных неравенств с разрывными по фазовой переменной нелинейностями. Вариационным методом устанавливается существование полуправильных решений для таких задач. В отличие от [1–3] в данной работе рассматриваются эллиптические вариационные неравенства с дифференциальными операторами второго порядка, а в отличие от работ [4, 5] — коэрцитивные вариационные неравенства. В работах [1, 4, 5] полуправильные решения не изучались. Кроме того, в отличие от [1–5] в данной работе рассматриваются задачи со спектральным параметром для вариационных неравенств с разрывными нелинейностями.

1. Постановка задачи. Определения и обозначения

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ рассматривается задача нахождения функции $u \in K$, удовлетворяющей неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx-\lambda\int\limits_{\Omega} g(x,u(x))(v-u)(x)\,dx\ge 0\quad \forall v\in K. \tag{1}$$

Здесь λ — положительный параметр; функция $g:\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x\in\Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,u)\in[g_-(x,u),g_+(x,u)]$ для всех $u\in\mathbf{R}$,

$$g_-(x,u)=\varliminf_{\eta\to u} g(x,\eta),\quad g_+(x,u)=\varlimsup_{\eta\to u} g(x,\eta)$$

и $|g(x,u)|\le a(x)$ для всех $u\in\mathbf{R}$, где $a\in\mathbf{L}_q(\Omega)$, $q>\frac{2n}{n+2}$, фиксирована; K — выпуклое замкнутое непустое множество в соболевском пространстве $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$. Отметим, что если множество K совпадает с одним из следующих множеств: $\{v\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1(\Omega):v(x)\ge\varphi(x)$ п. в. на $\Omega\}$, $\{v\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1(\Omega):v(x)\le\psi(x)$ п. в. на $\Omega\}$, $\{v\in\overset{\circ}{\mathbf{H}}{}^1(\Omega):\varphi(x)\le v(x)\le\psi(x)$ п. в. на $\Omega\}$ ($\varphi,\psi\in\mathbf{C}_2(\overline{\Omega})$), то задача (1) приводится к эквивалентной задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной по фазовой переменной нелинейностью вида

$$-\Delta u(x)=\lambda g(x,u(x)),\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma}=0. \tag{3}$$

Для задач с препятствиями такой подход предложен в [6], для коэрцитивных эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями — в [7], для резонансных эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями — в [4, 5].

Определение 1.1. Функция $u\in K$, удовлетворяющая (1), называется *сильным решением* неравенства (1).

Определение 1.2. Сильное решение $u(x)$ неравенства (1) называется *полуправильным*, если для почти всех $x\in\Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Определение 1.3. *Сильным решением* задачи (2), (3) называется функция $u\in\mathbf{W}_q^2(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x\in\Omega$ уравнению (2) и граничному условию (3).

Определение 1.4. *Прыгающим разрывом* функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ называется такое $u\in\mathbf{R}$, что $f(u-)<f(u+)$, где $f(u\pm)=\lim\limits_{s\to u\pm} f(s)$.

Отметим, что при сделанных выше предположениях каждое сильное решение задачи (2), (3) является сильным решением вариационного неравенства (1).

Положим $J^\lambda(u)=J_1(u)-\lambda J_2(u)$, $U=\{u_0\in K:J_2(u_0)>0\}$, где

$$J_1(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2\,dx,\quad J_2(u)=\int\limits_{\Omega} dx\int\limits_{0}^{u(x)} g(x,s)\,ds.$$

2. Основной результат

Обобщая результаты работ [8–10] для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью на соответствующие эллиптические вариационные неравенства, получим нижеследующую теорему — основной результат работы. Данная теорема доказывается аналогично [8–10] вариационным методом. Отметим, что основа вариационного метода решения функциональных уравнений состоит в следующем. Пусть оператор $u \mapsto A(u)$ есть производная некоторого функционала f, т. е. $A(u)h = (f(u+th))'|_{t=0}$. Тогда, найдя экстремум функционала f, получим решение уравнения $A(u) = 0$. Если функции берутся из некоторого выпуклого множества, то требуется модификация этого заключения: равенство заменяется некоторым неравенством. Таким образом, требуется исследовать существование упомянутого экстремума. В ряде работ этот вопрос рассматривался для функционалов, подчиненных тем или иным ограничениям, которые связаны с краевыми задачами, содержащими нелинейность. В данной работе приведен вариант такой теоремы существования точки экстремума при несколько иных ограничениях. Поэтому полученные выводы являются новыми в рассматриваемой области и представляют интерес для занимающихся этим кругом задач. Итак, имеет место

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $g(x,\cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы,* $g(x,0) = 0$ *и* $|g(x,u)| \le a(x)$ *для всех* $u \in \mathbf{R}$, *где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, *фиксирована;*

2) *найдется* $u_0 \in K$, *для которого* $J_2(u_0) > 0$.

Тогда существует $0 < \lambda_0 \le \inf\limits_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}$ *такое, что для любого* $\lambda > \lambda_0$ *выполняется неравенство* $\inf\limits_{v \in K} J^\lambda(v) < 0$, *и найдется* $u_\lambda \in K$, *для которого*

$$J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v), \tag{4}$$

и любое u_λ, *удовлетворяющее* (4), *является ненулевым полуправильным решением неравенства* (1).

Доказательство. Пусть $X = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$ — пространство с нормой

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим оператор $T_1 : X \to X^*$, порожденный формой

$$(T_1u, v) = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i} v_{x_i}\,dx,$$

где $u, v \in X$. Определим оператор $T_2 : X \to X^*$ по формуле

$$(T_2u, v) = \int\limits_\Omega g(x, u(x))v(x)\,dx$$

для всех $u, v \in X$. Здесь через (z, x) обозначается значение линейного ограниченного функционала $z \in X^*$ на элементе $x \in X$. Линейный оператор T_1 ограниченный, самосопряженный и монотонный. Следовательно, отображение

T_1 потенциально с потенциалом $J_1(u) = \frac{1}{2}(T_1 u, u)$ [11]. В [8, 9] установлена компактность отображения T_2, а в работе [1] показано, что отображение T_2 квазипотенциально и $J_2(u)$ — его квазипотенциал, т. е.

$$J_2(u+h) - J_2(u) = \int_0^1 (T_2(u+th), h)\,dt$$

для всех $u, h \in X$. Докажем, что для любого положительного λ

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} J^\lambda(u) = +\infty. \tag{5}$$

Имеем

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_0^1 \|T_2(tu)\| \cdot \|u\|\,dt$$
$$\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda M \|u\| = \|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda M}{\|u\|} \right),$$

где $M = \|P^*\| \cdot \|a\|$, P^* — оператор, сопряженный с P, P — оператор вложения X в $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и q из условия 1 теоремы 2.1. Отсюда немедленно следует (5).

Из монотонности T_1 и компактности T_2 вытекает слабая полунепрерывность снизу на K функционала J^λ при любом фиксированном $\lambda > 0$ [1]. Отсюда и из (5) по обобщенной теореме Вейерштрасса [11] получаем, что существует $u_\lambda \in K$ такое, что $J^\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v)$ для любого положительного λ. В силу условия 1 теоремы 2.1 для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ может иметь только прыгающие разрывы, откуда следует, что

$$\varliminf_{t \to +0} ((T_1 - \lambda T_2)(u + th) - (T_1 - \lambda T_2)(u), h) \leq 0$$

для произвольных u, h. Поэтому в силу результатов работы [1] существует функция $u_\lambda \in K$, удовлетворяющая неравенству $((T_1 - \lambda T_2)(u), v - u) \geq 0$ для всех $v \in K$, что равносильно (1).

Покажем, что существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $u_\lambda \neq 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$. В силу условия 2 теоремы 2.1 найдется $u_0 \in K$, для которого $J_2(u_0) > 0$. Тем самым существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $J^\lambda(u_0) = J_1(u_0) - \lambda J_2(u_0) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$. Отсюда следует, что $J^\lambda(u_\lambda) < 0$ для любого $\lambda > \lambda_0$ и, значит, $u_\lambda \neq 0$ при $\lambda > \lambda_0$ (поскольку $J^\lambda(0) = 0$). Кроме того, как и в [10], устанавливается, что для величины бифуркационного параметра λ_0 справедлива следующая оценка сверху:

$$\lambda_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)}.$$

Решение u_λ неравенства $((T_1 - \lambda T_2)(u), v - u) \geq 0$ по определению операторов T_1 и T_2 является слабым решением неравенства (1) из пространства K. Так как $g(x, u_\lambda(x)) \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ с $q > \frac{2n}{n+2}$, слабое решение неравенства (1) является и сильным решением [12]. Покажем, что $u_\lambda(x)$ — полуправильное решение неравенства (1) (полуправильное решение соответствующей задачи (2), (3)) для любого $\lambda > 0$. Для этого достаточно показать, что для почти всех $x \in \Omega$ значение $u_\lambda(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$. Поскольку по условию для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, надо установить равенство нулю меры множества $\Omega_+ = \{x \in \Omega : g(x, u_\lambda(x)-) < g(x, u_\lambda(x)+)\}$. Допустим противное. Тогда отлична от нуля мера одного из множеств $\Omega_1 = \{x \in \Omega_+ : -\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)+) \geq 0\}$ или $\Omega_2 = \{x \in \Omega_+ : -\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)+) < 0\}$. Пусть для определенности $\operatorname{mes}\Omega_1 \neq 0$. Тогда не равна нулю мера множества $\widetilde{\Omega}_1 = \{x \in \Omega_+ : -\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)-) > 0\}$. Отсюда заключаем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что отлична от нуля мера множества

$$\omega_1(\varepsilon) = \{x \in \Omega_+ : -\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)-) > \varepsilon\}.$$

Так как $-\Delta u_\lambda(x)$ и $\psi(x) = \max\{|g(x, u_\lambda(x)-)|, |g(x, u_\lambda(x)+)|\}$ суммируемы по Лебегу на Ω, согласно свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta > 0$ такое, что для произвольного измеримого множества $A_1 \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} A_1 < \delta$ верны неравенства

$$\int\limits_{A_1} |-\Delta u_\lambda(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{8} \operatorname{mes}\omega_1, \quad \lambda \int\limits_{A_1} \psi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{8} \operatorname{mes}\omega_1.$$

Существуют [13] замкнутое множество $F_1 \subset \omega_1$ и открытое множество $G_1 \supset F_1$, $\overline{G_1} \subset \Omega$, такие, что $\operatorname{mes} F_1 > \operatorname{mes}\omega_1/2$ и $\operatorname{mes}(G_1 \backslash F_1) < \delta$. Пусть h принадлежит $\mathbf{C}_\infty(\overline{\Omega})$, равна единице на F_1, нулю вне G_1 и $0 \leq h(x) \leq 1$ на $G_1 \backslash F_1$ (такую функцию можно построить [14]). Далее, для произвольного $t > 0$ имеем

$$0 \leq \frac{J^\lambda(u_\lambda - th) - J^\lambda(u_\lambda)}{t} = \int\limits_0^1 ((T_1 - \lambda T_2)(u_\lambda - \tau th), -h)\, d\tau$$

$$= \int\limits_0^1 (-\Delta(u_\lambda - \tau th), -h)\, d\tau + \lambda \int\limits_0^1 d\tau \int\limits_\Omega g(x, u_\lambda(x) - \tau th(x))h(x)\, dx.$$

Отсюда, переходя к пределу при $t \to +0$, получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int\limits_\Omega (-\Delta u_\lambda(x))h(x)\, dx + \lambda \int\limits_\Omega \lim_{t\to+0} g(x, u_\lambda(x) - \tau th(x))h(x)\, dx \\ &= -\int\limits_{F_1} (-\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)-))\, dx - \int\limits_{G_1\backslash F_1} (-\Delta u_\lambda(x))h(x)\, dx \\ &\quad + \lambda \int\limits_{G_1\backslash F_1} \lim_{t\to+0} g(x, u_\lambda(x) - \tau th(x))h(x)\, dx \\ &< -\varepsilon \operatorname{mes} F_1 + \int\limits_{G_1\backslash F_1} (|-\Delta u_\lambda(x)| + \lambda\psi(x))\, dx \\ &< -\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{mes}\omega_1 + \frac{\varepsilon}{8}\operatorname{mes}\omega_1 + \frac{\varepsilon}{8}\operatorname{mes}\omega_1 = -\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{mes}\omega_1 < 0, \end{aligned}$$

что невозможно (переход к пределу под знаком интеграла допустим в силу теоремы Лебега). Следовательно, $\operatorname{mes}\Omega_1 = 0$. Аналогично если $\operatorname{mes}\Omega_2 \neq 0$, то найдется $\varepsilon > 0$, для которого не равна нулю мера множества

$$\omega_2(\varepsilon) = \{x \in \Omega_+ : -\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)+) < -\varepsilon\}.$$

Далее, существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $A_2 \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} A_2 < \delta$ верны неравенства

$$\int\limits_{A_2} |-\Delta u_\lambda(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{8}\operatorname{mes}\omega_2, \quad \lambda\int\limits_{A_2}\psi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{8}\operatorname{mes}\omega_2.$$

Существуют замкнутое множество $F_2 \subset \omega_2$ и открытое множество $G_2 \supset F_2$, $\overline{G_2} \subset \Omega$, такие, что $\operatorname{mes} F_2 > \frac{\operatorname{mes}\omega_2}{2}$ и $\operatorname{mes}(G_2 \backslash F_2) < \delta$. Пусть h принадлежит $\mathbf{C}_\infty(\overline{\Omega})$, равна единице на F_2, нулю вне G_2 и $0 \le h(x) \le 1$ на $G_2 \backslash F_2$. Тогда

$$0 \le \lim_{t\to+0}\frac{J^\lambda(u_\lambda + th) - J^\lambda(u_\lambda)}{t} = \int\limits_{F_2}(-\Delta u_\lambda(x) - \lambda g(x, u_\lambda(x)+))\,dx$$

$$+\int\limits_{G_2\backslash F_2}(-\Delta u_\lambda(x))h(x)\,dx - \lambda\int\limits_{G_2\backslash F_2}\lim_{t\to+0} g(x, u_\lambda(x) + \tau t h(x))h(x)\,dx$$

$$< -\varepsilon\operatorname{mes} F_2 + \int\limits_{G_2\backslash F_2}(|-\Delta u_\lambda(x)| + \lambda\psi(x))\,dx < -\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{mes}\omega_2 < 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{mes}\Omega_2 = 0$. Равенство нулю меры множества Ω_+ установлено. Теорема 2.1 доказана полностью.

Следствием теоремы 2.1 является

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *с* $K = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$. *Тогда утверждение теоремы* 2.1 *справедливо для задачи* (2), (3), *что подтверждает результаты из* [8–10].

3. Приложения

Рассмотрим приложение полученных результатов к задаче об отрывных течениях несжимаемой жидкости М. А. Гольдштика [15]. Как показано в [9, 16, 17], математическая модель задачи Гольдштика сводится к следующей задаче со спектральным параметром для уравнения эллиптического типа второго порядка с разрывной нелинейностью:

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

где

$$g(x,u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \ge -\psi_0(x). \end{cases}$$

Здесь ω — завихренность, Γ — кусочно гладкий контур плоской ограниченной области Ω, функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 = 0, \\ \psi_0|_\Gamma = \varphi(s), \end{cases}$$

φ — непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция. В работах [9, 16] проверено выполнение условий теоремы 2.1 с

$K = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$ для задачи Гольдштика (6), (7). Аналогично проверяется выполнение условий теоремы 2.1 для задачи Гольдштика с вариационным неравенством следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}\,dx - \omega \int_\Omega g(x,u(x))(v-u)(x)\,dx \geq 0 \quad \forall v \in K, \tag{8}$$

где K — выпуклое замкнутое непустое множество в соболевском пространстве $\mathbf{W}^1_2(\Omega)$. Поэтому существует

$$0 < \omega_0 \leq \inf_{u_0 \in U} \frac{J_1(u_0)}{J_2(u_0)},$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_{x_i}^2\,dx,\;\; J_2(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)\,ds, \quad U = \{u_0 \in K : J_2(u_0) > 0\},$$

такое, что $\inf\limits_{v\in K} J^\omega(v) < 0$ для любого $\omega > \omega_0$ $(J^\omega(u) = J_1(u) - \omega J_2(u))$, и найдется $u_\omega \in K$, для которого

$$J^\omega(u_\omega) = \inf_{v \in K} J^\omega(v). \tag{9}$$

Так как для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ в задаче Гольдштика (6), (7) имеет только прыгающие разрывы [9, 16], любое u_ω, удовлетворяющее (9), является ненулевым полуправильным решением неравенства (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1397–1402.
2. *Павленко В. Н.* Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 2. С. 230–235.
3. *Павленко В. Н.* О разрешимости вариационных неравенств с разрывными полумонотонными операторами // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 3. С. 443–447.
4. *Павленко В. Н., Чиж Е. А.* Сильно резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 2005. № 7. С. 49–56.
5. *Павленко В. Н., Прибыль М. А.* Резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 120–125.
6. *Chang K. C.* Free boundary problems and the set–valued mappings // J. Differ. Equations. 1983. V. 49, N 1. P. 1–28.
7. *Павленко В. Н.* Уравнения и вариационные неравенства с разрывными нелинейностями: Дис. … докт. физ.-мат. наук. Челябинск, 1995. 149 с.
8. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.
9. *Потапов Д. К.* Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. СПб: Изд-во ИБП, 2008.
10. *Потапов Д. К.* Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 715–716.
11. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
12. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
13. *Павленко В. Н.* Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1973. № 6. С. 21–29.

14. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. II. М.: Изд-во иностр. лит., 1966.

15. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.

16. *Потапов Д. К.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2004. Т. 8, № 3–4. С. 163–170.

17. *Потапов Д. К.* Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 262–266.

Статья поступила 11 ноября 2010 г.

Потапов Дмитрий Константинович
Санкт-Петербургский гос. университет, кафедра высшей математики,
Университетский пр., 35, Санкт-Петербург 198504
potapov@apmath.spbu.ru