Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ НА КОНУСАХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

О. В. Попова

Аннотация. Устанавливаются необходимые и достаточные условия выполнения различных неравенств типа Харди на конусах монотонных функций.

Ключевые слова: интегральный оператор, неравенство Харди.

1. Введение

Неравенства Харди, в том числе на конусах монотонных функций, являются предметом интенсивных исследований последних двух десятилетий. В частности, можно указать работы [1–17], посвященные данной проблематике.

Введем обозначения. Пусть λ, μ, ν — положительные σ-конечные меры Бореля на $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$, $\mathfrak{M}^+$ — класс, состоящий из всех борелевских функций $f : \mathbb{R}_+ \to [0,+\infty]$, и $\mathfrak{M}{\downarrow}$ ($\mathfrak{M}{\uparrow}$) — подкласс $\mathfrak{M}^+$, состоящий из всех невозрастающих (неубывающих) функций. Положим $\Lambda(x) := \int\limits_{[0,x]} d\lambda$ и всюду далее будем предполагать, что $\Lambda(x) < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$.

Настоящая работа посвящена изучению неравенств типа Харди на конусах монотонных функций.

В п. 3.1 рассматривается неравенство

$$\biggl(\int\limits_{[0,\infty)} (Kf)^q\,d\mu\biggr)^{\frac{1}{q}} \le C\biggl(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\biggr)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

для оператора

$$Kf(x) = \int\limits_{[0,x]} k(x,y)f(y)\,d\nu(y), \tag{2}$$

где $k(x,y) \ge 0$ — измеримое ядро, удовлетворяющее условию Ойнарова: существует константа $D \ge 1$ такая, что

$$D^{-1}(k(x,z)+k(z,y)) \le k(x,y) \le D(k(x,z)+k(z,y)), \quad x \ge z \ge y. \tag{3}$$

Неравенства (1) с абсолютно непрерывными мерами для всех $f \in \mathfrak{M}^+$ при $1 < p,q < \infty$ изучены в [18] (см. также [19–22]), а в случае борелевских мер — в [23, 24]. На конусе монотонных функций при $k(x,y) \equiv 1$ неравенство (1) для $0 < p,q \le 1$, $1 < p,q < \infty$, $0 < p \le 1 \le q$ исследовано в [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00093).

В п. 3.1 мы даем критерии выполнения неравенства (1), а также неравенства

$$\Big(\int\limits_{[0,\infty)} (Kf)^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\Big)^p\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

для всех $f \in \mathfrak{M}\!\downarrow$ при $0 < p, q < \infty$, $q \ge 1$.

В п. 3.2, опираясь на результаты работы [25], получаем критерии выполнения неравенства

$$\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\Big)^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}\!\downarrow, \tag{5}$$

и сравниваем их с критериями, полученными в [12].

В п. 3.3 рассматриваются неравенства для отрицательных параметров p и q. Весовые неравенства Харди с отрицательными параметрами суммирования характеризуются в [26]. Мы даем критерии выполнения неравенств с мерами вида

$$\Big(\int\limits_{[0,\infty]} \Big(\int\limits_{[0,x]} f\,d\lambda\Big)^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}\!\uparrow,$$

как для положительных, так и для отрицательных значений p, q. Этот результат дополняет и обобщает критерии из [24, 14].

Запись $A \ll B$ означает, что $A \le cB$ с константой c, зависящей только от параметра суммирования. Пишем $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$ или $A = cB$. Показатель p' равен $p/(p-1)$ для $0 < p < \infty$, $p \ne 1$, $L^p(\lambda)$ означает совокупность всех λ-измеримых функций f на $\mathbb{R}_+$ таких, что $\|f\|_{p,\lambda} := \big(\int\limits_{[0,\infty)} |f|^p\,d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}$.

2. Вспомогательные сведения

Для доказательства основных результатов потребуются следующие утверждения.

Теорема 1 [14, теорема 2.1]. *При* $0 < p \le q < \infty$

$$\sup_{0\le F\downarrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} F^q\,d\omega\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} F^p\,d\nu\big)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{x\ge 0} \frac{\big(\int\limits_{[0,x]} d\omega\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\nu\big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Теорема 2 [14, теорема 2.2]. *Пусть* $0 < q < p < \infty$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда*

$$\sup_{0\le F\downarrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} F^q\,d\omega\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} F^p\,d\nu\big)^{\frac{1}{p}}} \approx \Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} \frac{d\omega(t)}{\int\limits_{[0,t]} d\nu}\Big)^{\frac{r}{q}}\,d\nu(x)\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Теорема 3 [14, теорема 2.3]. *Пусть* $0 < q < p < \infty$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда*

$$\sup_{0 \le F \downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} F^q \, d\omega\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} F^p \, d\nu\Big)^{\frac{1}{p}}} \approx \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\frac{1}{\int\limits_{[0,x]} d\nu} \int\limits_{[0,x]} d\omega + \frac{1}{\int\limits_{[0,\infty)} d\nu} \int\limits_{[0,\infty)} d\omega \bigg)^{\frac{r}{q}} d\nu(x) \Bigg)^{\frac{1}{r}},$$

если

$$\bigg(\int\limits_{[0,x]} d\nu \bigg)^{-1} - \bigg(\int\limits_{[0,\infty]} d\nu \bigg)^{-1} \le C \int\limits_{[x,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} d\nu \bigg)^{-2} d\nu$$

для некоторой константы C.

Теорема 4 [25; 27, теорема 2]. *Пусть* $1 \le \gamma < \infty$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}{\downarrow}$, $f \not\equiv 0$, *имеет место двустороннее неравенство*

$$\frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}} \le \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f \, d\lambda \Big)^{\gamma} d\lambda(x) \Big)^{\frac{1}{\gamma}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^{\gamma} \Lambda^{\gamma} \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{\gamma}}} \le \gamma. \tag{6}$$

Если $0 < \gamma < 1$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}{\downarrow}$, $f \not\equiv 0$ *имеет место неравенство*

$$0 < c(\gamma) \le \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f \, d\lambda \Big)^{\gamma} d\lambda(x) \Big)^{\frac{1}{\gamma}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^{\gamma} \Lambda^{\gamma} \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{\gamma}}} \le \frac{1}{\gamma}. \tag{7}$$

Теорема 5 [25; 27, теорема 6]. *Пусть* $-1 < \gamma < 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}{\uparrow}$, $f(x) > 0$, λ-*п. в. выполнено соотношение*

$$(-\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \le \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[0,x]} f \, d\lambda \Big)^{\gamma} d\lambda \Big)^{\frac{1}{\gamma}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^{\gamma} \Lambda^{\gamma} \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{\gamma}}} \le 1. \tag{8}$$

Теорема 6 [25; 27, теорема 7]. *Пусть* $\gamma \le -1$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}{\uparrow}$, $f(x) > 0$, λ-*п. в. выполняется двустороннее неравенство*

$$0 < c_{\gamma} \le \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[0,x]} f \, d\lambda \Big)^{\gamma} d\lambda \Big)^{\frac{1}{\gamma}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^{\gamma} \Lambda^{\gamma} \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{\gamma}}} \le 1. \tag{9}$$

3. Основные результаты

3.1. На конусе невозрастающих функций рассмотрим неравенство (1) при $0 < p < \infty, 1 \le q < \infty$ для оператора (2) с ядром, удовлетворяющим условию Ойнарова (3), с константой $C > 0$, выбранной наименьшей из возможных.

Определим функции

$$\bar{k}(x) := \int\limits_{[0,x]} k(x,y) \, d\nu(y), \quad \tilde{k}(x) := \int\limits_{[x,\infty)} k(y,x) \, d\mu(y), \quad \bar{\nu}(x) := \int\limits_{[0,x]} d\nu(y).$$

Теорема 7. *Пусть $0 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$ и при $p > 1$ выполнены условия*

$$\int\limits_{[0,\infty)} d\lambda = \infty, \quad \Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\Bigg)^{-1} \le c \int\limits_{[x,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} d\lambda\Bigg)^{-2} d\lambda(t).$$

Тогда неравенство (1) выполняется для всех функций $f \in \mathfrak{M}{\downarrow}$ тогда и только тогда, когда

$$A_0 < \infty,\ p \le q = 1, \quad B_0 < \infty,\ 1 = q < p,$$
$$A_1 + A_{2,1} + A^*_{2,1} + A_{2,2} < \infty, \quad 1 < p \le q,$$
$$B_1 + B_{2,1} + B^*_{2,1} + B_{2,2} < \infty, \quad 1 < q < p,$$
$$D_1 + D_2 + D_3 < \infty, \quad 0 < p \le 1 < q,$$

где

$$A_0 := \sup_{x \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \tilde{k}\, d\nu\Bigg)\Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\Bigg)^{-\frac{1}{p}}, \quad B_0 := \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} \frac{\tilde{k}(t)\, d\nu(t)}{\int\limits_{[0,t]} d\lambda}\Bigg)^{p'} d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_1 := \sup_{t \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[t,\infty)} \Lambda^{-p'}\, d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \bar{k}^q\, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_{2,1} := \sup_{t \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda(x)^{-p'} \bar{\nu}(x)^{p'} k(t,x)^{p'}\, d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{[t,\infty)} d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}},$$

$$A^*_{2,1} := \sup_{t \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^{-p'} \bar{\nu}^{p'}\, d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{[t,\infty)} k(y,t)^q\, d\mu(y)\Bigg)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_{2,2} := \sup_{t \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^{-p'} \bar{k}^{p'}\, d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{[t,\infty)} d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}};$$

$$B_1^r := \int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}^q\, d\mu\Bigg)^{\frac{r}{q}} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} \Lambda^{-p'}\, d\lambda\Bigg)^{\frac{r}{q'}} \Lambda(x)^{-p'}\, d\lambda(x),$$

$$B_{2,1}^r := \int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda(x)^{-p'} \bar{\nu}(x)^{p'} k(t,x)^{p'}\, d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{r}{p'}} \Bigg(\int\limits_{[t,\infty)} d\mu\Bigg)^{\frac{r}{p}} d\mu(t),$$

$$B_{2,1}^{*r} := \int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^{-p'} \bar{\nu}^{p'}\, d\lambda\Bigg)^{\frac{r}{q'}} \Bigg(\int\limits_{[t,\infty)} k(y,t)^q\, d\mu(y)\Bigg)^{\frac{r}{q}} \Lambda(t)^{-p'} \bar{\nu}(t)^{p'}\, d\lambda(t),$$

$$B_{2,2}^r := \int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu\Bigg)^{\frac{r}{q}} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^{-p'} \bar{k}^{p'}\, d\lambda\Bigg)^{\frac{r}{q'}} \Lambda(x)^{-p'} \bar{k}(x)^{p'}\, d\lambda(x),$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$;

$$D_1 := \sup_{x \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}^q\, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{q}} \Lambda(x)^{-\frac{1}{p}}, \quad D_2 := \sup_{x \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} k(y,x)^q\, d\mu(y)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \bar{\nu}(x) \Lambda(x)^{-\frac{1}{p}},$$

$$D_3 := \sup_{x\geq 0}\Big(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}\bar{k}(x)\Lambda(x)^{-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $q = 1$:

$$\int\limits_{[0,\infty)} (Kf)\,d\mu \leq C\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Для наименьшей константы C получаем

$$C = \sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\int\limits_{[0,\infty)}\big(\int\limits_{[0,x]} k(x,y)f(y)\,d\nu(y)\big)\,d\mu(x)}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\int\limits_{[0,\infty)} \tilde{k}(y)f(y)\,d\nu(y)}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Используя теоремы 1 и 2, имеем

$$C = \sup_{x\geq 0}\frac{\int\limits_{[0,x]} \tilde{k}\,d\nu}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}}$$

для $p \leq 1$ и

$$C \approx \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\Bigg(\int\limits_{[x,\infty)}\frac{\tilde{k}(t)\,d\nu(t)}{\int\limits_{[0,t]} d\lambda}\Bigg)^{p'} d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}}$$

для $p > 1$.

Для вычисления константы C в случае $q > 1$ используем принцип двойственности в пространстве L^q с мерой μ:

$$C = \sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} (Kf)^q\,d\mu\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{0\leq f\downarrow}\sup_{g\geq 0}\frac{\int\limits_{[0,\infty)} (Kf)g\,d\mu}{\|g\|_{q',\mu}\big(\int_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|g\|_{q',\mu}}\sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\int\limits_{[0,\infty)} fK^*(g)\,d\nu}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Применяя теоремы 1 и 3 к последнему выражению, выводим, что

$$C \approx \sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|g\|_{q',\mu}}\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\Bigg(\frac{1}{\Lambda(x)}\int\limits_{[0,x]} K^*(g)\,d\nu\Bigg)^{p'} d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \tag{10}$$

при $p > 1$ и

$$C = \sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|g\|_{q',\mu}}\sup_{x\geq 0}\frac{\int\limits_{[0,x]} K^*(g)\,d\nu}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}} \tag{11}$$

при $0 < p \leq 1$.

Поскольку сопряженный оператор $K^*(g)$ имеет вид

$$K^*g(y) = \int\limits_{[y,\infty)} k(x,y)g(x)\,d\mu(x),$$

получим

$$\int\limits_{[0,x]} K^*(g)\,d\nu = \int\limits_{[0,x]} \Bigg(\int\limits_{[y,\infty)} k(z,y)g(z)\,d\mu(z)\Bigg)\,d\nu(y)$$

$$\approx \int\limits_{[0,x]} \Bigg(\int\limits_{[y,x]} k(z,y)g(z)\,d\mu(z) + \int\limits_{[x,\infty)} k(z,y)g(z)\,d\mu(z)\Bigg)\,d\nu(y) =: I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_{[0,x]} \Bigg(\int\limits_{[y,x]} k(z,y)g(z)\,d\mu(z)\Bigg)\,d\nu(y) = \int\limits_{[0,x]} g(z)\,d\mu(z)\Bigg(\int\limits_{[0,z]} k(z,y)\,d\nu(y)\Bigg),$$

$$I_2 = \int\limits_{[0,x]} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} k(z,y)g(z)\,d\mu(z)\Bigg)\,d\nu(y)$$

$$\approx \int\limits_{[0,x]} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} k(z,x)g(z)\,d\mu(z) + \int\limits_{[x,\infty)} k(x,y)g(z)\,d\mu(z)\Bigg)\,d\nu(y)$$

$$= \Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\nu(y)\Bigg) \int\limits_{[x,\infty)} k(z,x)g(z)\,d\mu(z) + \int\limits_{[0,x]} k(x,y)\,d\nu(y) \int\limits_{[x,\infty)} g(z)\,d\mu(z).$$

Итак,

$$\int\limits_{[0,x]} K^*(g)\,d\nu = I_1 + I_{2,1} + I_{2,2}, \tag{12}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{[0,x]} \bar{k}g\,d\mu, \quad I_{2,1} := \bar{\nu}(x)K^*g(x), \quad I_{2,2} := \bar{k}(x)\int\limits_{[x,\infty)} g\,d\mu.$$

Рассмотрим случай $p > 1$. Подставляя (12) в (10), сведем задачу к рассмотрению трех неравенств:

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda(x)^{-p'} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}g\,d\mu\Bigg)^{p'} d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \le C_1\|g\|_{q',\mu}, \tag{13}$$

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda(y)^{-p'}\bar{\nu}(y)^{p'} \Bigg(\int\limits_{[y,\infty)} k(x,y)g(x)\,d\mu(x)\Bigg)^{p'} d\lambda(y)\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \le C_{2,1}\|g\|_{q',\mu} \tag{14}$$

и

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda(x)^{-p'}\bar{k}(x)^{p'} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} g\,d\mu\Bigg)^{p'} d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}} \le C_{2,2}\|g\|_{q',\mu}. \tag{15}$$

Имеют место следующие критерии [23, 24]:

$$C_1 \approx A_1, \quad 1 < p \le q, \quad C_1 \approx B_1, \quad 1 < q < p,$$

$$C_{2,1} \approx A_{2,1} + A_{2,1}^*, \quad 1 < p \le q, \quad C_{2,1} \approx B_{2,1} + B_{2,1}^*, \quad 1 < q < p,$$
$$C_{2,2} \approx A_{2,2}, \quad 1 < p \le q, \quad C_{2,2} \approx B_{2,2}, \quad 1 < q < p.$$

В случае $0 < p \le 1$ получаем

$$C = \sup_{g \ge 0} \frac{1}{\|g\|_{q',\mu}} \sup_{x \ge 0} \frac{\int\limits_{[0,x]} K^*(g)\, d\nu}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\big)^{\frac{1}{p}}} =: J_1 + J_{2,1} + J_{2,2},$$

где

$$J_1 = \sup_{x \ge 0} \sup_{g \ge 0} \frac{\int\limits_{[0,x]} \bar{k} g\, d\mu}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q',\mu}}, \quad J_{2,1} = \sup_{x \ge 0} \sup_{g \ge 0} \frac{\bar{\nu}(x) K^* g(x)}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q',\mu}}$$

и

$$J_{2,2} = \sup_{x \ge 0} \sup_{g \ge 0} \frac{\bar{k}(x) \int\limits_{[x,\infty)} g\, d\mu}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\lambda\big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q',\mu}}.$$

Рассмотрим константу J_1. Она является нормой оператора

$$g(z) \to \Lambda^{-\frac{1}{p}}(x) \int\limits_{[0,x]} \bar{k}(z) g(z)\, d\mu(z) = \int\limits_{[0,\infty)} \widetilde{K}(x,z) g(z)\, d\mu(z) =: \widetilde{K} g(x)$$

из $L^{q'}(\mu)$ в L^∞,

$$\|\widetilde{K} g\|_\infty \le J_1 \|g\|_{q',\mu}.$$

Из принципа двойственности в L^q вытекает, что

$$J_1 = \sup_{x \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \widetilde{K}(x,z)^q\, d\mu(z) \Bigg)^{\frac{1}{q}} = \sup_{x \ge 0} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}(z)^q\, d\mu(z) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \Lambda(x)^{-\frac{1}{p}}.$$

Аналогично

$$J_{2,1} = \sup_{x \ge 0} \bar{\nu}(x) \Lambda(x)^{-\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} k(y,x)^q\, d\mu(y) \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$J_{2,2} = \sup_{x \ge 0} \bar{k}(x) \Lambda(x)^{-\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu \Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, при $0 < p \le 1$ получаем $C \approx D_1 + D_2 + D_3$. $\square$

Аналогичным способом на конусе невозрастающих функций рассмотрим неравенство (4) при $0 < p < \infty, 1 \le q < \infty$ для оператора (2) с ядром, удовлетворяющим условию (3).

Теорема 8. *Пусть $0 < p < \infty, 1 \le q < \infty$ и при $p > 1$ выполняются условия*

$$\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda^p\, d\lambda = \infty, \qquad \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^p d\lambda \Bigg)^{-1} \le c \int\limits_{[x,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^p\, d\lambda \Bigg)^{-2} \Lambda(t)^p\, d\lambda(t).$$

Тогда неравенство (4) *справедливо для всех функций* $f \in \mathfrak{M}\!\downarrow$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{A}_0 < \infty, \quad p \le q = 1, \quad \mathbf{B}_0 < \infty, \quad 1 = q < p,$$
$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,1}^* + \mathbf{A}_{2,2} < \infty, \quad 1 < p \le q,$$
$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,1}^* + \mathbf{B}_{2,2} < \infty, \quad 1 < q < p,$$
$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 < \infty, \quad 0 < p \le 1 < q,$$

где

$$\mathbf{A}_0 := \sup_{x \ge 0} \bigg(\int\limits_{[0,x]} \tilde{k}\, d\nu \bigg) \bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \bigg)^{-\frac{1}{p}},$$

$$\mathbf{B}_0 := \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} \frac{\tilde{k}(t)\, d\nu(t)}{\int_{[0,t]} \Lambda^p \, d\lambda} \Bigg)^{p'} \Lambda(x)^p \, d\lambda(x) \Bigg)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbf{A}_1 := \sup_{t \ge 0} \bigg(\int\limits_{[t,\infty)} \Lambda^{-2p'} \, d\lambda \bigg)^{\frac{1}{p'}} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \bar{k}^q \, d\mu \bigg)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathbf{A}_{2,1} := \sup_{t \ge 0} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda(x)^{-2p'} \bar{\nu}(x)^{p'} k(t,x)^{p'} \, d\lambda(x) \bigg)^{\frac{1}{p'}} \bigg(\int\limits_{[t,\infty)} d\mu \bigg)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathbf{A}_{2,1}^* := \sup_{t \ge 0} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^{-2p'} \bar{\nu}^{p'} \, d\lambda \bigg)^{\frac{1}{p'}} \bigg(\int\limits_{[t,\infty)} k(y,t)^q \, d\mu(y) \bigg)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathbf{A}_{2,2} := \sup_{t \ge 0} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^{-2p'} \bar{k}^{p'} \, d\lambda \bigg)^{\frac{1}{p'}} \bigg(\int\limits_{[t,\infty)} d\mu \bigg)^{\frac{1}{q}};$$

$$\mathbf{B}_1^r := \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}^q \, d\mu \bigg)^{\frac{r}{q}} \bigg(\int\limits_{[x,\infty)} \Lambda^{-2p'} \, d\lambda \bigg)^{\frac{r}{q'}} \Lambda(x)^{-2p'} \, d\lambda(x),$$

$$\mathbf{B}_{2,1}^r := \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda(x)^{-2p'} \bar{\nu}(x)^{p'} k(t,x)^{p'} \, d\lambda(x) \bigg)^{\frac{r}{p'}} \bigg(\int\limits_{[t,\infty)} d\mu \bigg)^{\frac{r}{p}} d\mu(t),$$

$$\mathbf{B}_{2,1}^{*r} := \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^{-2p'} \bar{\nu}^{p'} \, d\lambda \bigg)^{\frac{r}{q'}} \bigg(\int\limits_{[t,\infty)} k(y,t)^q \, d\mu(y) \bigg)^{\frac{r}{q}} \Lambda(t)^{-2p'} \bar{\nu}(t)^{p'} \, d\lambda(t),$$

$$\mathbf{B}_{2,2}^r := \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu \bigg)^{\frac{r}{q}} \bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^{-2p'} \bar{k}^{p'} \, d\lambda \bigg)^{\frac{r}{q'}} \Lambda(x)^{-2p'} \bar{k}(x)^{p'} \, d\lambda(x),$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$;

$$\mathbf{D}_1 := \sup_{x \ge 0} \bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}^q \, d\mu \bigg)^{\frac{1}{q}} \Lambda(x)^{-1-\frac{1}{p}},$$

$$\mathbf{D}_2 := \sup_{x \ge 0} \bigg(\int\limits_{[x,\infty)} k(y,x)^q \, d\mu(y) \bigg)^{\frac{1}{q}} \bar{\nu}(x) \Lambda(x)^{-1-\frac{1}{p}},$$

$$\mathbf{D}_3 := \sup_{x\geq 0}\bigg(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu\bigg)^{\frac{1}{q}}\bar{k}(x)\Lambda(x)^{-1-\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. В случае $q=1$ имеем

$$C = \sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\int\limits_{[0,\infty)}\tilde{k}(y)f(y)\,d\nu(y)}{\big(\int\limits_{[0,\infty)}\big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\big)^p\,d\lambda(x)\big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Пусть $p,q>0$. Допустим, что вспомогательное неравенство

$$\bigg(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\bigg)^{\frac{1}{p}} \leq C\bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\bigg(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\bigg)^q d\lambda(x)\bigg)^{\frac{1}{q}}, \quad f\in\mathfrak{M}\!\downarrow,\ f\not\equiv 0,$$

выполняется на конусе невозрастающих функций. Считаем константу C наименьшей возможной, т. е. равной J_{pq}. Используя теорему 4, получаем

$$J_{pq} = \sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)}\big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\big)^q\,d\lambda(x)\big)^{\frac{1}{q}}} \approx \sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)}\Lambda^q f^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}.$$

Таким образом,

$$J_{pq} = \sup_{x\geq 0}\frac{\big(\int\limits_{[0,x]} d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}{\big(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}, \quad 0<q\leq p<\infty,$$

$$J_{pq} \approx \bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu\bigg)^{\frac{q}{q-p}}\bigg(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^q\,d\lambda\bigg)^{\frac{q}{p-q}}\Lambda(x)^q\,d\lambda(x)\bigg)^{\frac{q-p}{pq}}, \quad 0<p<q<\infty,$$

при

$$\int\limits_{[0,\infty)}\Lambda^q\,d\lambda = \infty, \quad \bigg(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^q\,d\lambda\bigg)^{-1} \leq c\int\limits_{[x,\infty)}\bigg(\int\limits_{[0,t]}\Lambda^q\,d\lambda\bigg)^{-2}\Lambda(t)^q\,d\lambda(t),$$

или

$$J_{pq} \approx \bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\bigg(\int\limits_{[x,\infty)}\frac{d\mu(t)}{\int\limits_{[0,t]}\Lambda^q\,d\lambda}\bigg)^{\frac{q}{q-p}}\Lambda(x)^q\,d\lambda(x)\bigg)^{\frac{q-p}{pq}}, \quad 0<p<q<\infty.$$

В частности, при $p=1$ имеем

$$J_{1q} \approx \bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu\bigg)^{\frac{q}{q-1}}\bigg(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^q\,d\lambda\bigg)^{\frac{q}{1-q}}\Lambda(x)^q\,d\lambda(x)\bigg)^{\frac{q-1}{q}} \tag{16}$$

и

$$J_{1q} \approx \bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\bigg(\int\limits_{[x,\infty)}\frac{d\mu(t)}{\int\limits_{[0,t]}\Lambda^q\,d\lambda}\bigg)^{\frac{q}{q-1}}\Lambda(x)^q\,d\lambda(x)\bigg)^{\frac{q-1}{q}} \tag{17}$$

для $1<q<\infty$ и

$$J_{1q}=\sup_{x\geq 0}\frac{\Big(\int\limits_{[0,x]} d\mu\Big)}{\Big(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}} \tag{18}$$

для $0<q\leq 1$.

Из (17) и (18) при $q=1$ получаем

$$C=\sup_{x\geq 0}\Bigg(\int\limits_{[0,x]}\tilde{k}\,d\nu\Bigg)\Bigg(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^p\,d\lambda\Bigg)^{-\frac{1}{p}},\quad 0<p\leq 1,$$

и

$$C\approx\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\Bigg(\int\limits_{[x,\infty)}\frac{\tilde{k}(t)\,d\nu(t)}{\int\limits_{[0,t]}\Lambda^p\,d\lambda}\Bigg)^{p'}\Lambda(x)^p\,d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}},\quad p>1.$$

В случае $q>1$ используем принцип двойственности в $L^q(\mu)$ и тогда

$$C=\sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)}(Kf)^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int_{[0,\infty)}\Big(\int\limits_{[x,\infty)}f\,d\lambda\Big)^p\,d\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}}}$$

$$=\sup_{0\leq f\downarrow}\sup_{g\geq 0}\frac{\int\limits_{[0,\infty)}(Kf)g\,d\mu}{\|g\|_{q',\mu}\Big(\int\limits_{[0,\infty)}\Big(\int\limits_{[x,\infty)}f\,d\lambda\Big)^p\,d\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}}}$$

$$=\sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|g\|_{q',\mu}}\sup_{0\leq f\downarrow}\frac{\int\limits_{[0,\infty)}fK^*(g)\,d\nu}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)}\Big(\int\limits_{[x,\infty)}f\,d\lambda\Big)^p\,d\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}}}. \tag{19}$$

Подставляя (16) и (18) в (19), в случае $p>1$ находим

$$C\approx\sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|g\|_{q',\mu}}\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\Bigg(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^p d\lambda\Bigg)^{-p'}\Bigg(\int\limits_{[0,x]}K^*(g)\,d\nu\Bigg)^{p'}\Lambda(x)^p\,d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{p'}}.$$

При $0<p\leq 1$ будет

$$C=\sup_{g\geq 0}\frac{1}{\|g\|_{q',\mu}}\sup_{x\geq 0}\frac{\int\limits_{[0,x]}K^*(g)\,d\nu}{\Big(\int\limits_{[0,x]}\Lambda^p\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Двойственный оператор $K^*(g)$ имеет вид

$$\int\limits_{[0,x]}K^*(g)\,d\nu=I_1+I_{2,1}+I_{2,2},$$

где

$$I_1:=\int\limits_{[0,x]}\bar{k}g\,d\mu,\quad I_{2,1}:=\bar{\nu}(x)K^*g(x),\quad I_{2,2}:=\bar{k}(x)\int\limits_{[x,\infty)}g\,d\mu.$$

Рассмотрим случай $p > 1$. Аналогично предыдущей теореме сведем задачу к рассмотрению трех неравенств:

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda(x)^{-2p'} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k} g \, d\mu \Bigg)^{p'} d\lambda(x) \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \leq C_1 \|g\|_{q',\mu},$$

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda(y)^{-2p'} \bar{\nu}(y)^{p'} \Bigg(\int\limits_{[y,\infty)} k(x,y) g(x) g\mu(x) \Bigg)^{p'} d\lambda(y) \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \leq C_{2,1} \|g\|_{q',\mu},$$

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda(x)^{-2p'} \bar{k}^{p'}(x) \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} g \, d\mu \Bigg)^{p'} d\lambda(x) \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \leq C_{2,2} \|g\|_{q',\mu}.$$

Получаем критерии

$$C_1 + C_{2,1} + C_{2,2} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}^*_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2}, \quad 1 < p \leq q,$$

$$C_1 + C_{2,1} + C_{2,2} \approx \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}^*_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2}, \quad 1 < q < p.$$

В случае $0 < p \leq 1 < q$

$$C = \sup_{g \geq 0} \frac{1}{\|g\|_{q',\mu}} \sup_{x \geq 0} \frac{\int_{[0,x]} K^*(g) \, d\nu}{\big(\int_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \big)^{\frac{1}{p}}} = J_1 + J_{2,1} + J_{2,2},$$

где

$$J_1 := \sup_{g \geq 0} \sup_{x \geq 0} \frac{\int_{[0,x]} \bar{k} g \, d\mu}{\big(\int_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q',\mu}}, \quad J_{2,1} := \sup_{g \geq 0} \sup_{x \geq 0} \frac{\bar{\nu}(x) K^* g(x)}{\big(\int_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q',\mu}}$$

и

$$J_{2,2} := \sup_{g \geq 0} \sup_{x \geq 0} \frac{\bar{k}(x) \int_{[x,\infty)} g \, d\mu}{\big(\int_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{q',\mu}}.$$

Аналогично предыдущему результату

$$J_1 = \|\widetilde{K}\| = \sup_{x \geq 0} \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \widetilde{K}(x,z)^q \, d\mu(z) \Bigg)^{\frac{1}{q}} = \sup_{x \geq 0} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \bar{k}^q(z) \, d\mu(z) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \Lambda(x)^{-1-\frac{1}{p}},$$

$$J_{2,1} = \sup_{x \geq 0} \bar{\nu}(x) \Lambda(x)^{-1-\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} k(y,x)^q \, d\mu(y) \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$J_{2,2} = \sup_{x \geq 0} \bar{k}(x) \Lambda(x)^{-1-\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu \Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, при $0 < p \leq 1$ получаем критерий $C \approx \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3$. $\square$

3.2. Пусть $0 < p, q < \infty$. Рассмотрим неравенство

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\Bigg)^q d\lambda(x)\Bigg)^{\frac{1}{q}} \le C\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}{\downarrow},\ f \not\equiv 0, \tag{20}$$

где константу C будем считать наименьшей из возможных, т. е. равной J_{pq}, где

$$J_{pq} := \sup_{0 \le f\downarrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)}\big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\big)^q d\lambda(x)\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}.$$

По теореме 4 получим

$$\begin{aligned} J_{pq} &= \sup_{0 \le f\downarrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)}\big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\big)^q d\lambda(x)\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}} \\ &\approx \sup_{0 \le f\downarrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Для характеризации правой части выражения (21) используем теоремы 1 и 3. При этом $J_{pq} \approx S_{pq}$, где

$$S_{pq} = \sup_{x \ge 0} \frac{\big(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q\,d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,x]} d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 < p \le q < \infty,$$

и

$$S_{pq} \approx \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)}\Bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q\,d\lambda\Bigg)^{\frac{r}{q}}\Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu\Bigg)^{-\frac{r}{q}} d\mu(x)\Bigg)^{\frac{1}{r}}, \quad 0 < q < p < \infty,$$

при условиях

$$\int\limits_{[0,\infty)} d\mu = \infty, \quad \Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu\Bigg)^{-1} \le c\int\limits_{[x,\infty)}\Bigg(\int\limits_{[0,t]} d\mu\Bigg)^{-2} d\mu(t).$$

В [12] рассматривается величина

$$H_{pq} := H_{\mathfrak{M}\downarrow}(B; p, q, \gamma, \mu, \lambda) := \sup_{0 \le f\downarrow}\left[\Bigg(\int\limits_0^\infty (Bf)^q\,d\gamma\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_0^\infty f^p\,d\mu\Bigg)^{-\frac{1}{p}}\right],$$

где

$$(Bf)(t) = \Bigg(\int\limits_t^\infty f\,d\lambda\Bigg), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и дается ее характеризация [12, теорема 1.1] при условии непрерывности интегралов $\Big(\int_{[0,t]} d\mu\Big)$, $\Big(\int_{[0,t]} d\gamma\Big)$ и невырожденности меры λ:

$$\lambda \in N_p \Leftrightarrow \left(\int_0^1 d\lambda\right) = 1, \quad \left(\int_1^\infty d\lambda\right) = \infty$$

в виде $H_{pq} \approx E_{pq} + F_{pq}$, при этом функционалы E_{pq} и F_{pq}, вообще говоря, независимы. Кроме указанных, конечность величины H_{pq} может быть обусловлена альтернативными парами условий [28]. Вместе с тем во многих задачах с дополнительными ограничениями на меры важно иметь характеризацию величины H_{pq} конечностью только одной из констант E_{pq} или F_{pq}. В [12] приведено условие [12, (1.21)] роста величины $\Big(\int_{[0,t]} d\mu\Big)$, при котором H_{pq} характеризуется только конечностью константы E_{pq}. Далее показываем, что при $d\lambda = d\gamma$ конечность H_{pq} также эквивалентна конечности только константы E_{pq}. При этом отметим, что условие [12, (1.21)] может нарушаться, даже если на меру μ наложить дополнительное ограничение (23).

Очевидно, что при $d\lambda = d\gamma$ конечность H_{pq} эквивалентна выполнению неравенства (20). Применяя к этому частному случаю теорему 1.1 из [12], находим, что $J_{pq} \approx E_{pq} + F_{pq}$, где

$$E_{pq} = \sup_{t\in[0,\infty)} \left[\left(\int_{[0,t]} \left(\int_{[x,t]} d\lambda\right)^q d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{[0,t]} d\mu\right)^{-\frac{1}{p}}\right]$$

при $0 < p \le q < \infty$,

$$E^r_{p,q} = \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,t]} \left(\int_{[x,t]} d\lambda\right)^q d\lambda(x)\right)^{\frac{r}{q}} \left(-d\left[\left(\int_{[0,t]} d\mu\right)^{-\frac{r}{p}}\right]\right)$$

при $0 < q < p < \infty$.

Сравним критерии, полученные для (20) с использованием теорем 1, 3 и 4. Учитывая [23, лемма 1], получим

$$\left(\int_{[0,t]} \left(\int_{[x,t]} d\lambda\right)^q d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{q}} \approx \left(\int_{[0,t]} \Lambda^q(x)\, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{22}$$

Отсюда при $0 < p \le q < \infty$

$$\left(\int_{[0,t]} \left(\int_{[x,t]} d\lambda\right)^q d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{[0,t]} d\mu\right)^{-\frac{1}{p}} \approx \left(\int_{[0,t]} \Lambda^q(x)\, d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{[0,t]} d\mu\right)^{-\frac{1}{p}},$$

т. е. $S_{pq} \approx E_{pq}$. Следовательно, $E_{pq} \gg F_{pq}$.

Для того чтобы установить аналогичный факт при $0 < q < p < \infty$, будем считать, что мера μ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{[t,\infty)} \left(\int_{[0,x]} d\mu\right)^{-\lambda} d\mu(x) \approx \left(\int_{[0,t]} d\mu\right)^{-\lambda+1}, \quad \lambda > 1. \tag{23}$$

В этом случае, снова используя (22), имеем

$$
\begin{aligned}
E_{pq}^r &= \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \bigg(\int\limits_{[x,t]} d\lambda\bigg)^q d\lambda(x)\bigg)^{\frac{r}{q}} \bigg(-d\bigg[\bigg(\int\limits_{[0,t]} d\mu\bigg)^{-\frac{r}{p}}\bigg]\bigg) \\
&\approx \int\limits_{[0,\infty)} \int\limits_{[0,x]} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^q\, d\lambda\bigg)^{\frac{r}{p}} \Lambda^q(t)\, d\lambda(t) \bigg(-d\bigg[\bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu\bigg)^{-\frac{r}{p}}\bigg]\bigg) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^q\, d\lambda\bigg)^{\frac{r}{p}} \Lambda^q(t)\, d\lambda(t) \int\limits_{[t,\infty)} \bigg(-d\bigg[\bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu\bigg)^{-\frac{r}{p}}\bigg]\bigg) \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^q\, d\lambda\bigg)^{\frac{r}{p}} \Lambda^q(t)\, d\lambda(t) \bigg(\int\limits_{[0,t]} d\mu\bigg)^{-\frac{r}{p}} \\
&\approx \int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^q\, d\lambda\bigg)^{\frac{r}{q}} \bigg(\int\limits_{[0,t]} d\mu\bigg)^{-\frac{r}{q}} d\mu(t),
\end{aligned}
$$

т. е. $S_{pq} \approx E_{pq}$ и $E_{pq} \gg F_{pq}$.

3.3. Рассмотрим интегральное неравенство на конусе неубывающих функций при $p, q > 0$:

$$
\bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \bigg(\int\limits_{[0,x]} f\, d\lambda\bigg)^q d\lambda(x)\bigg)^{\frac{1}{q}} \le C \bigg(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\, d\mu\bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}\uparrow,\ f \not\equiv 0. \tag{24}
$$

Используем результат, который является следствием теоремы 4:

$$
\frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}} \le \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} \big(\int\limits_{[0,x]} f\, d\lambda\big)^\gamma d\lambda(x)\big)^{\frac{1}{\gamma}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^\gamma \Lambda_*^\gamma\, d\lambda\big)^{\frac{1}{\gamma}}} \le \gamma, \quad f\uparrow,\ p, q > 0,
$$

где $\Lambda_*(t) = \int\limits_{[t,\infty)} d\lambda$. Снова учитывая теоремы 1 и 3, получаем $C = J_{pq}$, где

$$
\begin{aligned}
J_{pq} &= \sup_{0 \le f\uparrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty]} \big(\int\limits_{[0,x]} f\, d\lambda\big)^q d\lambda(x)\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\, d\mu\big)^{\frac{1}{p}}} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q \Lambda_*^q\, d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q \Lambda_*^q\, d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}} \\
&\approx \sup_{0 \le f\uparrow} \frac{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q \Lambda_*^q\, d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\, d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
J_{pq} \approx \sup_{x \ge 0} \frac{\big(\int\limits_{[x,\infty)} \Lambda_*^q\, d\lambda\big)^{\frac{1}{q}}}{\big(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu\big)^{\frac{1}{p}}}, \quad p \le q,
$$

и

$$J_{pq} \approx \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} \Lambda_*^q \, d\lambda \Bigg)^{\frac{r}{q}} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu \Bigg)^{-\frac{r}{q}} d\mu(x) \Bigg)^{\frac{1}{r}}, \quad q < p,$$

при условиях

$$\int\limits_{[0,\infty)} d\mu = \infty, \quad \Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu \Bigg)^{-1} \le c \int\limits_{[x,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} d\mu \Bigg)^{-2} d\mu(t).$$

Аналогично с помощью следствий из теорем 5 и 6 характеризуем неравенство (24) в случае $p, q < 0$. Имеем

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} f \, d\lambda \Bigg)^q d\lambda(x) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le C \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} f^p \, d\mu \Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}\!\uparrow, \ f \not\equiv 0.$$

$$J_{pq} = \sup_{0 \le f \uparrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty]} \Big(\int\limits_{[0,x]} f \, d\lambda \Big)^q d\lambda(x) \Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q \Lambda^q \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q \Lambda^q \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\approx \sup_{0 \le f \uparrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q \Lambda^q \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Положим $\tilde{f}(x) := f(x)^{-1}$. Тогда

$$J_{pq} = \sup_{0 \le \tilde{f} \downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde{f}^{-q} \Lambda^q \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde{f}^{-p} \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{0 \le \tilde{f} \downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde{f}^{-p} \, d\mu \Big)^{-\frac{1}{p}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde{f}^{-q} \Lambda^q \, d\lambda \Big)^{-\frac{1}{q}}}.$$

$$J_{pq} \approx \sup_{x \ge 0} \frac{\Big(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q \, d\lambda \Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,x]} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}}, \quad -\infty < p \le q < 0,$$

$$J_{pq} \approx \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} d\mu \Bigg)^{\frac{r}{p}} \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q \, d\lambda \Bigg)^{-\frac{r}{p}} \Lambda(x)^q \, d\lambda(x) \Bigg)^{-\frac{1}{r}}, \quad -\infty < q < p < 0,$$

при

$$\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda^q \, d\lambda = \infty, \quad \Bigg(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q \, d\lambda \Bigg)^{-1} \le c \int\limits_{[x,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^q \, d\lambda \Bigg)^{-2} \Lambda(t)^q \, d\lambda(t).$$

Рассмотрим аналогичное неравенство на конусе невозрастающих функций. Для неравенства

$$\Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} \Bigg(\int\limits_{[x,\infty)} f \, d\lambda \Bigg)^q d\lambda(x) \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le C \Bigg(\int\limits_{[0,\infty)} f^p \, d\mu \Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad f\!\downarrow, \ p, q < 0,$$

получим $C = J_{pq}$, где

$$J_{pq} = \sup_{0 \le f\downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty]} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\Big)^q d\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda_*^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda_*^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\approx \sup_{0\le f\downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda_*^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{0\le \tilde f\uparrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde f^{-q}\Lambda_*^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde f^{-p}\,d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{0\le \tilde f\uparrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde f^{-p}\,d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \tilde f^{-q}\Lambda_*^q\,d\lambda\Big)^{-\frac{1}{q}}}.$$

Получаем

$$J_{pq} \approx \sup_{x\ge 0} \frac{\Big(\int\limits_{[x,\infty)} \Lambda_*^q\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}}$$

при $-\infty < p \le q < 0$ и

$$J_{pq} \approx \left(\int\limits_{[0,\infty)} \left(\int\limits_{[x,\infty)} d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int\limits_{[x,\infty)} \Lambda_*^q\,d\lambda\right)^{-\frac{r}{p}} \Lambda_*(x)^q\,d\lambda(x)\right)^{-\frac{1}{r}}$$

при $-\infty < q < p < 0$ и условиях

$$\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda_*^q\,d\lambda = \infty, \quad \left(\int\limits_{[0,x]} \Lambda_*^q\,d\lambda\right)^{-1} \le c \int\limits_{[x,\infty)} \left(\int\limits_{[0,t]} \Lambda_*^q\,d\lambda\right)^{-2} \Lambda_*(t)^q\,d\lambda(t).$$

Наконец, используя изложенное выше, характеризуем неравенство

$$\left(\int\limits_{[0,\infty)} \left(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\mu\right)^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int\limits_{[0,\infty)} \left(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\right)^p d\lambda(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

при $p, q > 0$, где $f \in \mathfrak{M}\downarrow$, $f \not\equiv 0$. По теореме 4 получаем

$$C = \sup_{0\le f\downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\mu\Big)^q d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} \Big(\int\limits_{[x,\infty)} f\,d\lambda\Big)^p d\lambda(x)\Big)^{\frac{1}{p}}} \approx \sup_{0\le f\downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\Lambda^p\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}}.$$

Отсюда

$$J_{pq} \approx \sup_{0\le f\downarrow} \frac{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^q\Lambda^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,\infty)} f^p\Lambda^p\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}},$$

тем самым

$$J_{pq} = \sup_{x\ge 0} \frac{\Big(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q\,d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^p\,d\lambda\Big)^{\frac{1}{p}}}, \quad 0 < p \le q < \infty,$$

и

$$J_{pq} \approx \left(\int\limits_{[0,\infty)} \left(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^q \, d\mu \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \right)^{-\frac{r}{q}} \Lambda(x)^p \, d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{r}}, \quad 0 < q < p < \infty,$$

при условии

$$\int\limits_{[0,\infty)} \Lambda^p \, d\lambda = \infty, \quad \left(\int\limits_{[0,x]} \Lambda^p \, d\lambda \right)^{-1} \leq c \int\limits_{[x,\infty)} \left(\int\limits_{[0,t]} \Lambda^p \, d\lambda \right)^{-2} \Lambda(t)^p \, d\lambda(t).$$

Замечание. Имеют место неравенства, аналогичные рассмотренному выше, для неубывающих функций, а также при отрицательных показателях p, q.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arino M., Muckenhoupt B.* Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for non-increasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 320. P. 727–735.

2. *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Stud. Math. 1990. V. 96. P. 145–158.

3. *Степанов В. Д.* Об ограниченности линейных интегральных операторов на классе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 222–224.

4. *Stepanov V. D.* The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 338. P. 173–186.

5. *Stepanov V. D.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. 1993. V. 48. P. 465–487.

6. *Carro M., Soria J.* Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator // J. Funct. Anal. 1993. V. 112. P. 480–494.

7. *Carro M., Soria J.* Boundedness of some integral operators // Canad. J. Math. 1993. V. 45. P. 1155–1166.

8. *Heinig H. P., Maligranda L.* Weighted inequalities for monotone and concave functions // Stud. Math. 1995. V. 116. P. 133–165.

9. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54. P. 89–101.

10. *Gol'dman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48. P. 959–979.

11. *Carro M. J., Pick L., Soria J., Stepanov V. D.* On embeddings between classical Lorentz spaces // Math. Inequal. Appl. 2001. V. 4. P. 397–428.

12. *Гольдман М. Л.* Точные оценки норм операторов типа Харди на конусах квазимонотонных функций // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 232. С. 115–143.

13. *Sinnamon G.* Transferring monotonicity in weighted norm inequalities // Collect. Math. 2003. V. 54. P. 181–216.

14. *Sinnamon G.* Hardy's inequality and monotonicity // Function spaces and nonlinear analysis. Prague: Math. Inst. Acad. Sci. Czech Rep., 2005. P. 292–310.

15. *Persson L.-E., Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Equivalence of Hardy-type inequalities with general measures on the cones of non-negative respective non-increasing functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. V. 134. P. 2363–2372.

16. *Bennett G., Grosse-Erdmann K.-G.* Weighted Hardy inequality for decreasing sequences and functions // Math. Ann. 2006. V. 334. P. 489–531.

17. *Johansson M., Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Hardy inequality with three measures on monotone functions // Math. Inequal. Appl. 2008. V. 11. P. 393–413.

18. *Ойнаров Р.* Двусторонние оценки норм некоторых классов интегральных операторов // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1993. Т. 204. С. 240–250.

19. *Bloom S., Kerman R.* Weighted norm inequalities for operators of Hardy type // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113, N 1. P. 135–141.

20. *Stepanov V. D.* Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators // J. London Math. Soc. 1994. V. 50, N 2. P. 105–120.
21. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type. New Jersey; London; Singapore; Hong Kong: World Sci., 2003.
22. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen: Vydavatelsky Servis, 2007.
23. *Прохоров Д. В.* Неравенство Харди с тремя мерами // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2006. Т. 255. С. 233–245.
24. *Prokhorov D. V.* Inequalities of Hardy type for a class of integral operators with measures // Anal. Math. 2007. V. 33. P. 199–225.
25. *Persson L.-E., Popova O. V., Stepanov V. D.* Two-sided Hardy-type inequalities for monotone functions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2010. V. 55, N 8–10. P. 973–989.
26. *Prokhorov D. V.* Weighted Hardy inequalities for negative indices // Publ. Mat. 2004. V. 48. P. 423–443.
27. *Степанов В. Д., Перссон Л. Е., Попова О. В.* Двусторонние неравенства типа Харди для монотонных функций // Докл. РАН. 2009. Т. 429, № 2. С. 159–162.
28. *Goldman M. L.* On equivalent criteria for the boundedness of Hardy type operators on the cone of decreasing functions // Anal. Math. 2011. V. 37. P. 83–102.

Статья поступила 30 декабря 2010 г.

Попова Ольга Владимировна
Российский университет дружбы народов,
кафедра математического анализа и теории функций,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
ovpopova@inbox.ru