*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6*

*УДК 517.972/974*

# ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТЬ СНИЗУ И РЕЛАКСАЦИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С $p(x)$–, $p(x,u)$–РОСТОМ

**М. А. Сычев**

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы полунепрерывности снизу и релаксации для интегральных функционалов, удовлетворяющих условиям $p(x)$- и $p(x,u)$-роста. Данные функционалы в последнее время интенсивно изучались в теории эллиптических и параболических задач и в рамках вариационного исчисления. Излагаемая теория основана на следующих результатах: на замечательном результате Кристенсена о характеризации однородных $p$-градиентных мер Янга через их суммируемость, на более раннем результате Чжана об аппроксимации градиентных мер Янга с компактным носителем, на результате Жикова о плотности в энергии регулярных функций для интеграндов с $p(x)$-ростом, на подходе автора к мерам Янга как к измеримым функциям со значениями в метрическом пространстве с метрикой, имеющей интегральное представление.

**Ключевые слова:** интегральный функционал, мера Янга, полунепрерывность снизу, полунепрерывная снизу оболочка, квазивыпуклость.

## § 1. Введение

В работе мы развиваем теорию слабой сходимости для интегральных функционалов, удовлетворяющих условиям $p(x)$- и $p(x,u)$-роста.

Напомним, что функция $L:\Omega\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{m\times n}\to\mathbf{R}$ называется *интеграндом Каратеодори*, если для каждого $\epsilon>0$ существует компактное множество $\Omega_\epsilon\subset\Omega$ такое, что $L:\Omega_\epsilon\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{m\times n}\to\mathbf{R}$ непрерывно и $\operatorname{meas}(\Omega\setminus\Omega_\epsilon)\le\epsilon$.

Интегранд Каратеодори $L$ *удовлетворяет условию $p(x)$-роста*, если

$$\begin{gathered} c_1|v|^{p(x)}+c_2\le L(x,u,v)\le c_3|v|^{p(x)}+c_4,\\ c_3\ge c_1>0,\ 1<p_1\le p(x)\le p_2<\infty. \end{gathered}\tag{1.1}$$

Более общо, интегранд Каратеодори $L$ *удовлетворяет условию $p(x,u)$-роста*, если

$$\begin{gathered} c_1|v|^{p(x,u)}+c_2\le L(x,u,v)\le c_3|v|^{p(x,u)}+c_4,\\ c_3\ge c_1>0,\ 1<p_1\le p(x,u)\le p_2<\infty. \end{gathered}\tag{1.2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00221) и программы фундаментальных исследований № 2 Президиума РАН (проект 121). Подход автора к теории мер Янга был развит во время его пребывания в ICTP и в SISSA (Триест, Италия) в 1995–97 гг. Дальнейшая работа имела место в математическом департаменте университета Карнеги Меллон (Питтсбург, США) и в Макс-Планк институте (Лейпциг, Германия).

Полагаем

$$J(u) := \int_{\Omega} L(x, u(x), Du(x))\, dx, \tag{1.3}$$

если $L(\cdot, u(\cdot), Du(\cdot)) \in L^1$. В противном случае полагаем $J(u) = \infty$. Условия (1.1), (1.2) гарантируют, что $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, если $J(u) < \infty$.

Функции энергии типа (1.1), (1.3) были предложены для моделирования различных задач прикладного анализа (см. обзорную работу [1]). Позднее была рассмотрена теория слабой сходимости для функционалов (1.1), (1.3) (см. [2–5]). В этих работах изучались вопросы полунепрерывности функционалов снизу и построения полунепрерывной снизу оболочки.

Цель данной работы — доказать оптимальные теоремы о полунепрерывности снизу и о полунепрерывной снизу оболочке в случае интегральных функционалов, удовлетворяющих условиям (1.1), (1.2). Отметим, что работы предыдущих авторов содержат результаты в этом направлении для функционалов (1.1), (1.3). Однако был рассмотрен случай интеграндов $L = L(x, Du)$, а в случае $L = L(x, u, Du)$ предполагались дополнительные ограничения на поведение по $u$. Здесь мы избегаем этих ограничений, что является преимуществом нашего подхода, основанного на теории градиентных мер Янга. Ранее теория градиентных мер Янга уже показала свое преимущество при изучении задач со стандартным ростом, т. е. когда $p(x) = p$ (см. [6]). Мы также рассматриваем более общий случай (1.2), так как наш подход позволяет это делать. Отметим, что центральным свойством, используемым при изучении задач (1.2), (1.3), является возможность аппроксимировать в энергии функции с конечной энергией более гладкими. Сформулируем это свойство. Если $\Omega$ — ограниченная область с липшицевой границей и $\epsilon > 0$, то полагаем $\Omega^\epsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Будем говорить, что функция $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ с $J(u) < \infty$ *удовлетворяет условию* (C), если существуют $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m) \cap C^1(\Omega^{1/k}; \mathbf{R}^m)$, $k \in \mathbf{N}$, такие, что

$$u_k \to u \text{ в } W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m), \quad J(u_k) \to J(u),\ k \to \infty, \quad u_k|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega},\ k \in \mathbf{N}. \tag{C}$$

Как мы уже упомянули, наш подход связан с использованием теории мер Янга. В § 2 мы формулируем основные результаты общей теории мер Янга, базируясь на работах автора [6–8]. В § 3 представляем теорию градиентных мер Янга. В § 4 доказываем теорему о полунепрерывности снизу интегральных функционалов (1.3), удовлетворяющих условиям (1.1) или (1.2); § 5 посвящен теореме о полунепрерывной снизу оболочки для таких функционалов.

Всюду в данной работе полагаем, что $\Omega$ — липшицева ограниченная область, если не оговорено противное. Замыкание $\Omega$ будем обозначать через $\operatorname{cl}\Omega$. Для $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ считаем, что интеграл $J(u; \widetilde{\Omega})$ в (1.3) берется по множеству $\widetilde{\Omega}$; через $B(x, \epsilon)$ обозначаем шар с центром в $x$ и радиусом $\epsilon > 0$, через $l_A$ — аффинную функцию с градиентом равным $A$; $\langle L; \nu \rangle$ — действие меры $\nu$ на непрерывную функцию $L$. Используем обозначения $\rightharpoonup$ и $\to$ для слабой и сильной сходимости соответственно.

Результаты данной работы анонсированы в заметке [9].

## § 2. Общая теория мер Янга

Напомним стандартное определение мер Янга.

Определение 2.1. Семейство $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ вероятностных мер $\nu_x \in C_0(\mathbf{R}^l)'$, где $\Omega$ — ограниченное измеримое подмножество $\mathbf{R}^n$, называется *мерой Янга*, если существует последовательность измеримых функций $\xi_k : \Omega \to \mathbf{R}^l$ такая, что для каждой $\Phi \in C_0(\mathbf{R}^l)$ выполнено

$$\Phi(\xi_k) \rightharpoonup^* \overline{\Phi} \text{ в } L^\infty(\Omega), \quad \text{где } \overline{\Phi}(x) = \langle \Phi; \nu_x \rangle.$$

Мера Янга называется *однородной* в случае $\nu_x = \nu$ для п. в. $x \in \Omega$.

Напомним, что слабая* сходимость элементов множества $M_c(\mathbf{R}^l)$ всех мер Радона с носителем $\mathbf{R}^l$ и с полной вариацией, ограниченной константой $c$, эквивалентна сходимости в метрике

$$\rho(\mu, \nu) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \|\Phi_i\|_C} |\langle \Phi_i; \mu \rangle - \langle \Phi_i; \nu \rangle|,$$

где $\{\Phi_i\} \subset C_c^\infty(\mathbf{R}^l)$ — последовательность, плотная в пространстве

$$C_0(\mathbf{R}^l) = \{\Phi \in C(\mathbf{R}^l) : \lim_{v \to \infty} |\Phi(v)| = 0\}.$$

Индекс $c$ в $C_c^\infty$ означает компактность носителя.

Известно, что $(M_c(\mathbf{R}^l), \rho)$ является компактным метрическим пространством. Это легко следует из теоремы Рисса о представлении непрерывных линейных функционалов. Действительно, если $\mu_n \in M_c(\mathbf{R}^l)$, то существует подпоследовательность $\mu_{n_k}$ такая, что последовательность $\langle \Phi_i; \mu_{n_k} \rangle$ сходится для каждого $i \in \mathbf{N}$. Тогда функционал $f : C_0(\mathbf{R}^l) \to \mathbf{R}$, который определяется для каждого $\Phi_i$ как

$$f(\Phi_i) := \lim_{k \to \infty} \langle \Phi_i; \mu_{n_k} \rangle,$$

является линейным непрерывным функционалом, ограниченным по норме константой $c$. Из теоремы Рисса вытекает, что $f(\cdot) = \langle \cdot; \mu \rangle$ для некоторой $\mu \in M_c(\mathbf{R}^l)$. Тогда $\rho(\mu_{n_k}, \mu) \to 0$ при $k \to \infty$.

Метрика $\rho$ также характеризует меры Янга!

**Теорема 2.2.** *Семейство вероятностных мер $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ является мерой Янга, если и только если функция $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ измерима* (здесь $c \geq 1$).

Разумеется, некоторые характеризации мер Янга уже были известны. Следующее утверждение указывает другую удобную характеризацию, предложенную Тартаром (см. [10]).

**Предложение 2.3.** *Пусть $\Omega$ — ограниченное измеримое подмножество $\mathbf{R}^n$. Пусть также $\nu_x \in M_c$ для п. в. $x \in \Omega$. Тогда семейство $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ имеет измеримые действия на элементы пространства $C_0(\mathbf{R}^l)$, если и только если $\nu : \Omega \to (M_c, \rho)$ является измеримым отображением.*

Тартар предложил использовать объекты, которые мы называем мерами Янга, под именем параметризованных мер и ввел эти объекты независимо с целью изучать вопросы слабой сходимости в теории уравнений с частными производными. Янг, возможно, намеревался дать ответ на вопрос 20-й проблемы Гильберта [11] относительно расширения области определения интегральных функционалов для того, чтобы сделать применимыми прямые методы вариационного исчисления для установления существования решения (см. [12]). Действительно, при небольших дополнительных ограничениях на рост интеграндов снизу верны теорема о компактности последовательности мер Янга и теорема о полунепрерывности значений интегрального функционала на ней (см., например, [8]).

Однако удобнее подход, использующий характеризацию, предлагаемую теоремой 2.2, так как измеримые функции $\Omega \to (M_c, \rho)$ обладают рядом абстрактных свойств (см. теоремы 2.4, 2.5) и позволяют использовать количественные оценки, предлагаемые леммой 2.6. Другим преимуществом является возможность проверять принадлежность вероятностных мер различным классам однородных мер Янга (см. теорему 2.9).

**Теорема 2.4.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — измеримое множество и $(K, d)$ — компактное метрическое пространство. Функция $\xi : \Omega \to (K, d)$ измерима в обычном лебеговском смысле, если и только если она обладает свойством Лузина: для каждого $\epsilon > 0$ существует компактное подмножество $\Omega_\epsilon$ множества $\Omega$ такое, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \le \epsilon$ и функция $\xi|_{\Omega_\epsilon}$ непрерывна.*

Теорема 2.4 влечет, что каждая мера Янга $\nu : \Omega \to (M_1, \rho)$ имеет лебеговские точки п. в. в $\Omega$, т. е. для п. в. $x \in \Omega$ справедливо

$$\frac{1}{\operatorname{meas} B(x,\epsilon)} \int\limits_{B(x,\epsilon)} \rho(\nu(x), \nu(y))\, dy \to 0, \quad \epsilon \to 0. \tag{2.1}$$

Пусть $\Omega$ — ограниченное измеримое подмножество $\mathbf{R}^n$ и $(K, d)$ — компактное метрическое пространство. Отображение $V : \Omega \to 2^K$ называется *замкнутым измеримым многозначным отображением*, если множества $V(x) \subset K$ замкнуты для п. в. $x \in \Omega$ и для каждого замкнутого подмножества $C$ множества $K$ множество $\{x \in \Omega : V(x) \cap C \neq \varnothing\}$ измеримо.

**Теорема 2.5.** *Если $V : \Omega \to 2^K$ — замкнутое измеримое многозначное отображение, то существует измеримый селектор, т. е. измеримая функция $\nu : \Omega \to (K, d)$ такая, что $\nu(x) \in V(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.*

Данная теорема впервые доказана в [13].

Сходимость $\langle \Phi; \nu^k_{(\cdot)} \rangle \rightharpoonup^* \langle \Phi; \nu_{(\cdot)} \rangle$ в $L^\infty$ означает сходимость интегралов $\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu^k_x \rangle\, dx$ к интегралу $\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu_x \rangle\, dx$ для всех измеримых подмножеств $\widetilde{\Omega}$ в $\Omega$. С другой стороны, функционал

$$\Phi \to \frac{1}{\operatorname{meas} \widetilde{\Omega}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu_x \rangle\, dx$$

является действием меры Радона на $\Phi$ (эта мера обычно обозначается через $\operatorname{Av}(\nu_x)_{x \in \widetilde{\Omega}}$):

$$\langle \Phi; \operatorname{Av}(\nu_x)_{x \in \widetilde{\Omega}} \rangle := \frac{1}{\operatorname{meas} \widetilde{\Omega}} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle \Phi; \nu_x \rangle\, dx \quad \forall \Phi \in C_0(\mathbf{R}^l).$$

Для того чтобы сравнить действия двух семейств мер $(\nu^1_x)_{x \in \Omega}$ и $(\nu^2_x)_{x \in \Omega}$, мы должны оценить расстояние между мерами $\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x \in \widetilde{\Omega}}$ и $\operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x \in \widetilde{\Omega}}$ в $\rho$-метрике.

**Лемма 2.6.** *Пусть $\nu^1, \nu^2 : \Omega \to (M_c, \rho)$ — измеримые функции.*

1. *Если $\rho\big(\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x \in \widetilde{\Omega}}, \operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x \in \widetilde{\Omega}}\big) \le \delta$ с $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ таким, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}) \le \delta \operatorname{meas} \Omega$, то $\rho\big(\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x \in \Omega}, \operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x \in \Omega}\big) \le (2c + 1)\delta$.*

2. *Если $\rho(\nu^1_x, \nu^2_x) \le \delta$ для п. в. $x \in \widetilde{\Omega} \subset \Omega$ с $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}) \le \delta \operatorname{meas} \Omega$, то $\rho\big(\operatorname{Av}(\nu^1_x)_{x \in \Omega}, \operatorname{Av}(\nu^2_x)_{x \in \Omega}\big) \le (2c + 1)\delta$.*

Утверждения 2.2–2.6 предлагают свойства мер Янга, достаточные для построения общей теории этих объектов и прежде всего получения результатов о существовании мер Янга [8].

**Теорема 2.7** (существование). *Пусть $\theta : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция такая, что $\theta(v) \to \infty$ при $|v| \to \infty$, и $\xi_k : \Omega \to \mathbf{R}^l$ — последовательность измеримых функций таких, что*

$$\int\limits_{\Omega} \theta(\xi_k(x))\,dx \le c < \infty, \quad k \in \mathbf{N}.$$

*Тогда $\xi_k$ содержит подпоследовательность, порождающую меру Янга.*

Следующий результат показывает, как ведут себя интегральные функционалы на мерах Янга.

**Теорема 2.8.** *Пусть $\Omega$ — ограниченное измеримое подмножество $\mathbf{R}^n$ и $L : \Omega \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+ := \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$) — интегранд Каратеодори, ограниченный снизу. Пусть также $\xi_i : \Omega \to \mathbf{R}^l$ порождают меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$.*

*Тогда*

$$\liminf_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} L(x, \xi_i(x))\,dx \ge \int\limits_{\Omega} \langle L(x,\cdot); \nu_x\rangle\,dx.$$

*Более того,*

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{\Omega} L(x, \xi_i(x))\,dx \to \int\limits_{\Omega} \langle L(x,\cdot); \nu_x\rangle\,dx < \infty,$$

*если и только если функции $L(\cdot, \xi_i(\cdot))$, $i \in \mathbf{N}$, равномерно суммируемы. В этом случае $L(\cdot, \xi_i(\cdot)) \rightharpoonup \langle L(\cdot, v); \nu_{(\cdot)}\rangle$ в $L^1$.*

Следует упомянуть связь с так называемой «biting lemma», которая утверждает, что из последовательности измеримых функций $f_k$ с $\|f_k\|_{L^1} \le \mathrm{const}$ мы можем выделить подпоследовательность (обозначения не меняем) и последовательность измеримых множеств $E_k$ с $E_{k+1} \subset E_k$, $k \in \mathbf{N}$, и с $\operatorname{meas} E_k \to 0$, $k \to \infty$, такие, что $f_k \rightharpoonup f$ в $L^1(\Omega \setminus E_k)$ $\forall k \in \mathbf{N}$ (см. [14]). Простое и элементарное доказательство содержится в лемме 3.2 из [15].

В случае, если $f_k := L(\cdot, \xi_k(\cdot))$ равномерно ограничены в $L^1$, мы можем применить эту лемму и теорему 2.8, чтобы получить $f(\cdot) = \langle L(\cdot, v); \nu_{(\cdot)}\rangle$. Таким образом, меры Янга улавливают только осцилляции последовательности $f_k$ и позволяют получить самый сильный результат по полунепрерывности снизу. Впервые подобный результат по полунепрерывности снизу был получен в [16] и затем в [17].

**Теорема 2.9.** *Пусть $\theta : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^+$ — непрерывная функция, имеющая по крайней мере линейный рост на бесконечности. Пусть $M(A)$ — выпуклый конус в множестве вероятностных мер с центром масс в $A$. Тогда вероятностная мера $\mu$ с центром масс в $A$ принадлежит замыканию $M(A)$ в энергии, т. е. для некоторой последовательности $\nu_k \in M(A)$ выполнены сходимости $\nu_k \rightharpoonup^* \mu$ и $\langle\theta; \nu_k\rangle \to \langle\theta; \mu\rangle$, $k \to \infty$, если и только если*

$$\langle\theta + \Phi; \mu\rangle \ge \inf_{\nu\in M(A)} \langle\theta + \Phi; \nu\rangle \tag{2.2}$$

*для каждой функции $\Phi \in C_c^\infty$.*

Доказательство теоремы 2.9 основано на двойственных аргументах, которые впервые предложены в [18]. Эти аргументы упрощаются, если использовать интегральную форму метрики $\rho$, что позволяет также перенести результат на общий случай (2.2). Последний результат применяется для характеризации однородных мер Янга, порождаемых градиентами функций из различных классов функций (см. теорему 3.8).

Доказательство всех этих результатов на основе характеризации, данной теоремой 2.2, и свойств мер Янга, данных теоремами 2.4–2.6, изложено в работе [8]. Более раннее изложение нашего подхода к мерам Янга может быть найдено в работах [6, 7] и их препринтных версиях.

Всюду далее в данной работе будем использовать также следующий стандартный факт.

**Предложение 2.10.** *Пусть $\Omega$ — ограниченное измеримое подмножество $\mathbf{R}^n$, и пусть последовательность $\xi_k : \Omega \to \mathbf{R}^l$ порождает меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$. Тогда $\xi_k$ сходится по мере, если и только если $\nu_x = \delta_{\xi(x)}$ п. в. в $\Omega$.*

В случае, если $\nu$ является вероятностной мерой с носителем в $\mathbf{R}^l$ и центром масс в $A \in \mathbf{R}^l$, будем говорить, что вероятностная мера $\tilde\nu$ *получена переносом центра масс в* $\widetilde{A}$ если

$$\langle \Phi(\cdot); \tilde\nu\rangle = \langle \Phi(\cdot - A + \widetilde{A}); \nu\rangle \quad \forall \Phi \in C_0(\mathbf{R}^l). \tag{2.3}$$

## § 3. Теория градиентных мер Янга

Так как в этом параграфе будем рассматривать меры Янга, порожденные градиентами соболевских функций, понадобится следующее

Определение 3.1. Пусть непрерывный интегранд $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ ограничен снизу, и пусть вероятностная мера $\nu$ имеет конечное действие на $L$ и центр масс в $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Будем называть эту меру *однородной $L$-градиентной мерой Янга*, если существует последовательность $u_k \in l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ такая, что $Du_k$ порождает $\nu$ как меру Янга, т. е.

$$\Phi(Du_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \Phi; \nu\rangle \text{ в } L^\infty(\Omega) \quad \text{для всех } \Phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{m\times n}),$$

и если $L(Du_k) \rightharpoonup \langle L; \nu\rangle$ в $L^1$ при $k \to \infty$.

Предложение 3.3 позволяет утверждать, что это определение не зависит от области $\Omega$.

Заметим, что $u_k \rightharpoonup l_A$ в $W^{1,1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, если $L$ имеет по крайней мере линейный рост на бесконечности. В случае, когда $\nu$ имеет компактный носитель, называем меру коротко: *однородная градиентная мера*, т. е. мы не идентифицируем меру ни с каким интеграндом, так как в этом случае существует последовательность, ограниченная в $l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, градиенты которой порождают $\nu$, как показал Чжан [19] (см. также теорему 3.6 ниже).

В случае $L(\cdot) = |\cdot|^p$ однородные $L$-градиентные меры Янга имеют более традиционное название *однородных $p$-градиентных мер Янга*, как было введено в [20, 21].

Типичный способ сконструировать однородную $L$-градиентную меру Янга предложен леммой 3.2. Пусть $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ и $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Тогда $\mathrm{Av}(A + D\phi)_\Omega$ является вероятностной мерой, определенной как

$$\langle \Phi; \mathrm{Av}(A + D\phi)_\Omega\rangle := \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \int\limits_\Omega \Phi(A + D\phi(x))\, dx \quad \forall \Phi \in C_0(\mathbf{R}^{m\times n}).$$

**Лемма 3.2.** *Пусть $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является непрерывным интеграндом и $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Тогда мера $\mathrm{Av}(A + D\phi)_\Omega$ является однородной $L$-градиентной мерой Янга и*

$$\int_\Omega L(A + D\phi(x))\,dx = \langle L; \mathrm{Av}(A + D\phi)_\Omega\rangle \operatorname{meas}\Omega.$$

Доказательство данной леммы следует из фольклорного результата, который широко используется в литературе и все же, по-видимому, имеет первого автора в лице Н. Н. Боголюбова [22].

**Предложение 3.3.** *Пусть $\widetilde{\Omega}, \Omega$ являются открытыми подмножествами $\mathbf{R}^n$ с $\operatorname{meas}(\partial\Omega) = 0$ и $0 \in \Omega$. Пусть $u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$. Для $\epsilon > 0$ рассмотрим разбиение $\widetilde{\Omega}$ на подмножества $x_i + \epsilon_i\Omega$ с $\epsilon_i < \epsilon$, $i \in \mathbf{N}$, и множество нулевой меры (см., например, [23, с. 109]). Определим $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\widetilde{\Omega}; \mathbf{R}^m)$ следующим образом:*

$$\tilde{u}(x) = \epsilon_i u((x - x_i)/\epsilon_i) \quad \text{для } x \in (x_i + \epsilon_i\Omega),\ i \in \mathbf{N},$$
$$\tilde{u}(x) = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

*Тогда $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\widetilde{\Omega}; \mathbf{R}^m)$ и для каждой непрерывной неотрицательной функции $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ и каждого $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ справедливо*

$$\frac{1}{\operatorname{meas}(\Omega)} \int_\Omega L(A + Du(x))\,dx = \frac{1}{\operatorname{meas}\widetilde{\Omega}} \int_{\widetilde{\Omega}} L(A + D\tilde{u}(x))\,dx,$$

$$\frac{\|\tilde{u}\|_{L^p(\Omega)}}{\operatorname{meas}\widetilde{\Omega}} \le \frac{\epsilon\|u\|_{L^p(\Omega)}}{\operatorname{meas}\Omega}.$$

Доказательство леммы 3.2. Пусть $\tilde{u}_k$ — функции из предложения 3.3 с $\epsilon \le 1/k$, $k \in \mathbf{N}$. Покажем, что $D\tilde{u}_k$ порождают меру $Av(A + D\phi)_\Omega$.

В силу теоремы 2.8 некоторая подпоследовательность $\tilde{u}_{k_l}$ порождает меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$. Пусть $x_0$ — лебеговская точка $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, и пусть для всех $l$ выполнено $x_0 \in x_{i_l} + \epsilon_{i_l}\Omega$ с подходящим $i_l \in \mathbf{N}$. Тогда $\mathrm{Av}(A + D\tilde{u}_{k_l})_{x_{i_l}+\epsilon_{i_l}\Omega} = Av(A + D\phi)_\Omega$, $l \in \mathbf{N}$, в силу предложения 3.3. С другой стороны, $\mathrm{Av}(A + D\tilde{u}_{k_l})_{x_{i_l}+\epsilon_{i_l}\Omega} \rightharpoonup^* \mathrm{Av}(\nu_x)_{x_{i_l}+\epsilon_{i_l}\Omega}$, где $\mathrm{Av}(\nu_x)_{x_{i_l}+\epsilon_{i_l}\Omega} \rightharpoonup^* \nu_{x_0}$ при $l \to \infty$ (см. лемму 2.6). Таким образом, $\nu_{x_0} = \mathrm{Av}(A+D\phi)_\Omega$. Тогда мера Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ однородна и равна $\mathrm{Av}(A + D\phi)_\Omega$. Так как любая подпоследовательность $\tilde{u}_k$ содержит подпоследовательность, градиенты которой порождают $\mathrm{Av}(A + D\phi)_\Omega$, градиенты исходной последовательности $\tilde{u}_k$ также порождают эту меру. □

Нам также потребуется иметь дело с неоднородными мерами Янга (зависящими от $x$), порожденными градиентами соболевских функций.

Определение 3.4. Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ — интегранд Каратеодори, имеющий по крайней мере линейный рост $L(x, u, v)$ по $v$ на бесконечности. Пусть также $u_k \in W^{1,1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $k \in \mathbf{N}$, — последовательность такая, что $Du_k$ порождает меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ и обладает свойством

$$L(\cdot, u_k(\cdot), Du_k(\cdot)) \rightharpoonup \langle L(\cdot, u(\cdot), v); \nu_{(\cdot)}\rangle \quad \text{в } L^1. \tag{3.1}$$

Тогда $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ называется *$L$-градиентной мерой Янга.*

Заметим, что (3.1) и по крайней мере линейный рост на бесконечности влекут, что последовательность $u_k$ слабо сходится в $W^{1,1}(\Omega;\mathbf{R}^m)$ к $u \in W^{1,1}(\Omega;\mathbf{R}^m)$, где $Du(\cdot)$ являются центрами масс для $\nu_{(\cdot)}$.

Если $L(\cdot) = |\cdot|^p$, то мера Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ в (3.1) называется *p-градиентной мерой Янга.* В этом случае (3.1) выполнено для любого интегранда Каратеодори $L$, который удовлетворяет оценкам (1.1) с постоянным $p$ (см. теорему 2.8).

Если $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ имеет компактный носитель, то называем эту меру коротко: *градиентная мера Янга*, так как можно использовать любой локально ограниченный интегранд, как показывает результат Чжана, упомянутый ранее (здесь мера порождается градиентами функций, ограниченных в $W^{1,\infty}$).

Заметим также, что в определении не требуем, чтобы $u_k$ имели то же граничное значение, что и $u$, как в однородном случае, рассмотренном в определении 3.1, где граничные условия были зафиксированы.

Следующий результат является центральным в теории градиентных мер Янга и принадлежит Кристенсену [21]. Чтобы его сформулировать, используем определение лебеговской точки для мер Янга (см. текст после теоремы 2.4) и объединяем теоремы 3.11 и 3.15 из [21].

**Теорема 3.5** [21]. *Пусть $L : \Omega\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ — интегранд Каратеодори, имеющий по крайней мере линейный рост $L(x,u,v)$ по $v$ на бесконечности. Пусть $u_k$, $k \in \mathbf{N}$, ограничены в $W^{1,1}$, и пусть $Du_k$ порождают меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ со свойством* (3.1).

*Тогда для каждой лебеговской точки $x \in \Omega$ отображений $\nu : \Omega \to (M_1,\rho)$, $x \to \langle L;\nu_x\rangle$ мера $\nu_x$ является однородной 1-градиентной мерой Янга. Если дополнительно $\langle|\cdot|^p;\nu_x\rangle < \infty$, $p > 1$, то $\nu_x$ является однородной p-градиентной мерой Янга.*

*В частности, если $\nu_k$ являются однородными p-градиентными мерами Янга, $p > 1$, с равномерно ограниченными действиями $\langle|\cdot|^p;\nu_k\rangle$, $k \in \mathbf{N}$, и $\nu_k \rightharpoonup^* \nu$, то $\nu$ также является однородной p-градиентной мерой Янга.*

Мы также приводим результат Чжана, который уже упоминали в определениях градиентных мер Янга (как однородных, так и неоднородных) в случае компактного носителя.

**Теорема 3.6** [19]. *Если $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является $L$-градиентной мерой Янга, где $L$ имеет по крайней мере линейный рост на бесконечности, с носителем из $B(0,M)$, то существует $M_1 > 0$ такое, что эта мера порождается градиентами $Du_k$ последовательности, которая слабо* сходится в $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^m)$ к $u \in W^{1,\infty}$, при этом $Du_k \in B(0,M_1)$ п. в. в $\Omega$, $u_k|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$.*

**Следствие 3.7.** *Пусть $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^m)$ и $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является мерой Янга с компактным носителем. Предположим, что для п. в. $x \in \Omega$ мера $\nu_x$ является однородной градиентной мерой Янга с центром масс в $Du(x)$. Тогда $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ — градиентная мера Янга.*

Данный результат утверждает, что, имея однородные градиентные меры Янга с центром масс в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$, мы можем склеить их, чтобы получить неоднородную градиентную меру Янга.

Доказательство. Можно аппроксимировать $u$ в $W^{1,1}$-норме последовательностью кусочно аффинных функций $u_k$, ограниченных в $W^{1,\infty}$-норме. Напомним, что $w$ является кусочно аффинной, если существуют декомпозиция $\Omega$ в не более чем счетный набор открытых липшицевых множеств $\Omega_j$, $j \in \mathbf{N}$, и множество нулевой меры, где для каждого $j \in \mathbf{N}$ функция $w|_{\Omega_j}$ аффинна.

Пусть $x_0$ является лебеговской точкой функции $x \to \nu_x \in (M_1, \rho)$. Тогда для $k \in \mathbf{N}$ существует $\delta_0 = \delta_0(x_0, k)$ такое, что для всех $\delta \leq \delta_0$ выполнено

$$\frac{1}{\operatorname{meas} B(x_0,\delta)} \int\limits_{B(x_0,\delta)} \rho(\nu_x, \nu_{x_0})\, dx \leq \frac{1}{k}. \tag{3.2}$$

Мы можем выделить конечный набор непересекающихся шаров $B(x_j, \delta_j)$, $j \in \{1, \dots, M\}$, такой, что (3.2) выполнено для каждого шара и, более того,

$$\operatorname{meas}\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{M} B(x_j, \delta_j)\right) \leq \frac{1}{k}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим меру Янга $(\tilde{\nu}_x)_{x\in\Omega}$, которая равна $\nu_{x_j}$ с центром масс, перенесенным в $Du(x)$ для $x \in B(x_j, \delta_j)$, $j \in 1, \dots, M$, $\tilde{\nu}_x = \delta_{Du(x)}$ для остальных $x \in \Omega$.

Если установим, что $(\tilde{\nu})_{x\in\Omega}$ является градиентной мерой Янга, то также получим этот факт для изначальной меры Янга в силу (3.2), (3.3). Здесь нам нужно, чтобы последовательности, порождающие $(\tilde{\nu}_x)_{x\in\Omega}$, были равномерно ограничены в $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, однако это верно ввиду теоремы 3.6. Поэтому сначала установим, что $(\tilde{\nu}_x)_{x\in\Omega}$ является градиентной мерой Янга.

Теперь определяем меры $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}$, соответствующие $u_k$, $k \in \mathbf{N}$. Для $x \in B(x_j, \delta_j)$ полагаем $\nu_x^k$ равной мере, полученной переносом центра масс $\nu_{x_j}$ в $Du_k(x)$. Для $x \in \left(\Omega \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{M} B(x_j, \delta_j)\right)$ полагаем $\nu_x^k = \delta_{Du_k(x)}$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда сходимость $u_k \to u$ в $W^{1,1}$ влечет

$$\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega} \rightharpoonup^* (\tilde{\nu}_x)_{x\in\Omega}. \tag{3.4}$$

Меры $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}$ являются градиентными мерами. Действительно, для каждого $k \in \mathbf{N}$ можно разбить $\bigcup\limits_{j=1}^{M} B(x_j, \delta_j)$ на не более чем счетный набор открытых липшицевых множеств $\Omega_j^k$, $j \in \mathbf{N}$, и множество нулевой меры так, что $u_k|_{\Omega_j^k}$ аффинна ($Du_k = A_j^k$ в $\Omega_k^j$) и $\nu_x^k$ является однородной в $\Omega_j^k$, $j \in \mathbf{N}$. Однако тогда $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega_j^k}$ является однородной градиентной мерой Янга, т. е. существуют $\phi_i \in W_0^{1,\infty}\left(\Omega_j^k; \mathbf{R}^m\right)$ такие, что $A_j^k + D\phi_i$ порождают $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega_j^k}$ как однородную градиентную меру и функции $A_j^k + D\phi_i$, $i \in \mathbf{N}$, равномерно ограничены в $W^{1,\infty}$-норме по $j, k \in \mathbf{N}$. Таким образом, каждая мера $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}$ является градиентной мерой Янга, и в силу (3.4) это выполнено и для $(\tilde{\nu}_x)_{x\in\Omega}$. $\square$

Теорема 2.9 позволяет охарактеризовать однородные $L$-градиентные меры Янга.

**Теорема 3.8.** *Пусть $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ — непрерывный интегранд, имеющий по крайней мере линейный рост на бесконечности, и $\nu$ — вероятностная мера с центром масс в $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Тогда $\nu$ является $L$-градиентной мерой Янга тогда и только тогда, когда*

$$\langle L + \Phi; \nu\rangle \geq \inf_{\phi\in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^m)} \langle L + \Phi; Av(A + D\phi)_\Omega\rangle \quad \forall \Phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{m\times n}). \tag{3.5}$$

Теорема 2.9 позволяет иметь дело также с другими классами однородных мер Янга, порожденных градиентами. Например, можно заменить $\phi \in l_A + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ функциями $\phi \in l_A + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ в определении 3.1 или рассмотреть подкласс кусочно аффинных функций (см. [24]). Тогда в (3.5) мы должны рассматривать $\phi$ из $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ или из соответствующего подкласса.

Прокомментируем этот результат. Изначально Берлиокки и Лазри использовали теорему 2.9 для того, чтобы показать, что каждая вероятностная мера является мерой Янга, так как этот факт верен для выпуклых комбинаций масс Дирака. Это был элегантный способ получить результат без прямых аппроксимационных аргументов. Мы использовали теорему 3.8, чтобы доказать тот же результат для $L$-градиентных мер Янга в скалярном случае в [24, 25], так как выпуклые комбинации масс Дирака также являются градиентными мерами Янга (см., например, лемму 3.1 из [25]).

Для того чтобы рассмотреть неоднородный случай, следует сконструировать меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, используя однородные $L$-градиентные меры Янга $\nu_x$, $x \in \Omega$, и аппроксимируя $u$ кусочно аффинными функциями $u_k$ с градиентными мерами Янга $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}$, которые кусочно постоянны, как это сделано в лемме 3.2, и со свойством

$$\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega} \rightharpoonup^* (\nu_x)_{x\in\Omega}, \quad \left\langle L(\cdot, u_k(\cdot), v); \nu_{(\cdot)}^k \right\rangle \to \langle L(\cdot, u(\cdot), v); \nu_{(\cdot)} \rangle \quad \text{в } L^1$$

(можно использовать теоремы 2.4, 2.6 для этих целей).

Мы использовали эту схему во всех наших предыдущих работах, основанных на технике мер Янга: в [6] для интеграндов с $p$-ростом, в [15] для интеграндов с быстрым ростом на бесконечности, в [25] для интеграндов с ростом снизу, превосходящим степенную функцию с показателем, превосходящим размерность пространства независимых переменных, в скалярном случае и в [9] для интеграндов, сравнимых с однородным интеграндом, снова в скалярном случае.

**Теорема 3.9.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию* (1.2). *Пусть $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ с $J(u) < \infty$ удовлетворяет условию* (C) *и $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ — мера Янга с центрами масс $Du(x)$ п. в. в $\Omega$ и с*

$$\int_\Omega \langle L(x, u(x), v); \nu_x \rangle \, dx < \infty.$$

*В случае, если для п. в. $x \in \Omega$ мера $\nu_x$ является однородной $p(x, u(x))$-градиентной мерой Янга, мера $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ является $L$-градиентной мерой Янга, которая порождается градиентами последовательности $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m) \cap W^{1,\infty}(\Omega^{1/k}; \mathbf{R}^m)$, слабо сходящейся к $u$ в $W^{1,p_1}$, при этом $u_k|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$.*

Доказательство. Для фиксированного $k \in \mathbf{N}$ существует компактное подмножество $\widetilde{\Omega}$ множества $\Omega$ такое, что сужения на $\widetilde{\Omega}$ функции $\nu : x \to (M_1, \rho)$ (см. § 2), функции $x \to \langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x \rangle$, а также функций $x \to u(x)$, $x \to Du(x)$ непрерывны и $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}) \le 1/k$. Также полагаем, что функция $L : \widetilde{\Omega} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ непрерывна.

Пусть $x_0 \in \Omega$ — точка плотности множества $\widetilde{\Omega}$. Тогда существуют $\delta_0 = \delta_0(k) > 0$ и градиентная мера Янга

$$\nu_{x_0}^k = \operatorname{Av}(Du(x_0) + D\phi)_\Omega, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$$

(см. лемму 3.2) такие, что

$$\big|\langle L(x,u(x),\cdot);\nu_{x_0}\rangle - \big\langle L(x,u(x),\cdot);\nu^k_{x_0}\big\rangle\big| < \frac{1}{k}, \tag{3.6}$$

$$\rho\big(\nu_{x_0},\nu^k_{x_0}\big) \le \frac{1}{k}, \qquad \int\limits_{B(x,\delta)} \rho(\nu_x,\nu_{x_0})\,dx \le \frac{1}{k}\operatorname{meas} B(x_0,\delta), \tag{3.7}$$

если $\delta \le \delta_0(k)$. Для достаточно малого $\delta > 0$ также имеем

$$|\langle L(x,u(x),\cdot);\nu_x\rangle - \langle L(x,u(x),\cdot);\nu_{x_0}\rangle| < \frac{1}{k}, \tag{3.8}$$

если $x \in \widetilde{B}(x_0,\delta) := B(x_0,\delta)\cap\widetilde{\Omega}$.

Для $x \in \widetilde{B}(x_0,\delta)$ определяем $\nu^k_x$ как меру, полученную из $\nu^k_{x_0}$ переносом центра масс в $Du(x)$ (см. (2.3)). Тогда (3.7) влечет

$$\int\limits_{\widetilde{B}(x_0,\delta)} \rho\big(\nu_x,\nu^k_x\big)\,dx \le \int\limits_{B(x_0,\delta)} \rho(\nu_x,\nu_{x_0})\,dx + \int\limits_{B(x_0,\delta)} \rho\big(\nu_{x_0},\nu^k_{x_0}\big)\,dx$$
$$+ \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,\delta)} \rho\big(\nu^k_{x_0},\nu^k_x\big)\,dx \le \frac{2}{k}\operatorname{meas}\widetilde{B}(x_0,\delta) + \int\limits_{\widetilde{B}(x_0,\delta)} \rho\big(\nu^k_{x_0},\nu^k_x\big)\,dx. \tag{3.9}$$

Для того чтобы оценить второе слагаемое в правой части (3.9), используем формулу для метрики $\rho$ (см. § 2):

$$\rho\big(\nu^k_x,\nu^k_{x_0}\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i\|\Phi_i\|_C}\big|\big\langle\Phi_i;\nu^k_x\big\rangle - \big\langle\Phi_i;\nu^k_{x_0}\big\rangle\big|$$
$$\le \sum_{i=1}^{\widetilde{M}} \frac{1}{2^i\|\Phi_i\|_C}\big|\big\langle\Phi_i;\nu^k_x\big\rangle - \big\langle\Phi_i;\nu^k_{x_0}\big\rangle\big| + \frac{1}{2^{\widetilde{M}-1}}, \tag{3.10}$$

где $\widetilde{M}$ может быть взято достаточно большим, чтобы сделать второе слагаемое меньше $1/k$; что касается первого слагаемого, оно не превосходит

$$\sum_{i=1}^{\widetilde{M}} \frac{1}{2^i\|\Phi_i\|_C}\max\{|\Phi_i(v_2)-\Phi_i(v_1)| : |v_2-v_1|$$
$$\le \max\{|Du(x_1)-Du(x_2)| : x_1,x_2\in\widetilde{B}(x_0,\delta)\}\} \le 1/k \tag{3.11}$$

для достаточно малых $\delta > 0$.

Вместе (3.10), (3.11) влекут

$$\rho\big(\nu^k_x,\nu^k_{x_0}\big) \le 2/k, \tag{3.12}$$

если $\delta > 0$ достаточно мало и если $x \in \widetilde{B}(x_0,\delta)$. Тогда из (3.9), (3.12)

$$\int\limits_{\widetilde{B}(x_0,\delta)} \rho\big(\nu_x,\nu^k_x\big)\,dx \le \frac{4}{k}\operatorname{meas}\widetilde{B}(x_0,\delta). \tag{3.13}$$

Ввиду (3.6), (3.8) и непрерывности сужения $L$ на $\widetilde{\Omega}\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{m\times n}$, сужений $u, Du$ на $\widetilde{\Omega}$ также имеем

$$\int\limits_{\widetilde{B}(x_0,\delta)} \big|\big\langle L(x,u(x),\cdot);\nu^k_x\big\rangle - \langle L(x,u(x),\cdot);\nu_x\rangle\big|\,dx \le \frac{4}{k}\operatorname{meas} B(x_0,\delta). \tag{3.14}$$

Таким образом, можно указать конечный набор взаимно не пересекающихся замкнутых шаров $B(x_j,\delta_j)$, $j\in\{1,\dots,M\}$, и однородные градиентные меры Янга

$$\nu_j^k=\mathrm{Av}(Du(x_j)+D\phi_j)_\Omega$$

с $\phi_j\in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^m)$ такие, что (3.13), (3.14) выполнено в каждом множестве $\widetilde{B}(x_j,\delta_j)$ для соответствующих мер Янга $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\widetilde{B}(x_j,\delta_j)}$, $1\le j\le M$, и

$$\operatorname{meas}\left(\widetilde{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^{M}\widetilde{B}(x_j,\delta_j)\right)\le\frac{1}{k}. \tag{3.15}$$

Тогда мера $\nu_x^k$ определена в множестве $\bigcup\limits_{j=1}^{M}\widetilde{B}(x_j,\delta_j)$, для остальных $x\in\Omega$ полагаем $\nu_x^k=\delta_{Du(x)}$.

В силу условий теоремы существует последовательность $u_i\in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbf{R}^m)\cap W^{1,\infty}(\Omega^{1/i};\mathbf{R}^m)$, $i\in\mathbf{N}$, кусочно аффинных в $\Omega^{1/i}$ функций такая, что $u_i\to u$ в $W^{1,p_1}(\Omega;\mathbf{R}^m)$ и $J(u_i)\to J(u)$ при $i\to\infty$. В каждом множестве $\widetilde{B}(x_j,\delta_j)$, $j\in\{1,\dots,M\}$, определяем меру Янга $\nu_x^i$ переносом центра масс $\nu_x^k$ из $Du(x)$ в $Du_i(x)$, если $|Du_i(x)-Du(x)|\le 1/k$, и полагаем $\nu_x^i=\delta_{Du_i(x)}$ в противном случае. Для остальных $x\in\Omega$ также полагаем $\nu_x^i=\delta_{Du_i(x)}$.

Рассмотрим множество

$$\Omega^{1/i}:=\{x\in\Omega:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>1/i\}.$$

Каждая мера $\left(\nu_x^i\right)_{x\in\Omega^{1/i}}$ удовлетворяет всем требованиям следствия 3.7 и, стало быть, является градиентной мерой Янга (см. теорему 3.6). Так как

$$\left(\nu_x^i\right)_{x\in\Omega}\rightharpoonup^*\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega},\quad\left\langle L(\cdot,u_i(\cdot),v);\nu_{(\cdot)}^i\right\rangle\to\left\langle L(\cdot,u(\cdot),v);\nu_{(\cdot)}^k\right\rangle\text{ в }L^1,\ i\to\infty,$$

получаем также, что $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}$ является $L$-градиентной мерой Янга.

Окончательно

$$\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}\rightharpoonup^*(\nu_x)_{x\in\Omega},\quad k\to\infty,$$

в силу конструкции (см. (3.13), (3.15)). Ввиду (3.14) также получаем

$$\left\langle L(\cdot,u(\cdot),v);\nu_{(\cdot)}^k\right\rangle\to\left\langle L(\cdot,u(\cdot),v);\nu_{(\cdot)}\right\rangle\quad\text{в }L^1,\ k\to\infty.$$

Так как каждая мера $\left(\nu_x^k\right)_{x\in\Omega}$ является $L$-градиентной мерой Янга, выводим, что $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ также $L$-градиентная мера Янга и эта мера порождается градиентами последовательности $u_k\in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbf{R}^m)\cap W^{1,\infty}(\Omega^{1/k};\mathbf{R}^m)$ с $u_k|_{\partial\Omega}=u|_{\partial\Omega}$. □

В доказательстве теоремы 3.9 существенно использовали условие (C). Разумеется, другие аппроксимации кусочно аффинными функциями также могут быть учтены. В [25] применены такие аппроксимации с ограничениями только в соболевской норме, в [15] использованы почти кусочно аффинные аппроксимации в том смысле, что множества $\Omega_i$, где функции $u_i$ не являются кусочно аффинными, исчезают на бесконечности, т. е. $\operatorname{meas}\Omega_i\to 0$ при $i\to\infty$.

## § 4. Полунепрерывность снизу

Напомним сначала определение квазивыпуклости по Морри [26], которое является центральным понятием в теории полунепрерывности снизу.

Определение 4.1. Пусть $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является непрерывной функцией и $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Функция $L$ называется *квазывыпуклой в* $A$, если выполнены следующие неравенства:

$$\int\limits_{\Omega} L(A + D\phi(x))\,dx \geq L(A)\operatorname{meas}\Omega \tag{4.1}$$

для всех $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$.

$L$ называется *квазивыпуклой*, если она квазивыпукла в каждой точке $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

Предложение 3.3 влечет, что (4.1) не зависит от $\Omega$.

Из квазивыпуклости $L$ вытекает выпуклость по направлениям ранга 1, которая является выпуклостью всех функций $t \in \mathbf{R} \to L(A+tB)$, где $A, B \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank} B = 1$. Обратное в общем случае неверно (но верно для квадратичных функционалов, см. [27]); случай $m = n = 2$ все еще открытая проблема.

В этом параграфе будет доказана

**Теорема 4.2.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет условиям $p(x, u)$-роста (1.2).*

1. *Пусть $u_k, u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, и пусть $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Предположим также, что $L(x, u(x), \cdot)$ квазивыпукла в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Тогда*

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u).$$

2. *Обратно, пусть $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ с $J(u) < \infty$ и $u$ удовлетворяет условию* (C). *Тогда если сходимость $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,p_1}$ влечет неравенство*

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u),$$

*то функция $L(x, u(x), \cdot)$ квазивыпукла в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.*

**Следствие 4.3.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори, удовлетворяющим условию $p(x, u)$-роста (1.2). Тогда функционал $J$ полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в $W^{1,p_1}$ в том и только том случае, когда $L(x, u, v)$ квазивыпукла по $v$ для п. в. $x \in \Omega$ и всех $u \in \mathbf{R}^m$.*

**Следствие 4.4.** *Если $L(x, u, v) : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори с $p(x, u)$-ростом, квазивыпуклым по $v$, и существует по крайней мере одна функция $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, удовлетворяющая граничным условиям $u|_{\partial\Omega} = f$ с $J(u) < \infty$, то задача*

$$J(u) \to \min, \quad u|_{\partial\Omega} = f, \quad u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m),$$

*имеет решение.*

**Следствие 4.5.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори, удовлетворяющим условию (1.1) с гёльдеровой функцией $p(\cdot)$, $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ с $J(u) < \infty$. Тогда сходимость $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,p_1}$ влечет неравенство*

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$$

*в том и только том случае, когда $L(x, u(x), \cdot)$ квазивыпукла в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.*

В [26] установлено, что квазивыпуклость $L$ по $Du$ отвечает за полунепрерывность снизу интегральных функционалов относительно слабой* сходимости в $W^{1,\infty}$. Результат о полунепрерывности снизу в энергетическом пространстве был доказан Ачерби и Фуско в [28] для интеграндов, удовлетворяющих условию $p$-роста, т. е. когда $p$ в (1.1) является константой и $p > 1$.

Так как мы используем технику мер Янга, то должны сначала выяснить, что квазивыпуклость означает в терминах $L$-градиентных мер Янга.

**Лемма 4.6.** *Пусть $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию $p$-роста, т. е.* (1.1) *выполнено с константой $p \geq 1$. Тогда $L$ квазивыпукла в $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, если и только если для каждой однородной $p$-градиентной меры Янга с центром масс в $A$ выполнено неравенство Йенсена*

$$\langle L; \nu\rangle \geq L(A). \tag{4.2}$$

*Неравенство* (4.1) *верно, если оно выполнено для мер* $\operatorname{Av}(A + D\phi)_\Omega$, *фигурирующих в лемме* 3.2, *с* $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$.

Доказательство. Для $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$ имеем

$$\langle L; \operatorname{Av}(A + D\phi)_\Omega\rangle \operatorname{meas}\Omega = \int\limits_\Omega L(A + D\phi(x))\,dx. \tag{4.3}$$

Квазивыпуклость $L$ в $A$ влечет

$$\langle L; \operatorname{Av}(A + D\phi)_\Omega\rangle \geq L(A). \tag{4.4}$$

Если $\nu$ является однородной $p$-градиентной мерой Янга с центром масс в $A$, то существуют $\phi_k \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$, $k \in \mathbf{N}$, такие, что $D\phi_k$ порождают меру $\nu$, в частности

$$\langle L; \operatorname{Av}(A + D\phi)_\Omega\rangle \to \langle L; \nu\rangle, \tag{4.5}$$

и тогда (4.4), (4.5) влекут (4.2).

Если (4.2) выполнено с мерами $(A + D\phi)_\Omega$, где $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$, то можно использовать (4.3) для того, чтобы получить квазивыпуклость $L$ в $A$. $\square$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ и $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Для того чтобы доказать полунепрерывность снизу, достаточно предположить, что $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k)$ существует и конечен. Без потери общности можно также предположить, что $Du_k$ порождает $L$-градиентную меру Янга $(\nu_x)_{x\in\Omega}$.

Пусть $x \in \Omega$ — лебеговская точка отображений $x \to \nu_x \in (M_1, \rho)$, $x \to \langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle$. По теореме 3.5 $\nu_x$ является однородной $p(x, u(x))$-градиентной мерой Янга. Лемма 4.6 влечет неравенство Йенсена

$$\langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle \geq L(Du(x)).$$

Так как по теореме 2.9

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega L(x, u_k(x), Du_k(x))\,dx \geq \int\limits_\Omega \langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle\,dx,$$

последние два неравенства результируются в

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u).$$

Это доказывает первую часть теоремы.

Для того чтобы доказать вторую часть теоремы для фиксированного $k \in \mathbf{N}$, выберем компактное подмножество $\Omega_k \subset \Omega$ так, что $L : \Omega_k \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ непрерывно, $u : \Omega_k \to \mathbf{R}^m$, $Du : \Omega_k \to \mathbf{R}^{m\times n}$ непрерывны и $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \le 1/k$. В случае, если квазивыпуклость не имеет место для лебеговской точки $x_0 \in \Omega_k$, мы можем использовать лемму 4.6 для того, чтобы найти меру

$$\nu = \operatorname{Av}(Du(x_0) + D\phi)_\Omega$$

с $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$ такую, что неравенство Йенсена (4.2) не выполнено, т. е.

$$\langle L(x_0, u(x_0), \cdot); \nu\rangle < L(x_0, u(x_0), Du(x_0)).$$

Тогда можно определить $\nu_x$ как $\nu$ с перенесенным центром масс в $Du(x)$ (см. (2.3)) в достаточно малой окрестности $x_0$ в $\Omega_k$, чтобы было выполнено

$$\langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle < L(x, u(x), Du(x)).$$

Для остальных $x \in \Omega$ полагаем $\nu_x = \delta_{Du(x)}$.

По теореме 3.9 мера $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ может быть порождена как $L$-градиентная мера Янга градиентами последовательности $u_k$, слабо сходящейся в $W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ к $u$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) < J(u)$; противоречие.

Таким образом, $L(x, u(x), \cdot)$ квазивыпукла в $Du(x)$ для всех лебеговских точек $x \in \Omega_k$. Так как $k \in \mathbf{N}$ произвольно, получаем, что $L(x, u(x), \cdot)$ квазивыпукла в $Du(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. $\square$

Доказательство следствия 4.3 несложно. Квазивыпуклость $L$ по $v$ влечет полунепрерывность снизу функционала $J$ относительно слабой сходимости в $W^{1,p_1}$ в силу теоремы 4.2. Обратное верно, так как полунепрерывность снизу выполнена на всех аффинных функциях (см. снова теорему 4.2). $\square$

Доказательство следствия 4.4 также очевидно. Действительно, левое неравенство в (1.2) влечет, что любая минимизирующая последовательность $u_k$ в задаче на минимизацию ограничена в $W^{1,p_1}$. Тогда можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $W^{1,p_1}$ к $u_0$. В силу теоремы 4.2 выполнено $\liminf J(u_k) \ge J(u_0)$, т. е. $u_0$ — решение задачи минимизации. $\square$

Для доказательства следствия 4.5 достаточно показать, что в случае (1.1) каждая функция $u \in W^{1,p_1}$ с $J(u) < \infty$ обладает свойством (C). Этот результат вытекает из результата В. В. Жикова [29] об аппроксимации функций с конечной энергией более регулярными функциями, обобщенного на векторный случай Кошкия и Муччи [2].

**Лемма 4.7.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори, удовлетворяющим условиям* (1.1) *с гёльдеровой функцией $p(\cdot)$, и пусть $u \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ с $J(u) < \infty$. Тогда $u$ удовлетворяет условию* (C).

Доказательство. Лемма 2.18 из [2] утверждает существование последовательности $u_j \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$ такой, что $u_j \to u$ в $W^{1,p(x)}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^m)$, где сходимость в $W^{1,p(x)}_{\mathrm{loc}}$ означает сходимость в $W^{1,p(x)}$ для каждого компактного подмножества $\widetilde{\Omega}$ множества $\Omega$. В свою очередь, сходимость в $W^{1,p(x)}(\widetilde{\Omega}; \mathbf{R}^m)$ означает сходимость

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} |u_j(x) - u(x)|^{p(x)} + |Du_j(x) - Du(x)|^{p(x)}\, dx \to 0. \tag{4.6}$$

Для $k \in \mathbf{N}$ имеем сходимость в (4.6) в случае $\widetilde{\Omega} = \operatorname{cl} \Omega^{1/k}$. Полагаем

$$w_j := \phi_k u_j + (1 - \phi_k) u, \tag{4.7}$$

где $\phi_k = 1$ на $\Omega^{1/k}$, $0 \le \phi_k \le 1$, $\phi_k \in C_c^\infty(\Omega)$. На множестве $\Omega^{1/k}$ выполнено $w_j = u_j$, $j \in \mathbf{N}$, когда $w_j = u$ в окрестности $\partial\Omega$. Более того,

$$w_j|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{4.8}$$

На множестве $\Omega \setminus \Omega^{1/k}$ выполнено

$$Dw_j = \{\phi_k(Du_j - Du) + D\phi_k \otimes (u_j - u)\} + Du. \tag{4.9}$$

Первое слагаемое сходится к нулю в $L^{p(x)}$. Тогда

$$\|Dw_j - Du\|_{L^{p(x)}} \to 0.$$

Из этой сходимости вытекает

$$\|Dw_j - Du\|_{L^{p_1}} \to 0, \quad J(w_j) \to J(u).$$

Выбирая подходящие $j = j(k)$, получаем последовательность, фигурирующую в свойстве (C). $\square$

## § 5. Релаксация

Главным результатом данного параграфа является

**Теорема 5.1.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет условиям $p(x,u)$-роста* (см. (1.2)). *Пусть*

$$L^{qc}(x,u,v) := \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega} \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)} \int\limits_\Omega L(x,u,v + D\phi(y))\,dy. \tag{5.1}$$

*Тогда $L^{qc}$ является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет тем же неравенствам* (1.2), *что и $L$, и является квазивыпуклым по $v$ для п. в. $x \in \Omega$ и всех $u \in \mathbf{R}^m$. Более того, для любой функции $u \in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbf{R}^m)$ с $J(u) < \infty$, удовлетворяющей условию* (C), *существует последовательность $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega;\mathbf{R}^m) \cap W^{1,\infty}(\Omega^{1/k};\mathbf{R}^m)$, $k \in \mathbf{N}$, такая, что $u_k \rightharpoonup u$ в $W^{1,p_1}$, $u_k|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ и $J(u_k) \to J^{qc}(u)$, $k \to \infty$.*

Предложение 3.3 влечет, что $L^{qc}(x,u,\cdot)$ не зависит от $\Omega$.

**Следствие 5.2.** *Пусть $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интеграндом Каратеодори, который удовлетворяет условиям* (1.1) *с $p(\cdot)$, непрерывной по Гёльдеру. Пусть $L^{qc}$ является квазиовыпуклением $L$ по $v$* (см. (5.1)). *Тогда $J^{qc}$ является полунепрерывной снизу оболочкой $J$.*

Первые теоремы о релаксации в векторнозначном случае, в котором мы заинтересованы в данной работе, принадлежат Дакороньи [30] для однородной ситуации $L = L(Du)$.

В скалярном случае этот результат имеет долгую историю, так как теорема о релаксации была впервые доказана Боголюбовым в 1930 г. (см. [22]) в одномерном случае. Затем Экланд и Темам обобщили эту теорему на многомерный случай (см. [31]), после чего Ачерби и Фуско доказали теорему о релаксации для интеграндов, удовлетворяющих условиям $p$-роста, при некоторых дополнительных ограничениях на поведение по $(x,u)$. Близкий результат получен в

[32]. Другие работы также наследовали дополнительные ограничения на поведение относительно младших слагаемых (см., например, [33]). Одной из причин развития теории градиентных мер Янга в [6, 7] было доказательство теоремы о релаксации без дополнительных ограничений, т. е. для интеграндов Каратеодори, удовлетворяющих условиям $p$-роста.

Для того чтобы доказать теорему 5.1, нам понадобится следующее простое утверждение.

**Предложение 5.3.** *Пусть $L_k, L : \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ являются непрерывными ограниченными снизу интеграндами, $k \in \mathbf{N}$. Предположим, что $\nu_k, \nu$ являются вероятностными мерами с $\nu_k \rightharpoonup^* \nu$, $k \to \infty$.*

*Тогда*

$$\liminf_{k\to\infty} \langle L_k; \nu_k\rangle \geq \langle L; \nu\rangle, \tag{5.2}$$

*если $L_k$ сходится к $L$ равномерно на компактах.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда левая часть в (5.2) ограничена.

Для $M > 0$ существует функция $\Phi_M \in C_c(\mathbf{R}^l)$ такая, что $0 \leq \Phi_M \leq 1$, $\Phi_M = 1$ на $B(0, M)$. Тогда $\Phi_M L_k$ сходится равномерно к $\Phi_M L$ при $k \to \infty$ и, следовательно,

$$\langle \Phi_M L_k; \nu_k\rangle \to \langle \Phi_M L; \nu\rangle, \quad k \to \infty.$$

Так как $\langle \Phi_M L; \nu\rangle \to \langle L; \nu\rangle$, $M \to \infty$, получаем (5.2). $\square$

Доказательство теоремы 5.2. В силу леммы 4.6 левая часть в (5.1) равна

$$\inf\{\langle L(x,u,\cdot); \nu\rangle : \nu \text{ является однородной } p(x,u)\text{-градиентной мерой Янга с центром масс в } v\} = \inf\{\langle L(x,u,\cdot); Av(v + D\phi)_\Omega\rangle : \phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)\}. \tag{5.3}$$

Более того, предложение 5.3 и теорема 3.5 обеспечивают, что инфимум в левой части достигается.

Факт, что квазиовыпукление непрерывного интегранда $L : \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющего условиям $p$-роста, является непрерывным квазивыпуклым интеграндом, удовлетворяющим тем же неравенствам, доказан в теореме 4.6 из [6]. Теперь мы должны рассмотреть также случай зависимости от $(x, u)$.

Пусть $\Omega_\epsilon$ является компактным подмножеством $\Omega$ таким, что $\operatorname{meas}(\Omega\setminus\Omega_\epsilon) \leq \epsilon$ и $L : \Omega_\epsilon \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ непрерывно.

Мы можем использовать (5.3), чтобы доказать полунепрерывность сверху функции $L^{qc} : \Omega_\epsilon \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$. Действительно, пусть $\delta > 0$ и $\nu := Av(v + D\phi)_\Omega$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$ такая, что

$$\langle L(x,u,\cdot); \nu\rangle \leq L^{qc}(x,u,v) + \delta \tag{5.4}$$

и $(x_n, u_n, v_n) \to (x, u, v)$. Тогда, перенося центр масс меры $\nu$ из $v$ в $v_n$, получаем однородные градиентные меры Янга $\nu_n$ такие, что

$$\langle L(x_n, u_n, \cdot); \nu_n\rangle \to \langle L(x,u,\cdot); \nu\rangle, \quad n \to \infty. \tag{5.5}$$

Так как в силу (5.3)

$$L^{qc}(x_n, u_n, v_n) \leq \langle L(x_n, u_n, \cdot); \nu_n\rangle, \quad n \in \mathbf{N},$$

выводим из (5.4), (5.5), что

$$\limsup_{n\to\infty} L^{qc}(x_n, u_n, v_n) \le L^{qc}(u, u, v) + \delta,$$

что влечет полунепрерывность сверху функции $L^{qc} : \Omega_\epsilon \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$.

Для того чтобы доказать полунепрерывность снизу, используем тот факт, что инфимум в левой части (5.3) достигается. Пусть $\nu_n$ являются минимайзерами в множестве $p(x_n, u_n)$-градиентных мер Янга, соответствующими $(x_n, u_n, v_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда для некоторой подпоследовательности (непереобозначенной) выполнено

$$\nu_n \rightharpoonup^* \nu, \quad \langle L(x, u, \cdot); \nu\rangle \le \liminf \langle L(x_n, u_n, \cdot); \nu_n\rangle$$

(см. предложение 5.3). По теореме 3.5 мера $\nu$ является однородной $p(x, u)$-градиентной мерой Янга с центром масс в $v$. Тогда по лемме 4.6 выполнено $L^{qc}(x, u, v) \le \langle L(x, u, \cdot); \nu\rangle$, откуда вытекает полунепрерывность снизу.

Так как $\epsilon > 0$ произвольно, доказано, что $L : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ является интегрaндом Каратеодори.

Для того чтобы доказать последние утверждение теоремы, рассмотрим $u \in W^{1,p_1}$ с $J(u) < \infty$, удовлетворяющую свойству (C). Пусть $\Omega_\epsilon$ является компактным подмножеством множества $\Omega$ таким, что сужения $u$, $Du$ на это множество непрерывны и $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) \le \epsilon$. Более того, предположим, что $L : \Omega_\epsilon \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ непрерывно. Тогда то же выполнено и для $L^{qc}$.

Определим многозначное отображение

$$\begin{aligned} x \in \Omega_\epsilon \to V(x) := \{\nu \in (M_1, \rho) : \nu \text{ является минимайзером } \langle L(x, u(x), \cdot); \nu\rangle \\ \text{в классе однородных } p(x, u(x))\text{-градиентных} \\ \text{мер Янга с центром масс в } Du(x)\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Это многозначное отображение замкнуто и полунепрерывно сверху. Последнее означает, что сходимости $x_n \to x$, $\nu_n \rightharpoonup^* \nu$ влекут $\nu \in V(x)$, если $\nu_n \in V(x_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Это вытекает из предложения 5.3, теоремы 3.5 и непрерывности сужения $L^{qc}$. Тогда существует измеримый селектор $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ (см. теорему 2.5), который автоматически является мерой Янга по теореме 2.2, и также выполнено

$$L^{qc}(x, u(x), Du(x)) = \langle L(x, u(x), \cdot); \nu_x\rangle, \quad x \in \Omega_\epsilon. \tag{5.7}$$

Тогда мы можем определить меру Янга во всем множестве $\Omega$, сохраняя это же свойство (5.7).

По теореме 3.9 семейство $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ есть $L$-градиентная мера Янга, порожденная градиентами последовательности $u_k \in W^{1,p_1}(\Omega; \mathbf{R}^m) \cap W^{1,\infty}(\Omega^{1/k}; \mathbf{R}^m)$, $k \in \mathbf{N}$, которая сходится слабо к $u$ и обладает свойством $u_k|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$. В силу (5.7) также выполнено $J(u_k) \to J^{qc}(u)$, $k \to \infty$, что и требовалось. $\square$

Доказательство предложения 5.3 можно получить из того, что каждая функция с конечной энергией обладает свойством (C) (см. лемму 4.7). $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Antontsev S., Shmarev S.* Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal. 2006. V. 65, N 4. P. 718–761.
2. *Coscia A., Mucci D.* Integral representation and Γ-convergence of variational integrals with $P(X)$-growth // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2002. V. 7. P. 495–519.

3. *Mucci D.* Relaxation of variational integrals with piecewise constant growth condition // J. Convex Anal. 2003. V. 10, N 2. P. 295–324.
4. *Mingione G., Mucci D.* Integral functionals and the gap problem: sharp bounds for relaxation and energy concentration // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36, N 5. P. 1540–1579.
5. *Acerbi E., Bouchitte G., Fonseca I.* Relaxation of convex functionals. The gap phenomenon // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20, N 3. P. 359–390.
6. *Sychev M.* A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1999. V. 16, N 6. P. 773–812.
7. *Sychev M.* Young measure approach to characterization of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1998. V. 15, N 6. P. 755–783.
8. *Сычев М. А.* Меры Янга как измеримые функции и их приложения к вариационным задачам // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН. 2004. Т. 35. С. 191–202.
9. *Сычев М. А.* Интегральные функционалы с $p(x)$-, $p(x,u)$-ростом // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 5. С. 587–588.
10. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations / Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, V. IV. Boston, Mass.; London: Pitman, 1979. P. 136–212. (Pitman Research Notes Math.; V. 39.)
11. *Проблемы Гильберта* / Под ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
12. *Young L. C.* Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the Calculus of Variations // Comptes rendus de la societe des sciences et des lettres de Varsovie, classe III. 1937. V. 30. P. 212–234.
13. *Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C.* A general theorem of selectors // Bull. Acad. Polon. Sci. 1966. V. 8. P. 397–403.
14. *Ball J. M., Murat F.* Remarks on Chacon's biting lemma // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107, N 3. P. 655–663.
15. *Сычев М. А.* Теоремы полунепрерывности и релаксации для интеграндов, удовлетворяющих условиям быстрого роста // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 540–554.
16. *Zhang K.* Biting theorems for Jacobians and their applications // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 1990. V. 7, N 4. P. 345–365.
17. *Ball J. M., Zhang K.-W.* Lower semicontinuity of multiple integrals and the biting lemma // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, Math. 1990. V. 114, N 3–4. P. 367–379.
18. *Berliocchi H., Lasry J. M.* Integrandes normales et mesures parametrees en calcul des variations // Bull. Soc. Math. France. 1973. V. 101. P. 129–184.
19. *Zhang K.* A construction of quasiconvex functions with linear growth at infinity // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. 1992. V. 19, N 4. P. 313–326.
20. *Kinderlehrer D., Pedregal P.* Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces // J. Geom. Anal. 1994. V. 4, N 1. P. 59–90.
21. *Kristensen J.* Finite functionals and Young measures generated by gradients of Sobolev functions: Thes. … doct. phylosophy. Technical Univ. Denmark, Lyngby, 1994.
22. *Bogolubov N.* Sur quelques méthodes nouvelles dans le calcul des variations // Ann. Math. Pura Appl. 1930. V. 7, N 3. P. 149–271.
23. *Saks S.* Theory of the integral. New York: Hafner, 1973.
24. *Sychev M.* Characterization of homogeneous gradient Young measures in case of arbitrary integrands // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. 2000. V. 29, N 3. P. 531–548.
25. *Sychev M.* Attainment and relaxation results in special classes of deformations // Calc. Var. 2004. V. 19, N 2. P. 183–210.
26. *Morrey C. B.* Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. V. 2, N 2. P. 25–53.
27. *Šverák V.* Rank-one convexity does not imply quasiconvexity // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, Math. 1992. V. 120, N 1–2. P. 185–189.
28. *Acerbi E., Fusco N.* Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1984. V. 86, N 2. P. 125–145.
29. *Жиков В. В.* О плотности гладких функций в пространствах Соболева — Орлича // Зап. науч. семинаров ПОМИ РАН. 2004. Т. 310. С. 1–14.
30. *Dacorogna B.* Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the calculus of variations // J. Funct. Anal. 1982. V. 46, N 1. P. 102–118.
31. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. Amsterdam: North-Holland, 1976.

**32.** *Dacorogna B.* Direct methods in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1989.

**33.** *Bouchitte G., Fonseca I., Maly J.* The effective bulk energy of the relaxed energy of multiple integrals below the growth exponent // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, Math. 1998. V. 128, N 3. P. 463–479.

*Статья поступила 18 октября 2010 г.*

Сычев Михаил Андреевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
masychev@math.nsc.ru