Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Г. П. Лопушанская,
А. О. Лопушанский, Е. В. Пасичник

Аннотация. Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения с дробной производной по времени при заданных в правой части уравнения и начальном условии обобщенных функциях.

Ключевые слова: обобщенная функция, свертка, производная дробного порядка, функция Грина.

1. Обозначения, формулировка задачи и основная теорема

В [1, 2] построена матрица Грина общей параболической граничной задачи, доказана разрешимость задачи в пространствах Гёльдера гладких и обобщенных функций, получено представление решения задачи с помощью матрицы Грина. В [3, 4] доказана разрешимость задачи Коши для линейного однородного уравнения диффузии с регуляризованной дробной производной и получено представление ее классического решения. В [5] предложены численные методы решения краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка по времени с постоянными коэффициентами.

Как в [6–8], с учетом оценок ядер Пуассона из [3, 4] в настоящей статье изучены свойства сопряженных операторов Грина, доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения с дробной производной по времени при заданных в правой части уравнения и начальном условии обобщенных функциях.

Пусть $Q_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T]\}$, $D(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, $D(Q_T) = C_0^\infty(Q_T)$ — пространства бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $\mathbb{R}$ и Q_T соответственно,

$$D(\overline{Q}_T) = \left\{\varphi \in C_0^\infty(\overline{Q}_T) : \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l \varphi\Big|_{t=T} = 0,\ l = 0, 1, 2, \dots\right\},$$

$S = S(\mathbb{R})$ — пространство Шварца, которое состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$. В [9, с. 201] введены пространства $S_\gamma(\mathbb{R})$ $(\gamma \geq 0)$ — пространства типа S — и доказано, что $S_\gamma(\mathbb{R})$ $(\gamma \geq 0)$ состоит из тех и только тех функций $\phi(x)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$|\phi^{(q)}(x)| \leq C_q \exp\{-a|x|^{\frac{1}{\gamma}}\}, \quad q = 0, 1, 2, \dots,$$

с положительными постоянными $C_q = C_q(\phi)$ и $a = a(\phi)$.

В [10, с. 164] описан класс Жевре

$$\mathscr{G}_\gamma = \{\phi(t)\ (t \in [0,T]) : |\phi^{(p)}(t)| \le CB^p p^{p\gamma},\ p = 0,1,2,\dots\},$$

постоянные C, B зависят, возможно, от ϕ. Функция $\phi(t) = \exp\{-|t|^{-\gamma}\}$ $(\gamma > 0)$ принадлежит $\mathscr{G}_{1+\frac{1}{\gamma}}$.

Пусть $0 < \alpha < 1$, $Z_\alpha(\mathbb{R}) = S_{\frac{2-\alpha}{2}}(\mathbb{R})$,

$$Z_\alpha(\overline{Q}_T) = \left\{\varphi \in D(\overline{Q}_T) : \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q \varphi(x,t)\right|\right.$$
$$\left.\le C_{p,q}\exp\{-a|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\},\ p,q = 0,1,2,\dots\right\},$$

постоянные $C_{p,q}$ зависят от φ, $0 < a = a(\alpha) \le \frac{2-\alpha}{2e}$ — некоторая постоянная.

Функции из $Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ как функции аргумента x для каждого $t \in [0,T]$ принадлежат пространству Шварца $S_{\frac{2-\alpha}{2}}(\mathbb{R})$, а как функции аргумента $T-t$ для каждого $x \in \mathbb{R}$ — классу Жевре $\mathscr{G}_{\frac{2}{\alpha}}$.

Через $D'(\mathbb{R})$, $D'(Q_T)$, $Z'_\alpha(\mathbb{R})$ и $Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$ обозначаем пространства линейных непрерывных функционалов на пространствах $D(\mathbb{R})$, $D(Q_T)$, $Z_\alpha(\mathbb{R})$ и $Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ соответственно [10, 11], через (f,φ) — значение обобщенной функции $f \in D'(\mathbb{R})$ на основной функции $\varphi \in D(\mathbb{R})$, а также значение $f \in Z'_\alpha(\mathbb{R})$ на $\varphi \in Z_\alpha(\mathbb{R})$, а через $(f,\varphi)_{Q_T}$ — значение $f \in D'(Q_T)$ на $\varphi \in D(Q_T)$ и $f \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$ на $\varphi \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$.

Через $\hat{*}$ обозначим свертку обобщенной функции g и основной φ [10, с. 111]:

$$(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi)), \quad g \in D'(\mathbb{R}),\ \varphi \in D(\mathbb{R}),$$

$$((g\hat{*}\varphi)(x,t) = (g(\xi,\tau), \varphi(x+\xi, t+\tau)), \quad g \in D'(\mathbb{R}^2),\ \varphi \in D(\mathbb{R}^2)).$$

Функционал $f * g$, который действует по правилу

$$(f*g, \varphi) = (f, g\hat{*}\varphi) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}),$$

называется *сверткой обобщенных функций* f и g [10, с. 111]. Заметим, что при $\varphi \in D(\mathbb{R})$, $f \in D'(\mathbb{R})$

$$f(x)\hat{*}\varphi(x) = f(-x) * \varphi(x),$$

а при $f, g \in D'(\mathbb{R})$ и существовании $f * g$

$$(f*g)\hat{*}\varphi = f\hat{*}(g\hat{*}\varphi).$$

Через $f \times g$ обозначают прямое произведение обобщенных функций $f, g \in D'(\mathbb{R})$ [11, с. 126]:

$$(f(x) \times g(t), \varphi(x,t)) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t))) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2).$$

Через $D'_+(\mathbb{R})$ обозначают совокупность обобщенных функций из $D'(\mathbb{R})$, обращающихся в нуль при $t < 0$ [11, с. 139]. Рассмотрим обобщенную функцию $f_\lambda \in D'_+(\mathbb{R})$, которая зависит от вещественного параметра λ [11, с. 143]:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{и} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция.

Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ [11].

Сверточные операторы $f_{-\lambda}*$ при $\lambda > 0$ называют *операторами дробного дифференцирования* (*Римана — Лиувилля*): $f_{-\lambda} * v = v^{(\lambda)}$.

В [12] определена регуляризованная дробная производная порядка $\alpha \in (0,1)$ непрерывной в $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ функции v:

$$\big(D_t^\alpha v\big)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\alpha}\right].$$

Пусть $C^{2,\alpha}(Q_T)$ — класс функций $v(x,t)$, непрерывных в $\overline{Q}_T$, дважды непрерывно дифференцируемых по x и ограниченных вместе с производными v_{xx} в Q_T, для которых существует непрерывная $\big(D_t^\alpha v\big)(x,t)$ в Q_T.

Заметим, что для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T)$

$$f_{-\alpha}(t) * v(x,t) = \big(D_t^\alpha v\big)(x,t) + f_{1-\alpha}(t)\times v(x,0).$$

Введем операторы

$$\begin{aligned}
(\widehat{L}_\alpha v)(x,t) &\equiv f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad v \in D(\overline{Q}_T),\\
(L_\alpha v)(x,t) &\equiv f_{-\alpha}(t) * v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad v \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T),\\
\big(L_\alpha^{\mathrm{reg}} v\big)(x,t) &\equiv \big(D_t^\alpha v\big)(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad v \in C^{2,\alpha}(Q_T).
\end{aligned}$$

Для всех $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)$, $v \in D(\overline{Q}_T)$ имеет место формула

$$\int\limits_{Q_T}\big(L_\alpha^{\mathrm{reg}} u\big)(x,t)v(x,t)\,dxdt = \int\limits_{Q_T} u(x,t)(\widehat{L}_\alpha v)(x,t)\,dxdt - \int\limits_{Q_T} u(x,0)f_{1-\alpha}(t)v(x,t)\,dxdt. \quad (1)$$

Действительно,

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)\big(L_\alpha^{\mathrm{reg}} u\big)(x,t)\,dxdt = \int\limits_{Q_T} v(x,t)\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau\right)dxdt - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{Q_T} v(x,t)\frac{u(x,0)}{(t-\tau)^\alpha}\,dxdt - \int\limits_{Q_T} v(x,t)u_{xx}(x,t)\,dxdt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая, что $v(x,T) = 0$, первое слагаемое перепишем так:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_0^T v_t(x,t)\left(\int\limits_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau\right)dt
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_0^T u(x,\tau)\left(\int\limits_\tau^T\frac{v_t(x,t)}{(t-\tau)^\alpha}\,dt\right)d\tau\\
&= -\int\limits_{Q_T} u(x,\tau)\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_\tau^T\frac{v(x,t)}{(t-\tau)^\alpha}\,dt\right)dxd\tau\\
&= \int\limits_{Q_T} u(x,t)(f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t))\,dxdt.
\end{aligned}$$

Учитывая также, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{Q_T} v(x,t)\frac{u(x,0)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dxdt = \int\limits_{Q_T} v(x,t)u(x,0)f_{1-\alpha}(t)\,dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)u_{xx}(x,t)\,dxdt = \int\limits_{Q_T} u(x,t)v_{xx}(x,t)\,dxdt,$$

получим формулу (1).

Предположение (А). $g \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$, $u_0 \in Z'_\alpha(\mathbb{R})$.

Формулировка задачи. В предположении (А) *решением задачи Коши*

$$(L_\alpha u)(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

называем обобщенную функцию $u \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$ такую, что

$$(u, \widehat{L}_\alpha\psi)_{Q_T} = (g,\psi)_{Q_T} + (u_0 \times f_{1-\alpha}, \psi) \quad \forall \psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T). \tag{4}$$

Вектор-функцией Грина задачи Коши (2), (3) называется такая вектор-функция

$$(G_0(x-\xi,t-\tau), G_1(x-\xi,t-\tau)),$$

что при достаточно гладких и финитных $g = g_0$, $u_0 = g_1$ функция

$$u(x,t) = (G_0(x-\xi,t-\tau), g_0(\xi,\tau))_{Q_T} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)g_1(\xi)\,d\xi \tag{5}$$

является классическим решением класса $C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачи Коши

$$\left(L_\alpha^{\mathrm{reg}} u\right)(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

При $\alpha = 1$ имеем $G_1(x,t) = G_0(x,t)$. В [13] отмечено, что при $\alpha \neq 1$ G_1 и G_0 не совпадают. Мы покажем, что $G_0(x,t) = f_{\alpha-1}(t) * G_1(x,t)$. Существование и свойства G_1 получены в [3].

Пусть

$$(\widehat{\mathscr{G}}_0\varphi)(\xi,\tau) = (G_0(x-\xi,t-\tau), \varphi(x,t))_{Q_T}, \quad (\xi,\tau) \in \overline{Q}_T,$$

$$(\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi)(\xi) = (G_1(x-\xi,t), \varphi(x,t))_{Q_T}, \quad \xi \in \mathbb{R},\ \varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T).$$

Теорема 1 (существования и единственности решения). *Пусть выполнено предположение* (А). *Функция $u \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$, заданная формулой*

$$(u,\varphi)_{Q_T} = (g(\xi,\tau), (\widehat{\mathscr{G}}_0\varphi)(\xi,\tau))_{Q_T} + (u_0(\xi), (\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi)(\xi)) \quad \forall \varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T), \tag{8}$$

является единственным решением задачи Коши (2), (3).

Заметим, что в случае непрерывной и ограниченной u_0, функции g из класса Гёльдера и ограниченной в Q_T, из формулы (8) получаем формулу (5) для классического решения задачи (6), (7).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые свойства вектор-функции Грина.

2. Свойства сопряженных операторов Грина

В [3] доказано существование функции $G_1(x,t)$ такой, что формула (5) определяет единственное классическое (класса $C^{2,\alpha}(Q_T)$) решение задачи Коши (6), (7) при $g_0(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in Q_T$, непрерывной g_1, $|g_1(x)|\le C\exp\{h|x|^{2/2-\alpha}\}$, $x\in\mathbb{R}$, где $0\le h<\mu_0 T^{-\alpha/2-\alpha}$, $\mu_0=(2-\alpha)\alpha^{\alpha/2}2^{-2/2-\alpha}$. Тогда

$$L_\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)g_1(\xi)\,d\xi = \left(D_t^\alpha - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)g_1(\xi)\,d\xi\right) \\ + f_{1-\alpha}(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)g_1(\xi)\,d\xi\Big|_{t=0} = f_{1-\alpha}(t)\times g_1(x).$$

Следовательно, функция $G_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$(L_\alpha G_1)(x,t) = f_{1-\alpha}(t)\times\delta(x). \tag{9}$$

В [3] показано, что

$$\left|D_x^j G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}}\exp\{-\mu_j|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\} \quad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2\ge 1, \tag{10}$$

$$\left|D_x^j G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \quad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2\le 1,\ j=0,1,2,\dots, \tag{11}$$

$$\left|D_t^\beta G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\beta}\exp\{-\mu_\beta|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\} \quad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2\ge 1, \tag{12}$$

$$\left|D_t^\beta G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\beta} \quad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2\le 1,\ 0<\beta<1, \tag{13}$$

где в качестве μ_j и μ_β можно взять произвольные положительные числа, меньшие μ_0. Разные положительные постоянные обозначили одной буквой C.

Замечание. Так как

$$1\le e\exp\{-\mu_0|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}$$

при $t^{-\alpha}|x|^2\le 1$, из (11) и (13) получаем, что оценки (10) и (12) являются правильными для всех значений $x\in\mathbb{R}$, $t\in(0,T]$, $(x,t)\ne(0,0)$ (правда, слабее оценок (11) и соответственно (13) в случае $t^{-\alpha}|x|^2\le 1$).

Обозначим

$$G_\alpha(x,t)\equiv f_{\alpha-1}(t)*G_1(x,t),$$

$$(\widehat{\mathscr{G}}_\alpha\varphi)(\xi,\tau) = (G_\alpha(x-\xi,t-\tau),\varphi(x,t))_{Q_T}, \quad \varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T).$$

Заменяя α на $1-\alpha$ в определении регуляризованной производной, получаем

$$G_\alpha(x,t) = f_{\alpha-1}(t)*G_1(x,t) = D_t^{1-\alpha}G_1(x,t) + f_\alpha(t)\times\delta(x). \tag{14}$$

Лемма 1. $\widehat{\mathscr{G}}_\alpha : Z_\alpha(\overline{Q}_T)\to Z_\alpha(\overline{Q}_T)$, $\quad \widehat{\mathscr{G}}_1 : Z_\alpha(\overline{Q}_T)\to Z_\alpha(\mathbb{R})$.

Доказательство. Для $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ изучим сначала $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi)(\xi)$, $q=0,1,2,\dots$. Рассмотрим

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\varphi(x,t)G_1(x-\xi,t)\,dx = I_q^1(\xi).$$

Для $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ имеем

$$\left|I_q^1(\xi)\right| \le C_{0,q}C\left|\int\limits_0^T t^{-\frac{\alpha}{2}}\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\mu[|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}+|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}]\}\,dx\right|,$$

где $\mu=\min\{a,\mu_0\}$. По лемме 5.1 (см. [14, с. 35])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\widetilde{\mu}[|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}+|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}]\}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\,dx$$
$$\le M(\epsilon)(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\exp\{-\widetilde{\mu}(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\},\quad(15)$$

где $0<\epsilon<1$, $M(\epsilon)>0$, откуда при $\tau=0$ получаем

$$\left|I_q^1(\xi)\right| \le C_{0,q}CM(\epsilon)T^{-\frac{\alpha}{2}}\exp\{-\mu(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}\int\limits_0^T(T-t)^{\frac{\alpha}{2}}\,dt$$
$$=\frac{2}{2+\alpha}C_{0,q}CM(\epsilon)T\exp\{-\mu(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}.$$

Из оценок функции G_1 и свойств $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$

$$\int\limits_0^T\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\varphi(x,t)G_1(x-\xi,t)\bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}dt=0\quad\text{для всех }\xi\in\mathbb{R},\ q=0,1,2,\dots.\quad(16)$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)G_1(x-\xi,t)=\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)G_1(x-\xi,t),$$

интегрированием по частям с использованием (16) получаем существование

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi)(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\varphi(x,t)G_1(x-\xi,t)\,dx=I_q^1(\xi)$$

для всех $q=0,1,2,\dots$. Отсюда следует, что

$$(\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi)(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)G_1(x-\xi,t)\,dx,\quad\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$$

и имеют место оценки

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi)(\xi)\right|\le\widehat{C}_{0,q}\exp\{-\mu(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\},\quad q=0,1,2,\dots,$$

т. е. $\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi\in Z_\alpha(\mathbb{R})$.

Теперь рассмотрим

$$\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x,t)|\left|D_t^{1-\alpha}G_1(x-\xi,t-\tau)\right|dx+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_\tau^T\frac{|\varphi(\xi,t)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Из свойств функции $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ следует, что функция

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\tau^T \frac{\varphi(\xi,t)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt = f_\alpha(\tau)\hat{*}\varphi(\xi,\tau)$$

бесконечно дифференцируема в $\overline{Q}_T$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(f_\alpha(\tau)\hat{*}\varphi(\xi,\tau)) = f_\alpha(\tau)\hat{*}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q\varphi(\xi,\tau)$$

для всех $p,q=0,1,2,\dots$ и имеют место оценки

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\tau^T \frac{\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q\varphi(\xi,t)\right|}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt \le \frac{C_{p,q}}{\Gamma(\alpha)}\int_\tau^T \frac{\exp\{-a|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt$$
$$\le \frac{C_{p,q}C_1}{\Gamma(\alpha)}\exp\{-a|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}\int_\tau^T \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt$$
$$= \frac{C_{p,q}C_1(T-\tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\exp\{-a|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}. \quad (17)$$

Следовательно, $f_\alpha(\tau)\hat{*}\varphi(\xi,\tau)$ принадлежит $Z_\alpha(\overline{Q}_T)$.

Рассмотрим

$$\int_\tau^T dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\varphi(x,t)D_t^{1-\alpha}G_1(x-\xi;t-\tau)\,dx = I_q^\alpha(\xi,\tau).$$

Из оценок (12) и свойств функции φ получаем непрерывность $I_q^\alpha(\xi,\tau)$ в $\overline{Q}_T$. Учитывая (12) и оценки производных функции $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$, имеем

$$\left|I_q^\alpha(\xi,\tau)\right| \le C_{0,q}C\left|\int_\tau^T (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\widetilde{\mu}[|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right.$$
$$\left. + |x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}]\}\,dx\right|,$$

где $\widetilde{\mu}=\min\{a,\mu_\alpha\}$, и тогда из (15) вытекает, что

$$\left|I_q^\alpha(\xi,\tau)\right| \le C_{0,q}CM(\epsilon)(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\exp\{-\widetilde{\mu}(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}$$
$$\times\int_\tau^T (t-\tau)^{\alpha-1}(T-t)^{\frac{\alpha}{2}}\,dt \le C_{0,q}CM(\epsilon)\exp\{-\widetilde{\mu}(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}$$
$$\times\left|\int_\tau^T (t-\tau)^{\alpha-1}\,dt\right| = \frac{1}{\alpha}C_{0,q}CM(\epsilon)(T-\tau)^\alpha\exp\{-\widetilde{\mu}(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}.$$

В силу формул (14) и (16) отсюда следует, что существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$

$$(\widehat{\mathscr{G}}_\alpha\varphi)(\xi,\tau) = (G_\alpha(x-\xi,t-\tau),\varphi(x,t))_{Q_T}$$
$$= \int_\tau^T dt\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)D_t^{1-\alpha}G_1(x-\xi,t-\tau)\,dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\tau^T\frac{\varphi(\xi,t)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,dt,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(\widehat{\mathscr{G}}_\alpha\varphi)(\xi,\tau)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\varphi(x,t)D_t^{1-\alpha}G_1(x-\xi;t-\tau)\,dx$$
$$+f_\alpha(\tau)\hat{*}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q\varphi(\xi,\tau)=I_q^\alpha(\xi,\tau)+f_\alpha(\tau)\hat{*}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q\varphi(\xi,\tau)$$

и имеют место оценки

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(\widehat{G}_\alpha\varphi)(\xi,\tau)\right|\le\widetilde{C}_{0,q}\exp\{-\widetilde{\mu}(1-\epsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}\quad\forall q=0,1,2,\dots.$$

При $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\varphi(x,t)D_t^{1-\alpha}G_1(x-\xi,t-\tau)\,dx$$

существуют для всех $t-\tau\ge 0$, $p=0,1,2,\dots$. Для интегралов

$$\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\varphi(x,t)D_t^{1-\alpha}G_1(x-\xi,t-\tau)\,dx=I_{p,q}^\alpha(\xi,\tau)$$

при всех $p,q=0,1,2,\dots$ получаем такие же оценки, как и для интегралов $I_q^\alpha(\xi,\tau)$. Поэтому, учитывая, что

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\varphi\Big|_{t=T}=0,\quad p=0,1,2,\dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G_1(x-\xi,t-\tau)=-\frac{\partial}{\partial t}G_1(x-\xi,t-\tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G_\alpha(x-\xi,t-\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}(f_{\alpha-1}(t-\tau)*G_1(x-\xi,t-\tau))=-\frac{\partial}{\partial t}G_\alpha(x-\xi,t-\tau),$$

при $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ в силу (17) выводим существование

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q(\widehat{\mathscr{G}}_\alpha\varphi)(\xi,\tau)=I_{p,q}^\alpha(\xi,\tau)+f_\alpha(\tau)\hat{*}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^q\varphi(\xi,\tau)$$

для всех $p,q=0,1,2,\dots$ и $\widehat{\mathscr{G}}_\alpha\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ для $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$.

Лемма 2. *Для каждой $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ существует $\psi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ такая, что $\widehat{L}_\alpha\psi=\varphi$.*

Доказательство. По лемме 1 для каждой $\varphi\in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ функция

$$\psi(\xi,\tau)=(\widehat{\mathscr{G}}_\alpha\varphi)(\xi,\tau)\tag{18}$$

принадлежит $Z_\alpha(\overline{Q}_T)$. Учитывая (14) и (9), покажем, что функция (18) удовлетворяет уравнению $\widehat{L}_\alpha\psi=\varphi$. В самом деле,

$$\widehat{L}_\alpha\psi=\widehat{L}_\alpha((f_{\alpha-1}*G_1)\hat{*}\varphi)=(L_\alpha(f_{\alpha-1}*G_1))\hat{*}\varphi=(f_{\alpha-1}*L_\alpha G_1)\hat{*}\varphi$$
$$=(f_{\alpha-1}(t)*(f_{1-\alpha}(t)\times\delta(x)))\hat{*}\varphi(x,t)=((f_{\alpha-1}(t)*f_{1-\alpha}(t))\times\delta(x))\hat{*}\varphi(x,t)$$
$$=(\delta(t)\times\delta(x))\hat{*}\varphi(x,t)=\delta\hat{*}\varphi=\varphi.$$

Лемма 3. *Для произвольной* $\psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$

$$(\widehat{\mathscr{G}}_0(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi,\tau) = \psi(\xi,\tau), \quad (\xi,\tau) \in \overline{Q}_T, \tag{19}$$

$$(\widehat{\mathscr{G}}_1(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi) = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(\xi,t)\,dt, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

и выполняется

$$G_0(x,t) = f_{\alpha-1}(t) * G_1(x,t) \quad \text{п. в. в } Q_T. \tag{21}$$

Доказательство. Из формулы (1) для решения $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачи Коши (6), (7) с произвольными гладкими и финитными g_0, g_1 и для $\psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T u(x,t)(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dxdt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T g_0(x,t)\psi(x,t)\,dxdt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(x,t)\,dt\right] g_1(x)\,dx. \tag{22}$$

Согласно представлению этого решения в виде (5)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T u(x,t)(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(G_0(x-\xi,t-\tau),g_0(\xi,\tau))_{Q_T}(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dx$$
$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(G_1(x-\xi,t),g_1(\xi))(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dx = \int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathscr{G}}_0(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi,\tau)g_0(\xi,\tau)\,d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathscr{G}}_1(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi)g_1(\xi)\,d\xi.$$

Левые части полученного равенства и (22) равны, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T(\widehat{\mathscr{G}}_0(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi,\tau)g_0(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\widehat{\mathscr{G}}_1(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi)g_1(\xi)\,d\xi$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^T g_0(\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(\xi,t)\,dt\right] g_1(\xi)\,d\xi.$$

В силу произвольности g_0, g_1 имеем формулы (19), (20).

Соотношение (21) следует из (19) и (20). Действительно, записывая вместо

ψ ее выражение (19), получаем

$$\int\limits_0^T f_{1-\alpha}(\tau)\psi(\xi,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(\tau)(\widehat{\mathscr{G}}_0(\widehat{L}_\alpha\psi))(\xi,\tau)\,d\tau$$
$$= \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(\tau)(G_0(x-\xi,t-\tau),(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t))_{Q_T}\,d\tau$$
$$= ((f_{1-\alpha} * G_0)(x-\xi,t-\tau),(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t))_{Q_T}$$
$$= \int\limits_0^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_{1-\alpha} * G_0)(x-\xi,t-\tau)(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dx.$$

Записывая вместо левой части этого тождества ее выражение из формулы (20), получаем

$$\int\limits_0^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dx$$
$$= \int\limits_0^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_{1-\alpha} * G_0)(x-\xi,t-\tau)(\widehat{L}_\alpha\psi)(x,t)\,dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

По лемме 2 для каждой $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ существует $\psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ такая, что $\widehat{L}_\alpha\psi = \varphi$. Поэтому из (23) следует, что

$$\int\limits_{Q_T} G_1(x-\xi,t)\varphi(x,t)\,dxdt = \int\limits_{Q_T} [f_{1-\alpha}(t) * G_0(x-\xi,t)]\,\varphi(x,t)\,dxdt \quad \forall \varphi \in D(Q_T),$$

откуда по лемме Дю Буа-Реймона [11, с. 95] получаем соотношение (21).

Из леммы 3 вытекает, что $G_0 = G_\alpha$ п. в. в Q_T. Также, учитывая формулу (9), имеем

$$(L_\alpha G_0)(x,t) = L_\alpha(f_{\alpha-1}(t) * G_1(x,t)) = f_{\alpha-1}(t) * (L_\alpha G_1)(x,t)$$
$$= f_{\alpha-1}(t) * (f_{1-\alpha}(t) \times \delta(x)) = \delta(t) \times \delta(x) = \delta(x,t),$$

т. е. $(L_\alpha G_0)(x,t) = \delta(x,t)$.

3. Теорема существования и единственности

Докажем теорему 1. По лемме 1 для каждой $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ имеем $\widehat{\mathscr{G}}_0\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$, $\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi \in Z_\alpha(\mathbb{R})$. Следовательно, правая часть формулы (8) определена для произвольной $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$. Функционал u, определенный формулой (8), т. е.

$$(u,\varphi)_{\overline{Q}_T} = (g,\widehat{\mathscr{G}}_0\varphi)_{\overline{Q}_T} + (u_0,\widehat{\mathscr{G}}_1\varphi) \quad \forall \varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T),$$

линейный и непрерывный на $Z_\alpha(\overline{Q}_T)$. Покажем, что u удовлетворяет тождеству (4). Учитывая лемму 3, получим

$$\widehat{\mathscr{G}}_0(\widehat{L}_\alpha\psi) = \psi, \quad \widehat{\mathscr{G}}_1(\widehat{L}_\alpha\psi) = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(\cdot,t)\,dt \quad \forall \psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T).$$

Тогда

$$(u, \widehat{L}_\alpha \psi)_{Q_T} = (g, \widehat{\mathscr{G}}_0(\widehat{L}_\alpha \psi))_{Q_T} + (u_0, \widehat{\mathscr{G}}_1(\widehat{L}_\alpha \psi)) = (g, \psi)_{Q_T}$$
$$+ \left(u_0(\xi), \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t) \psi(\xi, t)\, dt \right) = (g, \psi)_{Q_T} + (u_0 \times f_{1-\alpha}, \psi) \quad \forall \psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T).$$

Докажем единственность решения задачи. Если $u_1, u_2 \in Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$ — два решения задачи, то $u = u_1 - u_2$ принадлежит $Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$ и по определению решения задачи удовлетворяет тождеству

$$(u, \widehat{L}_\alpha \psi)_{Q_T} = 0$$

для каждой $\psi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$. По лемме 2 для любой $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$ существует решение

$$\psi = \widehat{\mathscr{G}}_\alpha \varphi = \widehat{\mathscr{G}}_0 \varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$$

уравнения $\widehat{L}_\alpha \psi = \varphi$. Тогда $(u, \varphi)_{Q_T} = 0$ для каждой $\varphi \in Z_\alpha(\overline{Q}_T)$, т. е. $u = 0$ в $Z'_\alpha(\overline{Q}_T)$.

Полученный результат распространяется на задачу Коши для уравнения

$$f_{-\alpha}(t) * u(x,t) = A(x, D) u(x,t) + g(x,t,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in (0, T],$$

где $A(x, D)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 2. С. 261–264.
2. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. Киев: Вища школа, 1990.
3. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser-Verl., 2004.
5. *Бондаренко А. Н., Иващенко Д. С.* Численные методы решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени с постоянным коэффициентом // Дифференциальные уравнения, теория функции и приложения: Тр. междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа. (Новосибирск, 28 мая–2 июня 2007 г.) Новосибирск, 2007. С. 556–557.
6. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций // Укр. мат. журн. 1986. Т. 38, № 6. С. 795–798.
7. *Лопушанська Г. П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002.
8. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Гріна параболічнох крайовох задачі // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. 2004. № 191–192. С. 82–88.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Гостехиздат, 1958. Вып. 2.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
12. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.

13. *Повстенко Ю., Деркач С.* Фундаментальні розв'язки двовимірного рівняння аномальної дифузії і зумовлені ними дифузійні напруження // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2004. № 63. С. 114–122.

14. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964.

Статья поступила 31 декабря 2010 г.

Лопушанская Галина Петровна, Пасичник Елена Викторовна
Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Университетская, 1, Львов 79000, Украина
lhp@ukr.net, olena.pasichnyk@gmail.com

Лопушанский Андрей Олегович
Institute of Mathematics, Rzeszów University,
16A Rejtana str. 35-310 Rzeszów, Poland
alopushanskyj@gmail.com