Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.546

ОЦЕНКИ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Э. Г. Кирьяцкий

Аннотация. Даются оценки модуля и вещественной части разделенной разности n-го порядка аналитических в круге функций. Особое внимание в этих оценках уделяется вопросу о знаках равенства.

Ключевые слова: аналитическая функция, производная, разделенная разность.

Введение. Пусть E_R — круг $|z| < R$ и $f(z)$ — аналитическая в круге E_R функция. Определим разделенную разность n-го порядка следующей рекуррентной формулой [1, 2]:

$$[f(z); z_0] = f(z_0), \quad [f(z); z_0, z_1] = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1},$$

$$[f(z); z_0, z_1, \dots, z_n] = \frac{[f(z); z_0, \dots, z_{n-1}] - [f(z); z_1, \dots, z_n]}{z_0 - z_n},$$

где точки $z_0, \dots, z_n \in E_R$ попарно различны. Разделенную разность можно доопределить, если среди точек $z_9, \dots, z_n$ есть совпадающие между собой точки. Например, если $z_0 = z_1 = \xi$, то полагаем $[f(z); \xi, \xi] = f'(\xi)$. Вообще, если точки $\xi_0, \dots, \xi_s \in E$ попарно различны, то полагаем [3]

$$[f(z); \underbrace{\xi_0, \dots, \xi_0}_{p_0}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{p_s}] = \frac{1}{(p_0 - 1)! \dots (p_s - 1)!} \frac{\partial^{n-s}[f(z); \xi_0, \dots, \xi_s]}{\partial \xi_0^{p_0 - 1} \dots \partial \xi_s^{p_s - 1}},$$

где $p_0 + \dots + p_s = n + 1$. В частности, если $z_0 = z_1 = \dots = z_n = \xi$, то

$$[f(z); \underbrace{\xi, \dots, \xi}_{n+1}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Так как круг E_R является выпуклой областью, разделенную разность n-го порядка функции $f(z)$ в точках $z_0, \dots, z_n \in E_R$ можно определить также формулой [1, 2]

$$[f(z); z_0, \dots, z_n] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n, \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered} \zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E_R, \\ 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le t_1, \dots, 0 \le t_n \le t_{n-1}. \end{gathered} \tag{2}$$

В формуле (1) точки $z_0, \dots, z_n \in E_R$ могут совпадать между собой. Если $z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0$, то разделенная разность (1) превращается в коэффициент Маклорена $f^{(n)}(0)/n!$. Если $z_0 = z_1 = \dots = z_n = \xi$, то получим коэффициент Тейлора $f^{(n)}(\xi)/n!$. В общем случае разделенную разность $[f(z); z_0, \dots, z_n]$ можно назвать *коэффициентом Ньютона.*

Разделенную разность n-го порядка для функции $M(r)$ можно определить аналогично формуле (1) и записать в виде [1, 2]

$$[M(r); r_0, \dots, r_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n,$$

где $r_0, \dots, r_n$ принадлежат промежутку $0 \le r < R$ и

$$\rho = r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \dots + t_n(r_n - r_{n-1}),$$

$$0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le t_1, \dots, 0 \le t_n \le t_{n-1}.$$

Пусть $z_0, \dots, z_{n-1} \in E_R$ попарно различны. Для аналитической в круге E_R функции $f(z)$ запишем интерполяционную формулу Ньютона [1, 2] в виде

$$f(z) = P_{n-1}(z) + H_{n-1}(z),$$

где $P_{n-1}(z)$ — интерполяционный многочлен Эрмита:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(z) = f(z_0) + [f(z); z_0, z_1](z - z_0) + \dots \\ + [f(z); z_0, \dots, z_{n-1}](z - z_0) \cdots (z - z_{n-2}), \end{aligned} \tag{3}$$

и $H_{n-1}(z)$ — остаточный член интерполяционной формулы:

$$H_{n-1}(z) = [f(z); z_0, \dots, z_{n-1}, z](z - z_0) \cdots (z - z_{n-1}).$$

Отсюда

$$f(z) - P_{n-1}(z) = [f(z); z_0, \dots, z_{n-1}, z](z - z_0) \cdots (z - z_{n-1}).$$

Кроме того,

$$[f(z); z_0, \dots, z_{n-1}, z] = \frac{f(z) - P_{n-1}(z)}{(z - z_0) \cdots (z - z_{n-1})}. \tag{4}$$

В теории аналитических функций важное место занимают оценки модулей функции и их производных. Например, совсем недавно в результате решения де Бранжем [4] знаменитой гипотезы Бибербаха о коэффициентах однолистных функций из класса S были установлены оценки [5]

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(z)| \le \frac{n + |z|}{(1 - |z|)^{n+2}} \quad \forall z \in E_1,\ n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5}$$

со знаком равенства для функций Кебе

$$f_\alpha(z) = \frac{z}{(1 - e^{-i\alpha} z)^2} \quad 0 \le \alpha \le 2\pi. \tag{6}$$

Имеется много работ, связанных с различного рода оценками разделенной разности аналитических в области функций. Например, в [6] Илиевым дана верхняя и нижняя оценки модуля первой разделенной разности однолистных функций из класса S:

$$\frac{1 - |z_0||z_1|}{(1 + |z_0|)^2 (1 + |z_1|)^2} \le \left| \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1} \right| \le \frac{1 - |z_0||z_1|}{(1 - |z_0|)^2 (1 - |z_1|)^2}.$$

В. В. Андреев в [7] оценил сверху модуль первой разделенной разности аналитической в круге E_1 функции в зависимости от поведения модуля ее производной. В [8] П. Г. Тодоровым рассмотрен вопрос о знаках равенства в оценках, данных В. В. Андреевым.

В настоящей работе мы показываем, как можно осуществить переход от оценки модуля n-й производной $f^{(n)}(z)$ любой аналитической в круге E_R функции $f(z)$ к оценке модуля n-й разделенной разности этой функции. Даются также оценки вещественной части разделенной разности n-го порядка. Такого рода теоремы мы называем *теоремами перехода*. Кроме того, даются оценки остаточного члена интерполяционной формулы Ньютона. Приводятся следствия из доказанных теорем. Особое внимание в наших оценках уделяется вопросу о равенстве. Оказалось, например, что равенство реализуется тогда, когда точки $z_0, \dots, z_n$, участвовавшие в построении n-й разделенной разности, располагаются на луче, а не на окружности, как это часто бывает при рассмотрении различного рода неравенств в теории аналитических функций.

I. Под $M(r)$ будем понимать функцию вещественного переменного r, определенную в промежутке $0 \le r < R$ и имеющую в этом промежутке непрерывную строго возрастающую n-ю производную $M^{(n)}(r)$. Пусть $L(\gamma)$ — луч, выходящий из начала координат под углом γ, $0 \le \gamma < 2\pi$, к положительной части вещественной оси. Если точки $z_0, \dots, z_n$ лежат на луче $L(\gamma)$, то пусть $Z(z_0, \dots, z_n)$ — наименьший отрезок, содержащий эти точки. Пусть $X(r_0, \dots, r_n)$ — наименьший отрезок, содержащий все точки $r_0, \dots, r_n$, где $r_0 = |z_0|, \dots, r_n = |z_n|$. Сформулируем и докажем следующую теорему перехода.

Теорема 1. *Пусть*

$$[f^{(n)}(z)] \le M^{(n)}(r) \quad \forall |z| \le r < R,\ n \ge 1. \tag{7}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Для любых $z_0, \dots, z_n \in E_R$ справедливо неравенство*

$$|[f(z); z_0, \dots, z_n]| \le [M(r); r_0, \dots, r_n]. \tag{8}$$

2. *Пусть $f^{(n)}(z)$ не является тождественно постоянной. Пусть также для функции $f(z)$ и точек $z_0, \dots, z_n \in E_R$, среди которых есть различные между собой точки, имеет место равенство*

$$|[f(z); z_0, \dots, z_n]| = [M(r); r_0, \dots, r_n]. \tag{9}$$

Тогда существуют вещественные числа α и β такие, что

$$z_m = r_m e^{i\alpha}, \quad m = 0, \dots, n \tag{10}$$

(точки $z_0, \dots, z_n$ из круга E_R лежат на отрезке $Z(z_0, \dots, z_n)$ луча $L(\alpha)$), и справедливо равенство

$$f^{(n)}(re^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) \quad \forall r \in X(r_0, \dots, r_n). \tag{11}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$[f(z); z_0^*, \dots, z_n^*] = [M^{(n)}(r); r_0^*, \dots, r_n^*] \tag{12}$$

для любых $z_m^* = r_m^* e^{i\alpha}, z_0^* = r_0^* e^{i\alpha}, \dots, z_n^* = r_n^* e^{i\alpha}$, взятых из круга E_R и лежащих на отрезке $Z(z_0, \dots, z_n)$ луча $L(\alpha)$.

3. *Пусть* $f^{(n)}(z) \equiv c$ *и выполнены условия* (7) *и* (9). *Тогда справедливо равенство*

$$c = M^{(n)}(\tilde{r})e^{i\beta}, \quad \text{где } \tilde{r} \in X(r_0, \dots, r_n). \tag{13}$$

4. *Разность двух функций, удовлетворяющих условиям* (5), (7), *может быть только многочленом степени не выше* $n-1$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся леммы. В дальнейшем T_n — множество точек $(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n$ удовлетворяют условиям (2).

Лемма 1. (a) *Для любой точки* $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ *и любых* $z_0, \dots, z_n \in E_R$ *справедливы неравенства* $|\zeta| \le \rho$ *и* $\rho < R$, *где*

$$\zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E_R,$$

$$\rho = r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \dots + t_n(r_n - r_{n-1}) \in X(r_0, \dots, r_n).$$

(b) *Если все точки* $z_0, \dots, z_n \in E_R$ *расположены на луче* $L(\gamma)$, *то для любой точки* $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ *имеет место равенство* $|\zeta| = \rho$.

(c) *Пусть* $z_0, \dots, z_n \in E_R$ *и в какой-либо точке* $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ *имеет место равенство* $|\zeta| = \rho$, *причем числа* $0, 1, t_1, \dots, t_n$ *попарно различны. Тогда точки* $z_0, \dots, z_n$ *должны лежать на луче. Если не требовать попарного различия чисел* $0, 1, t_1, \dots, t_n$, *то равенство* $|\zeta| = \rho$ *может иметь место и тогда, когда не все точки* $z_0, \dots, z_n$ *лежат на луче.*

(d) *Если* $(t_1, \dots, t_n)$ *пробегает все точки из* T_n, *то* ζ *при фиксированных* $z_0, \dots, z_n \in E_R$ *пробегает все точки наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего точки* $z_0, \dots, z_n$ *и* ρ *пробегает все точки отрезка* $X(r_0, \dots, r_n)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} |\zeta| &= |z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1})| \\ &= |(1-t_1)z_0 + (t_1 - t_2)z_1 + \dots + t_n z_n| \le (1-t_1)r_0 + (t_1-t_2)r_1 + \dots + t_n r_n \\ &= \rho < (1-t_1)R + (t_1 - t_2)R + \dots + t_n R = R. \end{aligned}$$

Доказан п. (a) леммы 1.

Пусть точки $z_0, \dots, z_n \in E_R$ лежат на луче $L(\gamma)$. Тогда

$$|\zeta| = |r_0 e^{i\gamma} + t_1(r_1 e^{i\gamma} - r_0 e^{i\gamma}) + \dots + t_n(r_n e^{i\gamma} - r_{n-1}e^{i\gamma})| = \rho.$$

Доказан п. (b) леммы 1.

Пусть $z_0, \dots, z_n \in E_R$ и в какой-либо точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$, где числа $0, 1, t_1, \dots, t_n$ попарно различны, имеет место равенство $|\zeta| = \rho$, т. е.

$$|(1-t_1)z_0 + (t_1-t_2)z_1 + \dots + t_n z_n| = (1-t_1)r_0 + (t_1-t_2)r_1 + \dots + t_n r_n.$$

Так как

$$(1-t_1) > 0, \ (t_1 - t_2) > 0, \ \dots, \ (t_{n-1} - t_n) > 0, \quad t_n > 0,$$

основываясь на неравенстве треугольника для комплексных чисел, получим, что точки $z_0, \dots, z_n$ лежат на луче. Если не требовать попарного различия чисел $0, 1, t_1, \dots, t_n$, то равенство $|\zeta| = \rho$ может иметь место и тогда, когда не все точки $z_0, \dots, z_n$ лежат на луче. Например, пусть точки $z_0, z_2, \dots, z_n$ лежат на луче, а точка $z_1 \in E_R$ не лежит на этом луче. Возьмем $t_1 = t_2$. Тогда равенство $|\zeta| = \rho$ будет выполняться. Доказан п. (c) леммы 1.

Пусть

$$\tau_1 = 1 - t_1, \tau_2 = t_1 - t_2, \dots, \tau_{n-1} = t_{n-1} - t_n, \tau_n = t_n.$$

Тогда ζ и ρ можно записать в виде

$$\zeta = \tau_0 z_0 + \tau_1 z_1 + \dots + \tau_n z_n, \quad \rho = \tau_0 r_0 + \tau_1 r_1 + \dots + \tau_n r_n,$$

причем

$$\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_n = 1, \quad \tau_0 \ge 0, \tau_1 \ge 0, \dots, \tau_n \ge 0. \tag{14}$$

Множество точек $(\tau_0, \dots, \tau_n)$, удовлетворяющих условию (14), обозначим через T^*. Если $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n, то $(\tau_0, \dots, \tau_n)$ пробегает все точки из T^*. Как известно [1], если $(\tau_0, \dots, \tau_n)$ пробегает все точки из T^*, то ζ пробегает все точки из наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего все точки $z_0, \dots, z_n$, и ρ пробегает все точки отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$. Доказан п. (d) леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $g(t_1, \dots, t_n)$ — комплекснозначная функция переменных $(t_1, \dots, t_n)$, непрерывная в T_n. Для того чтобы выполнялось равенство*

$$\left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} g(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n \right| = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} |g(t_1, \dots, t_n)|\, dt_1 \dots dt_n, \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы все значения функции $g(t_1, \dots, t_n)$ в точках $t_1, \dots, t_n \in T_n$ лежали на некотором луче $L(\gamma)$.

Доказательство. Положим

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} g(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n = \left| \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} g(t, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n \right| e^{i\gamma}.$$

Тогда равенство (15) можно записать в виде

$$\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re}\{e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)\}\, dt_1 \dots dt_n$$
$$= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} |e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)|\, dt_1 \dots dt_n. \tag{16}$$

Кроме того,

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)\} \le |e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)| \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n. \tag{17}$$

Функции $\operatorname{Re}\{e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)\}$ и $|e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)|$ непрерывны в T_n. Поэтому из (16), (17) следует, что

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)\} = |e^{-i\gamma} g(t_1, \dots, t_n)| \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n.$$

Но тогда все значения функции $g(t_1, \dots, t_n)$ лежат на некотором луче $L(\gamma)$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала п. 1 теоремы 1. Очевидно, при любых $z_0,\dots,z_n\in E_R$ имеем

$$|[f(z);z_0,\dots,z_n]|=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\,dt_1\dots dt_n\right| \\ \le \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\,dt_1\dots dt_n. \qquad (18)$$

Пользуясь принципом максимума модуля, леммой 1 и условием (7), получим

$$|f^{(n)}(\zeta)|\le\max_{|z|=|\zeta|}|f^{(n)}(z)|\le\max_{|z|=\rho}|f^{(n)}(z)|\le M^{(n)}(\rho) \qquad (19)$$

для любой точки $(t_1,\dots,t_n)\in T_n$. Отсюда

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\,dt_1\dots dt_n \le \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\,dt_1\dots dt_n \\ =[M(r);r_0,\dots,r_n]. \qquad (20)$$

Опираясь на (18) и (20), приходим к (8), т. е. мы доказали утверждение из п. 1 теоремы 1.

Переходим к п. 2 теоремы 1. Пусть выполняются условия (7) и (9). Объединяя неравенства (18), (20), получим

$$|[f(z);z_0,\dots,z_n]|=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\,dt_1\dots dt_n\right| \\ \le \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\,dt_1\dots dt_n \le \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\,dt_1\dots,dt_n \\ =[M(r);r_0,\dots r_n]. \qquad (21)$$

Из (9) и (21) получаем два вида равенств:

$$|[f(z);z_0,\dots,z_n]|=\left|\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\,dt_1\dots dt_n\right| \\ = \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\,dt_1\dots dt_n, \qquad (22)$$

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} |f^{(n)}(\zeta)|\,dt_1\dots dt_n \\ = \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\,dt_1\dots dt_n=[M(r);r_0,\dots,r_n]. \qquad (23)$$

Заметим, что $|f^{(n)}(\zeta)|$ и $M^{(n)}(\rho)$ являются непрерывными функциями в области T_n. Тогда, рассматривая (19) и (23), приходим к выводу, что

$$|f^{(n)}(\zeta)| = M^{(n)}(\rho) \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n. \tag{24}$$

По лемме 1 если $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n, то при фиксированных $z_0, \dots, z_n \in E_R$ точка $\zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1})$ пробегает все точки наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего $z_0, \dots, z_n$, а соответствующая ей точка

$$\rho = r_0 + t_1(r_1 - r_0) + \dots + t_n(r_n - r_{n-1})$$

пробегает все точки наименьшего отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$. Поэтому равенство (24) справедливо для любого ζ из указанного многоугольника и соответствующего ему ρ из указанного отрезка. По той же лемме 1 имеем $|\zeta| \le \rho$. Далее, предположим, что для некоторого $\zeta_0 = z_0 + t_1^0(z_1 - z_0) + \dots + t_n^0(z_n - z_{n-1})$ и соответствующего $\rho_0 = r_0 + t_1^0(r_1 - r_0) + \dots + t_n^0(r_n - r_{n-1})$ нашлась такая точка $\big(t_1^0, \dots, t_n^0\big) \in T_n$, что выполняется строгое неравенство $|\zeta_0| < \rho_0$. Тогда с учетом того, что $F^{(n)}(z)$ не является постоянной, получим

$$|f^{(n)}(\zeta_0)| \le \max_{|z|=|\zeta_0|} |f^{(n)}(z)| < \max_{|z|=\rho_0} |f^{(n)}(z)| \le M^{(n)}(\rho_0),$$

т. е.

$$|f^{(n)}(\zeta_0)| < M^{(n)}(\rho_0). \tag{25}$$

Неравенство (25) противоречит равенству (24), поэтому наше предположение о справедливости строгого неравенства $|\zeta_0| < \rho_0$ ошибочно. Следовательно, имеет место равенство $|\zeta| = \rho$ для всех $\big(t_1, \dots, t_n\big) \in T_n$. Тогда среди этих точек найдется точка $\big(t_1^1, \dots, t_n^1\big) \in T_n$, для которой

$$\zeta_1 = z_0 + t_1^1(z_1 - z_0) + \dots + t_n^1(z_n - z_{n-1}) = \rho_1 = r_0 + t_1^1(r_1 - r_0) + \dots + t_n^1(r_n - r_{n-1}),$$

где $0, 1, t_1, \dots, t_n$ — попарно различные числа. Применяя лемму 1, получим, что все точки $z_0, \dots, z_n$ из круга E_R лежат на некотором луче $L(\alpha)$. Стало быть, $z_m = r_m^{i\alpha}$, $m = 0, 1, \dots, n$. Но тогда

$$\zeta = \rho e^{i\alpha} \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in T_n. \tag{26}$$

Значит, равенство (24) можно заменить равенством

$$|f^{(n)}(\zeta)| = |f^{(n)}(\rho e^{i\alpha})| = M^{(n)}(\rho) \tag{27}$$

для любого $\rho \in X(r_0, \dots, r_n)$.

Рассмотрим теперь равенство (22). К нему применим лемму 2, если вместо функции $g(t_1, \dots, t_n)$ возьмем функцию $f^{(n)}(\zeta)$, где $\zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \dots + t_n(z_n - z_{n-1})$. Согласно лемме 2 все значения функции $f^{(n)}(\zeta)$ лежат на некотором луче $L(\beta)$. Учитывая (26) и (27), получим

$$f^{(n)}(\zeta) = f^{(n)}(\rho e^{i\alpha}) = M^{(n)}(\rho) e^{i\beta} \tag{28}$$

для любого $\rho \in X(r_0, \dots, r_n)$. Из сказанного выше следует справедливость (10) и (11). Далее, возьмем любые точки $z_m^* = r_m^* e^{i\alpha}$, $m = 0, \dots, n$, из отрезка $Z(z_0, \dots, z_n)$ и положим

$$\zeta^* = z_0^* + t_1(z_1^* - z_0^*) + \dots + t_n(z_n^* - z_{n-1}^*), \ \rho^* = r_0^* + t_1(r_1^* - r_0^*) + \dots + t_n(r_n^* - r_{n-1}^*).$$

Тогда (28) можно переписать в виде

$$f^{(n)}(\zeta^*) = f^{(n)}(\rho^* e^{i\alpha}) = M^{(n)}(\rho^*) e^{i\beta}.$$

Отсюда получаем

$$[f(z); r_0^* e^{i\alpha}, \dots, r_n^* e^{i\alpha}] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \dots \int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\rho^* e^{i\alpha})\, dt_1 \dots dt_n$$
$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \dots \int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho^*) e^{i\beta}\, dt_1 \dots dt_n = [M(r); r_0^*, \dots, r_n^*] e^{i\beta}.$$

Таким образом, исходя из условий п. 2 теоремы 1, пришли к равенству (12). Заметим, что равенство (12) является достаточным условием для справедливости равенства (9).

Пусть теперь $f^{(n)}(z) \equiv c$ и выполняются условия (7) и (9). Имеем [1]

$$[f(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{c}{n!}, \quad [M(r); r_0, \dots, r_n] = \frac{M^{(n)}(\tilde r)}{n!}, \quad \tilde r \in X(r_0, \dots, r_n).$$

Значит, $|c| = M^{(n)}(\tilde r)$. Заметим, что точка $\tilde r$ является единственной точкой из отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$, так как функция $M^{(n)}(r)$ строго возрастает на этом отрезке. Доказано равенство (13) из п. 3 теоремы 1.

Пусть теперь $f_1(z)$, $f_2(z)$ — две аналитические в круге E_R функции, удовлетворяющие условиям (7) и (9). Тогда согласно (28) имеем

$$f_1^{(n)}(\rho e^{i\alpha}) = f_2^{(n)}(\rho e^{i\alpha}) = M^{(n)}(\rho) e^{i\beta} \quad \forall \rho \in X(r_0, \dots, r_n).$$

Отсюда следует, что разность между функциями $f_1(z)$ и $f_2(z)$ может быть только многочленом степени не выше $n-1$. Доказано утверждение из п. 4 теоремы 1.

Рассмотрим несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (7) *и* (9). *Тогда функция* $f^{(n)}(z)$ *взаимно однозначно отображает отрезок* $Z(z_0, \dots, z_n)$ *луча* $L(\alpha)$ *на отрезок* $Z(M^{(n)}(r_0)e^{i\beta}, \dots, M^{(n)}(r_n)e^{i\beta})$ *луча* $L(\beta)$.

Доказательство. По теореме 1 существуют такие α и β, что

$$f^{(n)}(re^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) e^{i\beta} \quad \forall r \in X(r_0, \dots, r_n).$$

Осталось воспользоваться тем, что $M^{(n)}(r)$ является непрерывной и строго возрастающей функцией на отрезке $r \in X(r_0, \dots, r_n)$.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия* (7) *и* (9). *Тогда*

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| = |f^{(n)}(re^{i\alpha})|, \quad r \in X(r_0, \dots, r_n).$$

В самом деле, по теореме 1 имеем равенство (11), которое вместе с неравенством (7) приводит к справедливости следствия 2.

Следствие 3. *Пусть выполнено условие* (7) *и, кроме того,*

$$f(0) = f^{(1)}(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = n!,$$

$$M(0) = M^{(1)}(0) = \dots = M^{(n-1)}(0) = 0, \quad M^{(n)}(0) = n!.$$

Тогда для любых $z_0, \dots, z_n \in E_R$ *и любого* m, $0 \le m \le n$, *справедливо неравенство*

$$|[f(z); z_0, \dots, z_m]| \le [M(r); r_0, \dots, r_m]. \tag{29}$$

Доказательство. Интегрируя (7) вдоль отрезка $[0, z]$, получим

$$|f^{(n-1)}(z)| \le M^{(n-1)}(r) \quad \forall |z| \le r < R.$$

Продолжая указанный процесс, придем к неравенствам

$$|f^{(m)}(z)| \le M^{(m)}(r) \quad \forall |z| \le r < R, \ m = 0, 1, \dots, n. \tag{30}$$

В частности, если $m = 0$, то

$$|f(z)| \le M(r) \quad \forall |z| \le r < R.$$

В случае $1 \le m \le n$ применим теорему 1 к неравенствам (30), благодаря чему получим (29).

Следствие 4. *Пусть выполнены условия* (7) *и* (9). *Пусть, кроме того, функция* $M(r)$ *имеет непрерывную производную* $(n+k)$*-го порядка, где* $k > 0$. *Тогда для любых* $z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet$, *взятых из отрезка* $Z(z_0, \dots, z_n)$, *имеет место равенство*

$$[f(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet] = [M(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n+k}^\bullet] e^{i(\beta - k\alpha)},$$

где

$$\alpha = \arg z_j, \quad \beta = \arg f^{(n)}(z_j), \quad |z_j^\bullet| = r_j^\bullet, \quad j = 0, \dots, (n+k).$$

Доказательство. По теореме 1 получаем, что

$$f^{(n)}(z) = M^{(n)}(r) e^{i\beta} \quad \forall z = re^{i\alpha} \in Z(z_0, \dots, z_n). \tag{31}$$

Дифференцируя равенство (31) k раз по z, имеем

$$f^{(n+k)}(z) = M^{(n+k)}(r) e^{i(\beta - k\alpha)} \quad \forall z = re^{i\alpha} \in Z(z_0, \dots, z_n). \tag{32}$$

Пусть $z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet \in Z(z_0, \dots, z_n)$. Положим

$$\zeta^\bullet = z_0^\bullet + t_1(z_1^\bullet - z_0^\bullet) + \dots + t_{n+k}(z_{n+k}^\bullet - z_{n+k-1}^\bullet),$$

$$\rho^\bullet = r_0^\bullet + t_1(r_1^\bullet - r_0^\bullet) + \dots + t_{n+k}(r_{n+k}^\bullet - r_{n+k-1}^\bullet), \quad (t_1, \dots, t_{n+k}) \in T_{n+k}.$$

Пользуясь тем, что $\zeta^\bullet = \rho^\bullet e^{i\alpha} \in E_R$, где $\rho^\bullet \in X(r_0, \dots, r_n)$, и равенством (32), получим

$$[f(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n+k-1}} f^{(n+k)}(\zeta^\bullet)\, dt_1 \dots dt_{n+k}$$

$$= e^{i(\beta - k\alpha)} \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n+k-1}} M^{(n+k)}(\rho^\bullet)\, dt_1 \dots dt_{n+k} = [M(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n+k}^\bullet] e^{i(\beta - km)}.$$

Следствие 5. *Пусть выполнены условия* (7), (9). *Тогда для любых* $z_0^\bullet, \dots, z_m^\bullet$ *из отрезка* $Z(z_0, \dots, z_n)$ *и любого* m, $1 \le m \le n$, *справедливо равенство*

$$[f^{(n-m)}(z); z_0^\bullet, \dots, z_m^\bullet] = [M^{(n-m)}(r); r_0^\bullet, \dots, r_m^\bullet]e^{i\beta},$$

где $\beta = \arg f^{(n)}(z_j)$, $|z_j^\bullet| = r_j$, $j = 0, \dots, m$.

Доказательство. По теореме 1 имеем

$$f^{(n)}(z) = M^{(n)}(r)e^{i\beta} \quad \forall z = re^{i\alpha} \in Z(z_0, \dots, z_n). \tag{33}$$

Интегрируя равенство (33) последовательно m раз по z вдоль отрезка $[z_0, z]$, получим

$$f^{(n-m)}(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(n-m+k)}(z_0)\frac{(z-z_0)^k}{k!}$$
$$= e^{i(\beta+m\alpha)}M^{(n-m)}(e^{-i\beta}z) - e^{i(\beta+k\alpha)}\sum_{k=0}^{m-1} M^{(n-m+k)}(r_0)\frac{(r-r_0)^k}{k!}. \tag{34}$$

Пусть точки $z_0^\bullet, \dots, z_m^\bullet$ взяты произвольно из отрезка $Z(z_0, \dots, z_n)$. Положим

$$\zeta^\bullet = z_0^\bullet + t_1(z_1^\bullet - z_0^\bullet) + \dots + t_m(z_m^\bullet - z_{m-1}^\bullet),$$
$$\rho^\bullet = r_0^\bullet + t_1(r_1^\bullet - r_0^\bullet) + \dots + t_m(r_m^\bullet - r_{m-1}^\bullet), \quad (t_1, \dots, t_m) \in T_m.$$

Заметим, что $\zeta^\bullet = \rho^\bullet e^{i\alpha} \in E_R$. Возьмем от обеих частей (34) разделенную разность m-го порядка в точках $z_0^\bullet, \dots, z_m^\bullet$. Так как разделенная разность m-го порядка от полинома степени не выше $m-1$ тождественно равна нулю, то

$$[f^{(n-m)}(z); z_0^\bullet, \dots, z_m^\bullet] = [e^{i(\beta+m\alpha)}M^{(n-m)}(e^{-i\alpha}z); z_0^*, \dots, z_m^*].$$

Отсюда

$$[f^{(n-m)}(z); z_0^\bullet, \dots, z_m^\bullet] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} f^{(n)}(\zeta^\bullet)\, dt_1 \dots dt_m$$
$$= \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} M^{(n)}(\rho^\bullet)e^{i\beta}\, dt_1 \dots dt_m = [M^{(n-m)}(r); r_0^\bullet, \dots, r_m^\bullet]e^{i\beta}.$$

Следствие 6. *Пусть выполнены условия* (7) *и* (9) *и, кроме того,*

$$f^{(n-m+k)}(z_0) = M^{(n-m+k)}(r_0)e^{i(\beta+(m-k)\alpha)}, \quad k = 0, 1, \dots, (m-1),\ 1 \le m < n, \tag{35}$$

где $\alpha = \arg z_0$, $\beta = \arg f^{(n)}(z_0)$. *Тогда при любых* $z_0^\bullet, \dots, z_{n-m}^\bullet \in Z(z_0, \dots, z_n)$ *и любом* m, $1 \le m < n$, *справедливо равенство*

$$[f(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n-m}^\bullet] = [M(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n-m}^\bullet]e^{i(\beta+m\alpha)},$$

где $|z_0^\bullet| = r_j^*$, $j = 0, \dots, n-m$.

Доказательство. По теореме 1

$$f^{(n)}(z) = M^{(n)}(r)e^{i\beta} \quad \forall z = re^{i\alpha} \in Z(z_0, \dots, z_n). \tag{36}$$

Интегрируя равенство (36) последовательно m раз вдоль отрезка $[z_0, z]$ и учитывая (34), (35), получим

$$f^{(n-m)}(z) = M^{(n-m)}(r)e^{i(\beta+m\alpha)} \tag{37}$$

для любого $z = re^{i\alpha} \in E_R$, где $r \in X(r_0, \dots, r_n)$ и $\alpha = \arg z_j$, $\beta = \arg f^{(n)}(z_j)$, $j = 0, \dots, n$. Пусть $z_0^\bullet, \dots, z_{n-m}^\bullet$ — произвольные точки из отрезка $Z(z_0, \dots, z_n)$. Положим

$$\zeta^\bullet = z_0^\bullet + t_1(z_1^\bullet - z_0^\bullet) + \dots + t_m(z_{n-m}^\bullet - z_{n-m-1}^\bullet),$$

$$\rho^\bullet = r_0^\bullet + t_1(r_1^\bullet - r_0^\bullet) + \dots + t_m(r_{n-m}^\bullet - r_{n-m-1}^\bullet), \quad (t_1, \dots, t_{n-m}) \in T_{n-m}.$$

Заметим, что $\zeta^\bullet = \rho^\bullet e^{i\alpha} \in E_R$. Тогда с учетом равенства (37) получим

$$[f(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n-m}^\bullet] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-m-1}} f^{(n-m)}(\zeta^\bullet)\, dt_1 \dots dt_{n-m}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-m-1}} M^{(n-m)}(\rho^\bullet)e^{i(\beta+m\alpha)}\, dt_1 \dots dt_{n-m}$$

$$= [M(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n-m}^\bullet]e^{i(\beta+m\alpha)}.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$[f^{(n)}(z)] \le M^{(n)}(r) \quad \forall |z| \le r < R,\ n \ge 1, \tag{38}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Для любых* $z_0, \dots, z_{n-1}, z_n \in E_R$ *справедливо неравенство*

$$|f(z_n) - P_{n-1}(z_n)| \le [M(r); r_0, \dots, r_{n-1}, r_n]|z_n - z_0| \dots |z_n - z_{n-1}|, \tag{39}$$

где P_{n-1} *— интерполяционный многочлен* (3).

2. *Пусть* $f^{(n)}(z)$ *не является постоянной. Пусть также для некоторых попарно различных точек* $z_0, \dots, z_{n-1}, z_n \in E_R$ *имеет место равенство*

$$|f(z_n) - P_{n-1}(z_n)| = [M(r); r_0, \dots, r_{n-1}, r_n]|z_n - z_0| \dots |z_n - z_{n-1}|. \tag{40}$$

Тогда

$$z_m = r_m e^{i\alpha}, \quad m = 0, \dots, n, \tag{41}$$

и справедливо равенство

$$f(z_n^*) - P_{n-1}(z_n^*) = [M(r); r_0^*, \dots, r_n^*](r_n^* - r_0^*)(r_n^* - r_{n-1}^*)e^{i\beta} \tag{42}$$

для любых точек $z_m^* = r_m^* e^{i\alpha}$, $m = 0, \dots, n$, *из наименьшего отрезка, включающего точки* $z_0, \dots, z_{n-1}, z_n$.

Доказательство. По формулам (3), (4) имеем

$$[f(z); z_0, \dots, z_{n-1}, z_n] = \frac{f(z_n) - P_{n-1}(z_n)}{(z_n - z_0) \dots (z_n - z_{n-1})}$$

для любых попарно различных $z_0, \dots, z_{n-1}, z_n \in E_R$. Условие (38) позволяет воспользоваться теоремой 1, согласно которой

$$\left| \frac{f(z_n) - P_{n-1}(z_n)}{(z_n - z_0) \dots (z_n - z_{n-1})} \right| \le [M(r); r_0, \dots, r_{n-1}, r_n]$$

для любых попарно различных $z_0, \ldots, z_{n-1}, z_n \in E_R$. Отсюда следует, что

$$|f(z_n) - P(z_n)| \le [M(r); r_0, \ldots, r_{n-1}, r_n]|z_n - z_0| \ldots |z_n - z_{n-1}|$$

для любых попарно различных $z_0, \ldots, z_{n-1}, z_n \in E_R$. Пользуясь свойством интерполяционного многочлена $P_{n-1}(z)$, заключаем о справедливости неравенства (39) для любых $z_0, \ldots, z_{n-1}, z_n \in E_R$.

Пусть выполняются условия (38), (40). Пользуясь формулами (3), (4) и теоремой 1, убеждаемся в справедливости (41), а также в том, что

$$\frac{f(z_n^*) - P_{n-1}(z_n^*)}{(z_n^* - z_0^*) \ldots (z_n^* - z_{n-1}^*)} = [M(r); r_0^*, \ldots, r_{n-1}^*, r_n^*]e^{i\beta}$$

для любых попарно различных $z_m^* = r_m^* e^{i\alpha}$, $m = 0, \ldots, n$, взятых из отрезка $Z(z_0, \ldots, z_n)$. Отсюда

$$f(z_n^*) - P(z_n^*) = [M(r); r_0^*, \ldots, r_{n-1}^*, r_n^*](r_n^* - r_0^*) \ldots (r_n^* - r_{n-1}^*)$$

для любых попарно различных $z_m^* = r_m^* e^{i\alpha}$, $m = 0, \ldots, n$, взятых из отрезка $Z(z_0, \ldots, z_{n-1}, z_n)$. Исользуя свойства интерполяционного многочлена $P_{n-1}(z)$, заключаем о справедливости равенства (42) для любых $z_m^* = r_m^* e^{i\alpha}$, $m = 0, \ldots, n$, взятых из отрезка $Z(z_0, \ldots, z_{n-1}, z_n)$.

II. Оценим действительную часть разделенной разности n-го порядка аналитической в круге E_R функции.

Теорема 3. *Пусть $f^{(n)}(z)$ не является постоянной, $n \ge 1$ и*

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(z) \le M^{(n)}(r) \quad \forall |z| = r < R. \tag{43}$$

Справедливы следующие утверждения.

1. *Если выполнены условия (42), то для любых $z_0, \ldots, z_n \in E_R$ имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re}[f(z); z_0, \ldots, z_n] \le [M(r); r_0, \ldots, r_n], \quad \text{где } |z_0| = r_0, \ldots, |z_n| = r_n. \tag{44}$$

2. *Пусть выполнено условие (43). Для того чтобы для некоторых $z_0, \ldots, z_n \in E_R$ имело место равенство*

$$\operatorname{Re}[f(z); z_0, \ldots, z_n] = [M(r); r_0, \ldots, r_n], \tag{45}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(re^{i\alpha}) = M^{(n)}(r) \quad \forall r \in X(r_0, \ldots, r_n), \tag{46}$$

где $\alpha = \arg z_0 = \arg z_1 = \cdots = \arg z_n$.

Доказательство. Установим первое утверждение из п. 1 теоремы 2. Опираясь на лемму 1, неравенство (43) и принцип максимума для гармонических функции, получим

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(z) \le \max_{|z|=|\zeta|} \operatorname{Re} f^{(n)}(z) \le \max_{|z|=|\rho|} \operatorname{Re} f^{(n)}(z) \le M^{(n)}(\rho).$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}[f(z); z_0, \dots, z_n] = \operatorname{Re} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n \le \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= [M(r); r_0, \dots, r_n], \qquad (47)$$

и неравенство (44) доказано.

Обратимся к п. 2 теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть выполнены условия (43) и (45). Из (45), (47) следует, что

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n. \qquad (48)$$

Рассматривая (43), (48) и учитывая непрерывность функций $\operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)$ и $M^{(n)}(\rho)$ в любой точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$, приходим к выводу, что

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta) = M^{(n)}(\rho) \qquad (49)$$

в любой точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$. Согласно лемме 1 если $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n, то ζ при фиксированных $z_0, \dots, z_n \in E_R$ пробегает все точки наименьшего выпуклого многоугольника, включающего $z_0, \dots, z_n$, и ρ пробегает все точки из отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$. Поэтому равенство (49) справедливо при любом ζ из указанного многоугольника и соответствующем ρ из указанного отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$. По лемме 1 имеем $|\zeta| \le \rho$. Если предположить, что для некоторого ζ_1 и соответствующего ему ρ_1 будет $|\zeta_1| < \rho_1$, то с учетом того, что $f^{(n)}(z)$ не постоянная, получим

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta_1) \le \max_{|z|=|\zeta_1|} \operatorname{Re} f^{(n)}(z) < \max_{|z|=\rho_1} \operatorname{Re} f^{(n)}(z) \le M^{(n)}(\rho_1).$$

Последние неравенства противоречат равенству (49). Следовательно, имеет место равенство $|\zeta| = \rho$ хотя бы в одной точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$, где $0, 1, t_1, \dots, t_n$ — попарно различные числа. Применяя лемму 1, получим, что все $z_0, \dots, z_n$ лежат на некотором луче $L(\alpha)$. Значит,

$$\zeta = \rho e^{i\alpha}, \text{ где } \rho \in X(r_0, \dots, r_n) \text{ и } z_j = r_j e^{i\alpha}, \quad \alpha = \arg z_j, \ j = 0, \dots, n.$$

Теперь (49) запишем в виде $\operatorname{Re} f^{(n)}(\rho e^{i\alpha}) = M^{(n)}(\rho)$ при любом $\rho \in X(r_0, \dots, r_n)$, что и доказывает (46).

Докажем достаточность. Пусть имеет место (46). Тогда легко видеть, что

$$\operatorname{Re}[f(z); z_0, \dots, z_n] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n = [M(r); r_0, \dots, r_n],$$

и достаточность установлена.

Приведем несколько следствий из теоремы 2, доказательство которых проводится таким же образом, как и доказательство следствий из теоремы 1.

Следствие 7. *Пусть выполнены условия (43) и (45). Пусть, кроме того, функция $M(r)$ имеет непрерывную производную $(n+k)$-го порядка, где $k \geq 0$. Тогда для любых $z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet$ из отрезка $Z(z_0, \dots, z_n)$ справедливо равенство*

$$\mathrm{Re}[e^{ik\alpha} f(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet] = [M(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n+k}^\bullet],$$

где $|z_0^\bullet| = r_0^\bullet, \dots, |z_{n+k}^\bullet| = r_{n+k}^\bullet$, $\alpha = \arg z_0 = \dots = \arg z_n$.

Следствие 8. *Пусть выполнены условия (43) и (45). Тогда для любых $z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet$ из отрезка $Z(z_0, \dots, z_n)$ и любого m, $1 \leq m < n$, справедливо равенство*

$$\mathrm{Re}[f^{(n-m)}(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet] = [M^{(n-m)}(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n+k}^\bullet],$$

где $|z_0^\bullet| = r_0^\bullet, \dots, |z_{n+k}^\bullet| = r_{n+k}^\bullet$.

Следствие 9. *Пусть выполнены условия (43) и (45). Пусть, кроме того,*

$$e^{ik\alpha}\,\mathrm{Re}\{e^{-im\alpha} f^{(n-m+k)}(z_0)\} = M^{(n-m+k)}(r_0),$$

$k = 0, 1, \dots, (m-1)$, $1 \leq m < n$, $\alpha = \arg z_0$. Тогда для любых $z_0^\bullet, \dots, z_{n+k}^\bullet$ из отрезка $Z(z_0, \dots, z_n)$ и любого m, $1 \leq m < n$, справедливо равенство

$$\mathrm{Re}[e^{-im\alpha} f(z); z_0^\bullet, \dots, z_{n-m}^\bullet] = [M(r); r_0^\bullet, \dots, r_{n-m}^\bullet].$$

Под $M_0(r)$ будем понимать функцию вещественного переменного r, определенную в промежутке $0 \leq r < R$ и имеющую в этом промежутке непрерывную строго убывающую n-ю производную $M_0^{(n)}(r)$.

Теорема 4. *Пусть $n \geq 1$ и*

$$\mathrm{Re}\, f^{(n)}(z) \geq M_0^{(n)}(r) \quad \forall |z| = r < R. \tag{50}$$

Справедливы следующие утверждения.

1. *Если выполнено условие (50), то для любых $z_0, \dots, z_n \in E_R$ имеет место неравенство*

$$\mathrm{Re}[f(z); z_0, \dots, z_n] \geq [M_0(r); r_0, \dots, r_n], \quad \text{где } |z_0| = r_0, \dots, |z_n| = r_n. \tag{51}$$

2. *Пусть $f^{(n)}(z)$ не является постоянной и выполнено условие (50). Для того чтобы для некоторых точек $z_0, \dots z_n \in E_R$, среди которых есть различные точки, имело место равенство*

$$\mathrm{Re}[f(z); z_0, \dots, z_n] = [M_0(r); r_0, \dots, r_n], \tag{52}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Re}\, f^{(n)}(re^{i\alpha}) = M_0^{(n)}(r) \tag{53}$$

при любом $r \in X(r_0, \dots, r_n)$ и чтобы $\alpha = \arg z_0 = \arg z_1 = \dots = \arg z_n$.

Доказательство. Установим справедливость неравенства (51) из п. 1 теоремы 4. Опираясь на лемму 1, неравенство (50) и принцип минимума для гармонических функции, получим

$$\mathrm{Re}\, f^{(n)}(z) \geq \min_{|z|=|\zeta|} \mathrm{Re}\, f^{(n)}(z) \geq \min_{|z|=|\rho|} \mathrm{Re}\, f^{(n)}(z) \geq M_0^{(n)}(\rho). \tag{54}$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}[f(z); z_0, \dots, z_n] = \operatorname{Re} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n \geq \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} M_0^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= [M_0(r); r_0, \dots, r_n], \quad (55)$$

и неравенство (51) доказано.

Обратимся к п. 2 теоремы 4. Докажем необходимость. Пусть выполнены условия (50) и (52). Из (50), (52), (54) и (55) следует, что

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} M_0^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n. \quad (56)$$

Рассматривая снова (53), (54) и учитывая непрерывность функций $\operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)$ и $M_0^{(n)}(\rho)$ в любой точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$ приходим к выводу, что

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta) = M_0^{(n)}(\rho) \quad (57)$$

в любой точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$. Согласно лемме 1 если $(t_1, \dots, t_n)$ пробегает все точки из T_n, то ζ при фиксированных $z_0, \dots, z_n \in E_R$ пробегает все точки наименьшего выпуклого многоугольника, включающего точки $z_0, \dots, z_n$, и ρ пробегает все точки отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$. Поэтому равенство (57) справедливо при любом ζ из указанного многоугольника и соответствующем ρ из указанного отрезка $X(r_0, \dots, r_n)$. По лемме 1 имеем $|\zeta| \leq \rho$. Если предположить, что для некоторого ζ_1 и соответствующего ему ρ_1 будет $|\zeta_1| < \rho_1$, то с учетом того, что $F^{(n)}(z)$ не является постоянной, получим

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta_1) \geq \min_{|z|=|\zeta_1|} \operatorname{Re} f^{(n)}(z) > \min_{|z|=\rho_1} \operatorname{Re} f^{(n)}(z) \geq M_0^{(n)}(\rho_1). \quad (58)$$

Отсюда видно, что (58) противоречат равенству (57). Следовательно, имеет место равенство $|\zeta| = \rho$ хотя бы в одной точке $(t_1, \dots, t_n) \in T_n$, где $0, 1, t_1, \dots, t_n$ — попарно различные числа. Применяя лемму 1, получим, что $z_0, \dots, z_n$ лежат все на некотором луче $L(\alpha)$. Значит,

$$\zeta = \rho e^{i\alpha}, \quad \text{где } \rho \in X(r_0, \dots, r_n) \text{ и } z_j = r_j e^{i\alpha},\ \alpha = \arg z_j,\ j = 0, \dots, n.$$

Теперь (57) запишем в виде

$$\operatorname{Re} f^{(n)}(\rho e^{i\alpha}) = M^{(n)}(\rho)$$

при любом $\rho \in X(r_0, \dots, r_n)$, что и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть имеют место (50) и (53). Тогда легко видеть, что

$$\operatorname{Re}[f(z); z_0, \dots, z_n] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} f^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} M^{(n)}(\rho)\, dt_1 \dots dt_n = [M(r); r_0, \dots, r_n].$$

Теорема 4 доказана.

III. Доказанные выше теоремы имеют применения в том случае, когда рассматривается какой-либо класс аналитических в круге функций, причем известна оценка для n-й производной. В качестве примера возьмем класс S, т. е. класс однолистных в единичном круге E функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. В [5] установлены оценки (5) для производных от функций из класса S со знаком равенства для функций (6).

Пользуясь (5) и теоремой 1, легко получить следующий более общий результат.

Теорема 5. *Если $f(z) \in S$, то для любого $n \geq 1$ справедливо неравенство*

$$|[f(z); z_0, \dots, z_n]| \leq \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m} \quad \forall z_0, \dots, z_n \in E, \tag{59}$$

где $|z_0| = r_0$, $|z_0| = r_0, \dots, |z_n| = r_n$. Равенство в (59) реализуется в том случае, когда $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m = 0, \dots, n$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, а функция имеет вид (6).

В самом деле, пусть $M(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$. Тогда согласно (5) для любой функции из класса S получим

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq M^{(n)}(r) \quad \forall |z| = r < 1.$$

Кроме того, для любых r_m, $m = 0, \dots, n$, имеет место равенство

$$[M(r); r_0, \dots, r_n] = \left(-1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}\right) \prod_{m=0}^{n} \frac{1}{1-r_m}.$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 5, достаточно воспользоваться теоремой 1.

Для остаточного члена интерполяционной формулы Ньютона для функции из класса S, опираясь на теорему 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть $f(z) \in S$ и $n \geq 1$. Для любых попарно различных точек $z_0, \dots, z_n, z_{n+1}$ из круга E справедливо неравенство*

$$|f(z_{n+1}) - P_n(z_{n+1})| \leq \left(-1 + \sum_{m=0}^{n+1} \frac{1}{1-r_m}\right) \prod_{m=0}^{n+1} \frac{1}{1-r_m} \prod_{m=0}^{n} |z_{n+1} - z_n|. \tag{60}$$

Равенство в (60) реализуется в том случае, когда $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m = 0, \dots, n, n+1$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, а функция имеет вид (6). В этом случае имеем

$$|f_\alpha(r_{n+1} e^{i\alpha}) - P_n(r_{n+1} e^{i\alpha})| = \left(-1 + \sum_{m=0}^{n+1} \frac{1}{1-r_m}\right) \prod_{m=0}^{n+1} \frac{1}{1-r_m} \prod_{m=0}^{n} (r_{n+1} - r_m). \tag{61}$$

Заметим, что в (60) и (61) точки $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m = 0, \dots, n, (n+1)$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, можно менять местами произвольным образом. Это следует из того, что разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1952.
2. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
3. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. Киев: Наук. Думка, 1975.
4. *Александров И. А.* Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И. М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 7–20.
5. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 2001.
6. *Илиев Л.* Приложение одной теоремы Г. М. Голузина об однолистных функциях // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 4. С. 491.
7. *Андреев В. В.* Upper bounds for modulus of divided difference of functions // Comptes rendus Acad. Bulgare Sci. 1983. V. 36, N 1. P. 33–36.
8. *Todorov P. G.* Extremal problems for analytic functions // Comptes rendus Acad. Bulgare Sci. 1983. V. 36, N 12. P. 1475–1478.

Статья поступила 5 февраля 2011 г.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич
Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса,
ул. Саулетекио, 11, Вильнюс 10223, Литва
eduard.kiriyatzkii@takas.lt