Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.552

ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И КОЦЕНТРАЛИЗАТОРНЫЕ УСЛОВИЯ В ПЕРВИЧНЫХ КОЛЬЦАХ

В. Де Филиппис, Ф. Раниа

Аннотация. Пусть R — некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, $Z(R)$ — его центр, U — кольцо частных Утуми для R, C — обобщенный центроид R и $f(x_1,\dots,x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над C от n некоммутирующих переменных. Обозначим через $f(R)$ множество всех означиваний $f(x_1,\dots,x_n)$ на R. Если F и G — обобщенные дифференцирования R такие, что $[[F(x),x],[G(y),y]] \in Z(R)$ для любых $x,y \in f(R)$, то выполняется одно из следующих условий:

(1) существует $\alpha \in C$ такой, что $F(x) = \alpha x$ для всех $x \in R$;

(2) существует $\beta \in C$ такой, что $G(x) = \beta x$ для всех $x \in R$;

(3) $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R и либо существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$ такие, что $F(x) = ax + xa + \alpha x$ для всех $x \in R$, либо существуют $c \in U$ и $\beta \in C$ такие, что $G(x) = cx + xc + \beta x$ для всех $x \in R$;

(4) R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1,\dots,x_4)$ и либо существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$ такие, что $F(x) = ax + xa + \alpha x$ для всех $x \in R$, либо существуют $c \in U$ и $\beta \in C$ такие, что $G(x) = cx + xc + \beta x$ для всех $x \in R$.

Ключевые слова: первичное кольцо, дифференциальное тождество, обобщенное дифференцирование.

§ 1. Введение

Пусть R — некоммутативное первичное кольцо и $Z(R)$ — его центр. Положим $[x,y]_1 = [x,y] = xy - yx$. *Условием Энгеля* называется многочлен $[x,y]_k = [[x,y]_{k-1},y]$ от некоммутирующих переменных. Известно, что коммутативное кольцо удовлетворяет такому многочлену и любое нильпотентное кольцо также удовлетворяет такому многочлену при достаточно большом k.

Хорошо известный результат Познера [1] гласит, что если d является ненулевым дифференцированием R таким, что $[[d(x_1),x_1],x_2] = 0$ для всех $x_1,x_2 \in R$, то R коммутативно. Этот результат привел к многочисленным результатам, которые комбинируют дифференцирования с условиями Энгеля. В [2] Вукман показал, что R коммутативно, если $\operatorname{char}(R) \neq 2$ и $[[d(x_1),x_1],x_1] = 0$ для всех $x_1 \in R$. С другой стороны, Лански доказал в [3], что если $[[d(x_1),x_1],x_2] = 0$ для всех x_1 из некоммутативного лиева идеала и $x_2 \in R$, то либо R коммутативно, либо $\operatorname{char}(R) \neq 2$ и R удовлетворяет стандартному тождеству степени 4.

Вопрос о коммутативности или нильпотентности кольца, удовлетворяющего условию Энгеля, восходит к хорошо известной работе Энгеля об алгебрах Ли (см. [4, гл. 2]).

Можно задаться вопросом о том, что может быть сказано о взаимосвязи между отображениями $f : R \longrightarrow R$ и $g : R \longrightarrow R$ такими, что $[f(x), g(y)] \in Z(R)$ для всех x и y из подходящего подмножества S в R.

Изучение такого рода тождеств на первичных кольцах проведено Лански. В [5] он показал, что если d и δ — ненулевые дифференцирования на R такие, что $[d(x), \delta(x)] \in Z(R)$ при всех $x \in R$, то либо существует λ из обобщенного центроида C кольца R такое, что $d = \lambda\delta$, либо $\mathrm{char}(R) = 2$ и R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ степени 4; то же самое заключение справедливо, когда x лежит в нецентральном лиевом идеале R [6]. Результат аналогичного типа получен Ли в [7], где изучался случай, когда $[d(x), \delta(x)] \in Z(R)$ для любого x из ненулевого правого идеала ϱ в R. Он доказал, что при этом предположении либо существует $\lambda \in C$ такой, что $d = \lambda\delta$, либо $d(\varrho)\varrho = \delta(\varrho)\varrho = 0$, либо $\mathrm{char}(R) = 2$ и ϱ удовлетворяет тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)x_5$.

Недавно Бейдар, Бресар и Чеботарь получили исчерпывающий результат о функциональном тождестве $[d(x), F(x)] = 0$ для всех $x \in R$, где F — аддитивное отображение на R и d — дифференцирование R. В случае, когда характеристика R отлична от 2, они доказали, что существуют $\lambda \in C$ и аддитивное отображение $\mu : R \longrightarrow C$ такие, что $F(x) = \lambda d(x) + \mu(x)$ для любого $x \in R$ [8].

Настоящая статья мотивирована результатами, цитированными выше. Мы рассматриваем отображения $f : R \longrightarrow R$ и $g : R \longrightarrow R$, определенные правилами $f(x) = [F(x), x]$ и $g(x) = [G(x), x]$ для всех $x \in R$, где F и G — обобщенные дифференцирования на R такие, что $[f(x), g(y)] \in Z(R)$ для всех x и y из лиева идеала R.

Напомним, что отображение G из R в R называется *обобщенным дифференцированием*, если существует дифференцирование d кольца R такое, что $G(xy) = G(x)y + xd(y)$ для всех $x, y \in R$. Важным примером является отображение вида $G(x) = ax + xb$ для некоторых $a, b \in R$; такие обобщенные дифференцирования называются *внутренними*. Обобщенные дифференцирования первоначально изучались на операторных алгебрах. Следовательно, может представлять интерес любое исследование с чисто алгебраической точки зрения (см., например, [9, 10]).

В дальнейшем обозначаем через U кольцо частных Утуми кольца R, а через C — центр U, который также называется *обобщенным центроидом* R. Определение и основные свойства U и C читатель может найти в [11]. Нам пока потребуется лишь то, что если R является первичным кольцом, то U также первично, а C — поле.

Теорема 1. *Пусть R — некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, с центром $Z(R)$, U — кольцо частных Утуми кольца R, C — обобщенный центроид R и $f(x_1, \dots, x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над C от n некоммутирующих переменных. Обозначим через $f(R)$ множество всех означиваний $f(x_1, \dots, x_n)$ на R. Если F и G — обобщенные дифференцирования на R такие, что $[[F(x), x], [G(y), y]] \in Z(R)$ для любых $x, y \in f(R)$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *существует $\alpha \in C$ такой, что $F(x) = \alpha x$ для всех $x \in R$;*

(2) *существует $\beta \in C$ такой, что $G(x) = \beta x$ для всех $x \in R$;*

(3) *$f(x_1, \dots, x_n)^2$ централен на R и либо существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$ такие, что $F(x) = ax + xa + \alpha x$ для всех $x \in R$, либо существуют $c \in U$ и $\beta \in C$ такие, что $G(x) = cx + xc + \beta x$ для всех $x \in R$;*

(4) *R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и либо суще-*

ствуют $a \in U$ и $\alpha \in C$ такие, что $F(x) = ax + xa + \alpha x$ для всех $x \in R$, либо существуют $c \in U$ и $\beta \in C$ такие, что $G(x) = cx + xc + \beta x$ для всех $x \in R$.

Факт 1. *Обозначим через $T = U \underset{C}{*} C\{X\}$ свободное произведение над C алгебры U над C и свободной C-алгебры $C\{X\}$ от счетного множества X некоммутирующих переменных $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Элементы из T называются обобщенными многочленами с коэффициентами из U. Если I — ненулевой идеал в R, то I, R и U удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам с коэффициентами из U.*

Дополнительную информацию читатель может найти в [12, 13].

Пусть $a_1, \dots, a_k \in U$ — линейно независимые элементы над C и

$$a_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_k g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \in T$$

для некоторых $g_1, \dots, g_k \in T = U \underset{C}{*} C\{X\}$. Как следствие результата работы [13] получаем, что если

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_j(x_1, \dots, x_n)$$

для любого i и $h_j(x_1, \dots, x_n) \in T$, то $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)$ являются нулями в T; то же самое справедливо, если

$$g_1(x_1, \dots, x_n)a_1 + \dots + g_k(x_1, \dots, x_n)a_k = 0 \in T,$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x_1, \dots, x_n)x_j$$

для некоторых $h_j(x_1, \dots, x_n) \in T$.

Всюду далее предполагаем, что $f(x_1, \dots, x_n)$ не является центральным на R.

§ 2. Случай внутренних обобщенных дифференцирований

В данном параграфе изучаем случай, когда оба дифференцирования F и G внутренние и определены правилами

$$F(x) = ax + xb, \quad G = cx + xq$$

для всех $x \in R$, где a, b, c, q — фиксированные элементы из U.

Далее обозначаем $f(x_1, \dots, x_n)$ через $f(X)$, $f(y_1, \dots, y_n)$ — через $f(Y)$,

$$\begin{aligned} P(X, Y, x_{n+1}) &= P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ &= [[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]]x_{n+1} \\ &\qquad - x_{n+1}[[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]] \end{aligned}$$

и предполагаем, что R удовлетворяет обобщенному тождеству $P(X, Y, x_{n+1})$.

Лемма 1. *Если R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, то либо существует $\alpha \in C$ такое, что $F(x) = \alpha x$, либо существует $\beta \in C$ такое, что $G(x) = \beta x$ для всех $x \in R$.*

Доказательство. Обозначим через $T = U \underset{C}{*} C\{x_1, \dots, x_{2n+1}\}$ свободное произведение над C алгебры U над C и свободной C-алгебры $C\{x_1, \dots, x_{2n+1}\}$.

Любой элемент из T является обобщенным многочленом с коэффициентами из U (см. факт 1).

Предположим, что R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству. Тогда

$$P(X, Y, x_{n+1}) = 0 \in T.$$

Запишем

$$P(X, Y, x_{n+1}) = ag_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ + cg_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) + g_3(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}),$$

где

$$g_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ = \sum_j x_j h_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) + \sum_j y_j h_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})$$

и $h_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \in T$. В частности, заметим, что

$$g_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})) = f(X)^2(cf(Y)^2 + f(Y)(q-c)f(Y) - f(Y)^2 q)x_{n+1}.$$

С другой стороны, можно также записать

$$P(X, Y, x_{n+1}) = f_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})b \\ + f_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})q + f_3(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}),$$

где

$$f_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ = \sum_j t_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})x_j + \sum_j t_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})y_j$$

и $t_j(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \in T$. В частности, заметим, что

$$f_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) = -x_{n+1}(af(X)^2 + f(X)(b-a)f(X) - f(X)^2 b)f(Y)^2.$$

Если $\{1, a, c\}$ линейно C-независимы, то согласно факту 1

$$g_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) = 0 \in T,$$

а это противоречит тому, что $f(Y)^2$ — тождество на R.

Аналогично если предположить, что $\{1, b, q\}$ линейно C-независимы, то $f_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) = 0 \in T$, т. е.

$$af(X)^2 + f(X)(b-a)f(X) - f(X)^2 b = 0 \in T,$$

и получаем противоречие с тем, что $f(X)^2$ — тождество на R.

Следовательно, существуют $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in C$ такие, что $c = \alpha_1 a + \alpha_2$ и $q = \beta_1 b + \beta_2$. Заметим, что если $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то получаем $G(x) = (\alpha_2 + \beta_2)x$ для всех $x \in R$, что является одним из требуемых заключений. Таким образом, предполагаем, что по крайней мере один из α_1 и β_1 является ненулевым. Получаем, что R удовлетворяет тождеству

$$[[af(X) + f(X)b, f(X)], [\alpha_1 af(Y) + \beta_1 f(Y)b, f(Y)]]x_{n+1} \\ - x_{n+1}[[af(X) + f(X)b, f(X)], [\alpha_1 af(Y) + \beta_1 f(Y)b, f(Y)]],$$

и снова можем записать

$$P(X,Y,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) + p_2(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}),$$

где

$$\begin{aligned} &p_i(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) \\ &\quad = \sum_j x_j h_j(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) + \sum_j y_j h_j(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) \end{aligned}$$

и $h_j(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) \in T$. В этом случае

$$\begin{aligned} p_1(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) = (&\alpha_1 f(X)^2 a f(Y)^2 + f(X)^2 f(Y)(\beta_1 b - \alpha_1 a) f(Y) \\ &- \beta_1 f(X)^2 f(Y)^2 b - \alpha_1 f(Y)^2 a f(X)^2 \\ &- \alpha_1 f(Y)^2 f(X)(b-a) f(X) + \alpha_1 f(Y)^2 f(X)^2 b) x_{n+1}. \end{aligned}$$

Если a и b являются центральными элементами U, то $F(x) = \alpha x$ для $\alpha = a+b \in C$, и приходим к требуемому. Следовательно, предполагаем, что один из a и b не является центральным, к примеру, пусть $a \notin C$. Наша цель — получить противоречие.

Если $a \notin C$, то $\{1, a\}$ линейно C-независимы, поэтому

$$p_1(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_n;x_{n+1}) = 0 \in T,$$

т. е.

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 f(X)^2 a f(Y)^2 + f(X)^2 f(Y)(\beta_1 b - \alpha_1 a) f(Y) - \beta_1 f(X)^2 f(Y)^2 b \\ &\quad - \alpha_1 f(Y)^2 a f(X)^2 - \alpha_1 f(Y)^2 f(X)(b-a) f(X) + \alpha_1 f(Y)^2 f(X)^2 b) x_{n+1} \\ &\quad - x_{n+1}(\alpha_1 f(X)^2 a f(Y)^2 + f(X)^2 f(Y)(\beta_1 b - \alpha_1 a) f(Y) - \beta_1 f(X)^2 f(Y)^2 b \\ &- \alpha_1 f(Y)^2 a f(X)^2 - \alpha_1 f(Y)^2 f(X)(b-a) f(X) + \alpha_1 f(Y)^2 f(Y)^2 b) = 0 \in T. \quad (1) \end{aligned}$$

Поскольку R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, из (1) следует, что $\{1, b\}$ должны быть линейно C-зависимы. Действительно, если $\{1, b\}$ линейно C-независимы, то компонента $x_{n+1}\beta_1 f(X)^2 f(Y)^2 - x_{n+1}\alpha_1 f(Y)^2 f(X)^2$ в (1) является нетривиальным тождеством для R, так как $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$, а это дает противоречие. Из $b \in C$ и (1) получаем, что U удовлетворяет обобщенному тождеству

$$\begin{aligned} &\alpha_1 f(X)^2 a f(Y)^2 x_{n+1} - \alpha_1 f(X)^2 f(Y) a f(Y) x_{n+1} \\ &\qquad - \alpha_1 f(Y)^2 a f(X)^2 x_5 + \alpha_1 f(Y)^2 f(X) a f(X) x_{n+1} \\ &\qquad - \alpha_1 x_{n+1} f(X)^2 a f(Y)^2 + \alpha_1 x_{n+1} f(X)^2 f(Y) a f(Y) \\ &\qquad\qquad + \alpha_1 x_{n+1} f(Y)^2 a f(X)^2 - \alpha_1 x_{n+1} f(Y)^2 f(X) a f(X), \end{aligned}$$

которое нетривиально, поскольку $\{1, a\}$ линейно C-независимы; снова противоречие. □

Прежде чем доказывать первый результат, для удобства напомним хорошо известный факт о лиевых идеалах в первичных кольцах.

Факт 2. *Пусть R — первичное s_4-свободное кольцо (т. е. R не удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$), L — нецентральный лиев идеал в R, d и δ — дифференцирования в R такие, что $[d(u), \delta(v)] \in C$ для всех $u, v \in L$. Тогда либо $d = 0$, либо $\delta = 0$.*

Доказательство. По условию при $u = v$ имеем $[d(u), \delta(u)] \in C$ для всех $u \in L$, и по [6] существует $\lambda \in C$ такой, что $d = \lambda\delta$. Если $\lambda = 0$, то $d = 0$. В любом случае $\lambda[\delta(u), \delta(v)] \in C$, т. е. $[\delta(u), \delta(v)] \in C$ для всех $u, v \in L$. Известно, что $[[\delta(u), \delta(v)], \delta(w)] = 0$ для всех $u, v, w \in L$. В итоге приходим к частному случаю условий теоремы 1 и следствия 1 из [14], откуда следует, что $\delta = 0$.

Замечание 1. Пусть R — матричное кольцо над полем F, и пусть $f(R) = \{f(r_1, \dots, r_n) : r_1, \dots, r_n \in R\}$ — множество всех означиваний $f(x_1, \dots, x_n)$ в R. Для любого F-автоморфизма τ кольца R справедливо $[[\tau(a)u + u\tau(b), u], [\tau(c)u + u\tau(q), u]] \in Z(R)$ для всех $u, v \in f(R)$, поскольку $f(R)$ инвариантно при действии любого F-автоморфизма кольца R. Следовательно, справедливы следующие утверждения:

(1) матрица $\tau(b - a)$ центральна тогда и только тогда, когда $b - a$ центральна;

(2) матрица $\tau(q - c)$ центральна тогда и только тогда, когда $q - c$ центральна;

(3) матрицы $\tau(c)$ и $\tau(q)$ центральны тогда и только тогда, когда c и q центральны.

Нам потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть F — бесконечное поле и $n \geq 2$. Если $A_1, \dots, A_k$ не являются скалярными матрицами в $M_n(F)$, то существует обратимая матрица $Q \in M_n(F)$ такая, что все элементы матриц $QA_1Q^{-1}, \dots, QA_kQ^{-1}$ ненулевые.*

Доказательства. См. лемму 1 из [15].

Приступим к доказательству основного результата данного параграфа. Начнем со следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $R = M_p(F)$ — кольцо $(p \times p)$-матриц над бесконечным полем F, $p \geq 2$, a, b, c, q — элементы из R такие, что $[[au + ub, u], [cv + vq, v]] \in Z(R)$ для всех $u, v \in f(R)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $a, b \in F$;

(2) $c, q \in F$;

(3) $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен в R и либо $b - a \in Z(R)$, либо $q - c \in Z(R)$;*

(4) $p = 2$ *и либо $b - a \in Z(R)$, либо $q - c \in Z(R)$.*

Доказательство. Пусть e_{kl} — матричная единичка (матрица с 1 на (k, l)-позиции и нулевыми остальными элементами). Пусть $a = \sum\limits_{ij} a_{ij}e_{ij}$, $b = \sum\limits_{ij} b_{ij}e_{ij}$, $c = \sum\limits_{ij} c_{ij}e_{ij}$, $q = \sum\limits_{ij} q_{ij}e_{ij}$, где $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, q_{ij} \in F$.

Сначала докажем, что либо $b - a$, либо $q - c$ скалярна. Предположим что обе матрицы $b - a$ и $q - c$ не скалярны, и приведем это предположение к противоречию.

По замечанию 1 и лемме 2 можем предполагать, что

(i) все элементы матриц $b - a$ и $q - c$ ненулевые.

По предположению R таково, что

$$[[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]] \in Z(R).$$

Как отмечено выше, множество $f(R)$ инвариантно относительно действия всех внутренних автоморфизмов R. Более того, по лемме из [16] либо $f(x_1,\dots,x_n)$ централен на R, либо существуют матричные единички $r_1,\dots,r_n$ такие, что $f(r_1,\dots,r_n)=\alpha e_{uv}$ для некоторых $\alpha\in F$ и $u\neq v$. В последнем случае, поскольку $f(x_1,\dots,x_n)$ является полилинейным, имеем $e_{uv}\in f(R)$.

Предположим, что $f(X)=e_{ij}$ и $f(Y)=e_{ji}$ при $i\neq j$. Тогда

$$M=[[ae_{ij}+e_{ij}b,e_{ij}],[ce_{ji}+e_{ji}q,e_{ji})]]\in Z(R).$$

В матрице M элемент на позиции (i,i) равен $(b_{ji}-a_{ji})(q_{ij}-c_{ij})$, а на позиции (j,j) равен $-(b_{ji}-a_{ji})(q_{ij}-c_{ij})$. Поскольку M лежит в центре, то

$$(b_{ji}-a_{ji})(q_{ij}-c_{ij})=-(b_{ji}-a_{ji})(q_{ij}-c_{ij})$$

и $\operatorname{char}(R)\neq 2$ влечет $(b_{ji}-a_{ji})(q_{ij}-c_{ij})=0$, что противоречит (i) на элементах матриц $b-a$ и $q-c$. Следовательно, $b-a=\alpha\in Z(R)$ и $q-c=\gamma\in Z(R)$.

Следующим шагом доказательства является проверка того, что $b-a$ и $q-c$ лежат в центре R.

Предположим, что $b=a+\alpha$ и $q-c$ не является скалярной. Если $a\in Z(R)$, то получаем первое из заключений. Таким образом, предполагаем, что a не скалярна. По замечанию 1 и лемме 2 мы можем считать, что

(ii) все элементы матриц a и $q-c$ ненулевые.

Тогда R удовлетворяет

$$[[af(X)+f(X)a,f(X)],[cf(Y)+f(Y)q,f(Y)]]x_{n+1}\\ -x_{n+1}[[af(X)+f(X)a,f(X)],[cf(Y)+f(Y)q,f(Y)]],$$

т. е.

$$[[a,f(X)^2],[cf(Y)+f(Y)q,f(Y)]]x_{n+1}-x_{n+1}[[a,f(X)^2],[cf(Y)+f(Y)q,f(Y)]].$$

Пусть A — аддитивная подгруппа, порожденная многочленом $f(X)^2$. По теореме из [17] либо $f(X)^2$ централен на R (и получаем заключение 3), либо нецентральный лиев идеал $[R,R]$ из R содержится в A. В последнем случае имеем

$$[[a,[x_1,x_2]],[cf(Y)+f(Y)q,f(Y)]]\in Z(R).$$

При $[x_1,x_2]=[e_{ii},e_{ij}]=e_{ij}$ и $f(Y)=e_{ji}$ получаем

$$N=[[a,e_{ij}],[ce_{ji}+e_{ji}q,e_{ji}]]\in Z(R);$$

в частности, элемент на позиции (j,i) в матрице N должен быть равен нулю, т. е. $2(q_{ij}-c_{ij})a_{ji}=0$, откуда либо $q_{kj}-c_{kj}=0$, либо $a_{ki}=0$, а это противоречит (ii).

Аналогичные рассуждения с учетом симметрии показывают, что если $q-c\in Z(R)$, то $b-a\in Z(R)$, за исключением случаев, когда либо $q,c\in Z(R)$ и тогда получаем второе заключение, либо $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен и тогда приходим к третьему заключению (доказательство опускаем для краткости).

Итак, мы можем предполагать, что $b-a$ и $q-c$ лежат в центре R. Следовательно, по основному предположению R удовлетворяет

$$[[a,f(X)^2],[c,f(Y)^2]]\in Z(R).$$

Более того, можем предполагать, что $f(x_1,\dots,x_n)^2$ не является центральным на R и $p\geq 3$, иначе все доказано.

Как и выше, обозначим через A аддитивную подгруппу, порожденную многочленом $f(X)^2$. Тогда $[R,R]\subseteq A$ и R удовлетворяет

$$[[a,[x_1,x_2]],[c,[x_3,x_4]]]\in Z(R).$$

Так как $p\geq 3$, то R не удовлетворяет $s_4(x_1,\dots,x_4)$, и факт 2 влечет, что либо $a\in Z(R)$, либо $c\in Z(R)$. В обоих случаях получаем одно из требуемых заключений. $\square$

Лемма 4. *Пусть $R = M_p(F)$ — кольцо $(p \times p)$-матриц над полем F, $p \geq 2$, и a, b, c, q — элементы R такие, что $[[au + ub, u], [cv + vq, v]] \in Z(R)$ для всех $u, v \in f(R)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $a, b \in F$;

(2) $c, q \in F$;

(3) $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен на* R *и либо* $b - a \in Z(R)$, *либо* $q - c \in Z(R)$;

(4) $p = 2$ *и либо* $b - a \in Z(R)$, *либо* $q - c \in Z(R)$.

Доказательство. Если F бесконечно, то все следует из леммы 3.

Далее, пусть K — бесконечное поле, которое является расширением поля F, и пусть $\overline{R} = M_m(K) \cong R \otimes_F K$. Как и выше, рассмотрим обобщенный многочлен

$$P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ = [[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]]x_{n+1} \\ - x_{n+1}[[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]]$$

и отметим, что $P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})$ является обобщенным полиномиальным тождеством на R. Более того, это тождество полиоднородно полистепени $(2, \dots, 2; 2, \dots, 2; 1)$ от неизвестных $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots, y_n$, x_{n+1}. Следовательно, полная линеаризация $P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})$ является полилинейным обобщенным многочленом

$$\Theta(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; x_{n+1})$$

от $4n + 1$ неизвестных. Более того,

$$\Theta(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ =^{2n} P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})$$

является полилинейным многочленом и обобщенным полилинейным тождеством как на R, так и на $\overline{R}$. Поскольку $\mathrm{char}(F) \neq 2$, то $P(r_1, \dots, r_n; s_1, \dots, s_n; t) = 0$ для всех $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n, t \in \overline{R}$, и заключение следует из предыдущих рассуждений.

Предложение 1. *Пусть R — первичное кольцо характеристики, отличной от 2. Если a, b, c, q — элементы U такие, что*

$$[[au + ub, u], [cv + vq, v]] \in Z(R)$$

для всех $u, v \in f(R)$, то справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $a, b \in C$;

(2) $c, q \in C$;

(3) $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен на* R *и либо* $b - a \in C$, *либо* $q - c \in C$;

(4) R *удовлетворяет* $s_4(x_1, \dots, x_4)$ *и либо* $b - a \in C$, *либо* $q - c \in C$.

Доказательство. Снова обозначим

$$P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1}) \\ = [[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]]x_{n+1} \\ - x_{n+1}[[af(X) + f(X)b, f(X)], [cf(Y) + f(Y)q, f(Y)]].$$

Поскольку R и U удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам (см. [13]), то U также удовлетворяет $P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})$.

По лемме 1 $P(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; x_{n+1})$ является нетривиальным обобщенным полиномиальным тождеством на U, иначе все доказано. Более того, U и $U \otimes_C \overline{C}$ являются центрально замкнутыми алгебрами [18] и в случае бесконечного C удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам.

По теореме Мартиндейла [19] U является примитивным кольцом, изоморфным плотному кольцу линейных преобразований векторного пространства V над C.

Рассмотрим случай $\dim_C(V) = p$, где p — положительное целое число ≥ 2. При этих условиях R является простым кольцом, удовлетворяющим нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству. Более того, $M_p(C)$ удовлетворяет тем же обобщенным полиномиальным тождествам, что и U, и мы получаем заключение леммы 4.

Далее, пусть $\dim_C V = \infty$. Напомним, что в этом случае U не может удовлетворять никакому полиномиальному тождеству. Как и в лемме 2 из [20], множество $f(U)$ плотно в U, поэтому из включения

$$[[au + ub, u], [cv + vq, v]] \in C$$

при всех $u, v \in f(U)$ получаем

$$[[ar + rb, r], [cs + sq, s]] \in C \tag{2}$$

для любых $r, s \in U$. Пусть $0 \neq \alpha \in C$. Заменим r на $r + \alpha$, а s на $s + \alpha$ в (2). Вычисления дают, что

$$\alpha^2[[a + b, r], [c + q, s]] \in C$$

для всех $r, s \in U$. Поскольку U не является PI-кольцом, из факта 2 вытекает, что

$$\text{либо } a + b \in C, \quad \text{либо } c + q \in C. \tag{3}$$

Пусть сначала $a + b = \alpha \in C$. Тогда U удовлетворяет $[[a, x]_2, [cy + yq, y]]$. Как следствие, $[cy + yq, y]$ лежит в централизаторе множества $\{[a, x]_2 : x \in U\}$. Пусть S — подкольцо, порожденное множеством $\{[a, x]_2 : x \in U\}$. Тогда $[cy+yq, y]$ лежит в централизаторе S. По основному результату работы [21] если множество $\{[a, x]_2 : x \in U\}$ ненулевое, то S содержит ненулевой правый идеал кольца U и его централизатор совпадает с центром U, т. е. либо $[a, r]_2 = 0$ для всех $r \in U$, либо $[cr + rq, r] \in C$ для всех $r \in U$. В первом случае получаем $a \in C$ (см., к примеру, теорему 1 из [2]), что влечет $b \in C$. Во втором случае, по теореме 1 из [22] имеем $c, q \in C$.

Симметрично получаем то же самое заключение, если предположим по (3), что $c + q \in C$. $\square$

Следствие 1. *Пусть R — первичное кольцо характеристики, отличной от 2, a и b — элементы R такие, что*

$$[[a, u]_2, [b, v]_2] \in Z(R)$$

для всех $u, v \in f(R)$. Тогда либо $a \in Z(R)$, либо $b \in Z(R)$.

§ 3. Общий случай

Рассмотрим более общую ситуацию и докажем основную теорему статьи. А именно, предполагаем, что существуют два обобщенных дифференцирования F и G кольца R такие, что $[[F(u), u], [G(v), v]] \in Z(R)$ для всех $u, v \in f(R) = \{f(r_1, \dots, r_n) : r_1, \dots, r_n \in R\}$.

По теореме 3 из [9] любое обобщенное дифференцирование g на плотном правом идеале из R может быть продолжено единственным образом на кольцо частных Утуми U кольца R, поэтому мы можем считать, что любое обобщенное дифференцирование кольца R определено на всем U и имеет вид $g(x) = ax + d(x)$ для некоторых $a \in U$ и дифференцирования d кольца U. Таким образом, мы можем предполагать далее, что существуют $a, c \in U$ и дифференцирования d, δ кольца U такие, что

$$F(x) = ax + d(x) \quad \text{и} \quad G(x) = cx + \delta(x).$$

Будем использовать следующее обозначение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n + \sum_{\sigma \in S_n,\, \sigma \neq \mathrm{id}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

для некоторых $\alpha_\sigma \in C$, и обозначим через $f^d(x_1, \ldots, x_n)$ многочлен, полученный из $f(x_1, \ldots, x_n)$ заменой каждого коэффициента α_σ на $d(\alpha_\sigma)$. Таким образом,

$$d(f(r_1, \ldots, r_n)) = f^d(r_1, \ldots, r_n) + \sum_i f(r_1, \ldots, d(r_i), \ldots, r_n)$$

для всех $r_1, r_2, \ldots, r_n$ из R. Тогда по предположению R удовлетворяет центральному дифференциальному тождеству

$$[[af(x_1, \ldots, x_n) + d(f(x_1, \ldots, x_n)), f(x_1, \ldots, x_n)], \\ [cf(y_1, \ldots, y_n) + \delta(f(y_1, \ldots, y_n)), f(y_1, \ldots, y_n)]] \in Z(R).$$

Теорема 2. *Если R — некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *существует $\alpha \in C$ такой, что $F(x) = \alpha x$ для всех $x \in R$;*

(2) *существует $\beta \in C$ такой, что $G(x) = \beta x$ для всех $x \in R$;*

(3) *$f(x_1, \ldots, x_n)^2$ централен на R и либо существуют $a \in U$, $\alpha \in C$ такие, что $F(x) = ax + xa + \alpha x$ для всех $x \in R$, либо существуют $c \in U$, $\beta \in C$ такие, что $G(x) = cx + xc + \beta x$ для всех $x \in R$;*

(4) *R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \ldots, x_4)$ и либо существуют $a \in U$, $\alpha \in C$ такие, что $F(x) = ax + xa + \alpha x$ для всех $x \in R$, либо существуют $c \in U$, $\beta \in C$ такие, что $G(x) = cx + xc + \beta x$ для всех $x \in R$.*

Доказательство. Поскольку I, R и U удовлетворяют одним и тем же дифференциальным тождествам [23], без ограничения общности для доказательства нашего результата мы можем предполагать, что $[[F(x), x], [G(y), y]] \in C$ для всех $x, y \in f(U)$. Следовательно, U удовлетворяет

$$[[af(x_1, \ldots, x_n) + d(f(x_1, \ldots, x_n)), f(x_1, \ldots, x_n)], \\ [cf(y_1, \ldots, y_n) + \delta(f(y_1, \ldots, y_n)), f(y_1, \ldots, y_n)]] \in C,$$

т. е.

$$\Big[\Big[af(x_1, \ldots, x_n) + f^d(x_1, \ldots, x_n) + \sum_i f(x_1, \ldots, d(x_i), \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)\Big], \\ \Big[cf(y_1, \ldots, y_n) + f^\delta(y_1, \ldots, y_n) + \sum_i f(y_1, \ldots, \delta(y_i), \ldots, y_n), f(y_1, \ldots, y_n)\Big]\Big] \in C, \tag{4}$$

где d и δ — дифференцирования U.

Сначала исследуем случай, когда d и δ являются внутренними дифференцированиями. Более точно, пусть $d(x) = [b, x]$ и $\delta(x) = [q, x]$ для b, q из U, т. е. $F(x) = ax + [b, x] = (a+b)x + x(-b)$ и $G(x) = cx + [q, x] = (c+q)x + x(-q)$. В этом случае F и G являются внутренними дифференцированиями в U. Заметим, что по предложению 1 справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $a, b \in C$, т. е. $F(x) = \alpha x$ для всех $x \in R$, где $\alpha = a \in C$;

(2) $c, q \in C$, т. е. $G(x) = \beta x$ для всех $x \in R$, где $\beta = c \in C$;

(3) $f(x_1, \dots, x_n)^2$ централен на R и либо $a + 2b \in C$, либо $c + 2q \in C$, т. е. либо $F(x) = a'x + xa' + \alpha x$ при $a' = a + b$ и $\alpha \in C$, либо $G(x) = c'x + xc' + \beta x$, где $c' = c + q$ и $\beta \in C$;

(4) R удовлетворяет $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и либо $a + 2b \in C$, либо $c + 2q \in C$, т. е. либо $F(x) = a'x + xa' + \alpha x$ при $a' = a + b$ и $\alpha \in C$, либо $G(x) = c'x + xc' + \beta x$, где $c' = c + q$ и $\beta \in C$.

В свете предыдущего случая далее не будем рассматривать ситуацию, когда d и δ являются внутренними дифференцированиями U.

Разобьем доказательство на два случая.

Случай 1. Предположим, что d и δ линейно C-независимы по модулю X-внутренних дифференцирований U. В этом случае по [24] (см. также [23]) и по (4) получаем, что U удовлетворяет

$$\Big[\Big[af(x_1, \dots, x_n) + f^d(x_1, \dots, x_n) + \sum_i f(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n), f(x_1, \dots, x_n)\Big],$$
$$\Big[cf(y_1, \dots, y_n) + f^\delta(y_1, \dots, y_n) + \sum_i f(y_1, \dots, z_i, \dots, y_n), f(y_1, \dots, y_n)\Big]\Big] \in C,$$

и, в частности, для всех i и j имеем

$$[[f(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n), f(x_1, \dots, x_n)], [f(y_1, \dots, z_j, \dots, y_n), f(y_1, \dots, y_n)]] \in C.$$

Пусть $p \in U - C$ — нецентральный элемент. Тогда

$$\Big[\Big[\sum_i f(x_1, \dots, [p, x_i], \dots, x_n), f(x_1, \dots, x_n)\Big],$$
$$\Big[\sum_j f(y_1, \dots, [p, y_j], \dots, y_n), f(y_1, \dots, y_n)\Big]\Big] \in C,$$

т. е.

$$[[p, f(x_1, \dots, x_n)]_2, [p, f(y_1, \dots, y_n)]_2] \in C,$$

и по следствию 1 получаем $p \in C$; противоречие.

Случай 2. Пусть $\alpha, \beta \in C$ одновременно не равны нулю и $\alpha d + \beta\delta = ad(p)$ — внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $p \in U$.

Если $\beta = 0$, то $\alpha \neq 0$ и $d = ad(b)$ — внутреннее дифференцирование, индуцированное $b = \alpha^{-1}p$; более того, δ не является внутренним. По (4) и результату Харченко получаем, что U удовлетворяет

$$\Big[[(a+b)f(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)(-b), f(x_1, \dots, x_n)],$$
$$\Big[cf(y_1, \dots, y_n) + f^\delta(y_1, \dots, y_n) + \sum_j f(y_1, \dots, z_j, \dots, y_n), f(y_1, \dots, y_n)\Big]\Big] \in C,$$

и, в частности,

$$\Big[[(a+b)f(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)(-b),f(x_1,\dots,x_n)],\\ \Big[\sum_j f(y_1,\dots,z_j,\dots,y_n),f(y_1,\dots,y_n)\Big]\Big]\in C.$$

Как и выше, пусть $p\in U-C$ — нецентральный элемент из U. Тогда

$$\Big[[(a+b)f(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)(-b),f(x_1,\dots,x_n)],\\ \Big[\sum_j f(y_1,\dots,[p,y_j],\dots,y_n),f(y_1,\dots,y_n)\Big]\Big]\in C,$$

т. е.

$$[[(a+b)f(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)(-b),f(x_1,\dots,x_n)],[p,f(y_1,\dots,y_n)]_2]\in C,$$

и в этом случае, поскольку $p\notin C$, по предложению 1 справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $a,b\in C$ и $F(x)=\alpha x$ для всех $x\in R$, где $\alpha=a\in C$;

(2) R удовлетворяет $s_4(x_1,\dots,x_4)$ и существует $\alpha\in C$ такой, что $a+b=-b+\alpha$, т. е. $F(x)=-bx-xb+\alpha x$ для всех $x\in R$;

(3) $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен в R и существует $\alpha\in C$ такой, что $a+b=-b+\alpha$, т. е. $F(x)=-bx-xb+\alpha x$ для всех $x\in R$.

Заметим, что если $\alpha=0$, то по симметрии $\beta\neq 0$ и $\delta=ad(q)$ — внутреннее дифференцирование, индуцированное $q=\beta^{-1}p$; более того, d не является внутренним. В этом случае, исходя из (4), получаем, что справедливо одно из следующих утверждений:

(1) $c,q\in C$ и $G(x)=\beta x$ для всех $x\in R$, где $\beta=c\in C$;

(2) R удовлетворяет $s_4(x_1,\dots,x_4)$ и существует $\beta\in C$ такой, что $c+q=-q+\beta$, т. е. $G(x)=-qx-xq+\beta x$ для всех $x\in R$;

(3) $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R и существует $\alpha\in C$ такой, что $c+q=-q+\beta$, т. е. $G(x)=-qx-xq+\beta x$ для всех $x\in R$.

В итоге рассмотрим случай $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. В этом случае мы можем записать $\delta=\mathrm{ad}(q)+\gamma d$, где $\mathrm{ad}(q)$ — внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $\beta^{-1}p$, и $\gamma=-\beta^{-1}\alpha$. Более того, мы можем предполагать, что d не является внутренним (иначе δ и d являются внутренними и все доказано). В этом случае по (4) кольцо U удовлетворяет

$$\Big[\Big[af(x_1,\dots,x_n)+f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n),f(x_1,\dots,x_n)\Big],\\ \Big[cf(y_1,\dots,y_n)+\gamma f^\delta(y_1,\dots,y_n)+\gamma\sum_i f(y_1,\dots,\delta(y_i),\dots,y_n)\\ +[q,f(y_1,\dots,y_n)],f(y_1,\dots,y_n)\Big]\Big]\in C,$$

и из результата Харченко следует, что U также удовлетворяет

$$\Big[\Big[af(x_1,\dots,x_n)+f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,t_i,\dots,x_n),f(x_1,\dots,x_n)\Big],\\ \Big[cf(y_1,\dots,y_n)+\gamma f^\delta(y_1,\dots,y_n)+\gamma\sum_i f(y_1,\dots,z_i,\dots,y_n)+[q,f(y_1,\dots,y_n)],\\ f(y_1,\dots,y_n)\Big]\Big]\in C.$$

В частности, U удовлетворяет

$$\Big[\Big[\sum_i f(x_1,\dots,t_i,\dots,x_n), f(x_1,\dots,x_n)\Big],\\ \Big[\gamma\sum_i f(y_1,\dots,z_i,\dots,y_n), f(y_1,\dots,y_n)\Big]\Big] \in C. \quad (5)$$

Пусть теперь u — элемент из U такой, что $u \notin C$. Тогда по (5) U удовлетворяет

$$\Big[\Big[\sum_i f(x_1,\dots,[u,x_i],\dots,x_n), f(x_1,\dots,x_n)\Big],\\ \Big[\gamma\sum_i f(y_1,\dots,[u,y_i],\dots,y_n), f(y_1,\dots,y_n)\Big]\Big] \in C,$$

т. е.

$$\gamma[[u, f(x_1,\dots,x_n)], [u, f(y_1,\dots,y_n)] \in C.$$

Согласно следствию 1 приходим к противоречию с тем, что $u \in C$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Posner E. C.* Derivations in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1093–1100.
2. *Vukman J.* Commuting and centralizing mappings in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109, N 1. P. 47–52.
3. *Lanski C.* Differential identities, Lie ideals and Posner's theorems // Pacific J. Math. 1988. V. 134. P. 275–297.
4. *Jacobson N.* Lie Algebras. New York: Wiley, 1962. (Reprint: New York: Dover, 1979).
5. *Lanski C.* Differential identities of prime rings, Kharchenko's theorem and applications // Contemp. Math. 1992. V. 124. P. 111–128.
6. *Lanski C.* Quadratic central differential identities of prime rings // Nova J. Algebra Geom. 1992. V. 1, N 2. P. 185–206.
7. *Lee T. K.* Derivations and centralizing mappings in prime rings // Taiwanese J. Math. 1997. V. 1, N 3. P. 333–342.
8. *Beidar K. I., Bresar M., Chebotar M. A.* Functional identities with r-independent coefficients // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 12. P. 5725–5755.
9. *Lee T. K.* Generalized derivations of left faithful rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27, N 8. P. 4057–4073.
10. *Hvala B.* Generalized derivations in rings // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 4. P. 1147–1166.
11. *Beidar K. I., Martindale III W. S., Mikhalev A. V.* Rings with generalized identities. New York: Dekker, 1996. (Pure Appl. Math.).
12. *Бейдар К. И.*. Кольца с обобщенными тождествами. III // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. математика, механика. 1978. № 4. С. 66–73.
13. *Chuang C. L.* GPI's having coefficients in Utumi quotient rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103, N 3. P. 723–728.
14. *Lee T. K.* Derivations with values satisfying a right or left s_{2n}-polynomial // Comm. Algebra. 1997. V. 25, N 6. P. 1747–1765.
15. *De Filippis V., Di Vincenzo O. M., Pan C. Y.* Quadratic central differential identities on a multilinear polynomial // Comm. Algebra. 2008. V. 36, N 10. P. 3671–3681.
16. *Leron U.* Nil and power central valued polynomials in rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 202. P. 97–103.
17. *Chuang C. L.* The additive subgroup generated by a polynomial // Israel J. Math. 1987. V. 59, N 1. P. 98–106.
18. *Erickson T. S., Martindale III W. S., Osborn J. M.* Prime nonassociative algebras // Pacific J. Math. 1975. V. 60. P. 49–63.
19. *Martindale-III W. S.* Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.

20. *Wong T. L.* Derivations with power central values on multilinear polynomials // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 4. P. 369–378.

21. *Bresar M., Vukman J.* On certain subrings of prime rings with derivations // J. Austr. Math. Soc. Ser. A. 1993. V. 54. P. 133–141.

22. *Albas E., Argac N., De Filippis V.* Generalized derivations with Engel conditions on one-sided ideals // Comm. Algebra. 2008. V. 36, N 6. P. 2063–2071.

23. *Lee T. K.* Semiprime rings with differential identities // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 1992. V. 20, N 1. P. 27–38.

24. *Харченко В. К.* Дифференциальные тождества первичных колец // Алгебра и логика. 1978. Т. 17. С. 220–238.

Статья поступила 13 апреля 2010 г.

Vincenzo De Filippis (де Филиппис Винченцо), Francesco Rania (Раниа Франческо)
DI. S. I. A., Faculty of Engineering
University of Messina, 98166, Messina, Italy
`defilippis@unime.it`, `raniaf@unicz.it`