Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 519.17

ВЕРШИННЫЕ РАЗБИЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ГРАФОВ НА НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО И ПОДГРАФ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ НЕ БОЛЕЕ 1

О. В. Бородин, А. В. Косточка

Аннотация. Граф G называется $(1,0)$-*раскрашиваемым*, если множество его вершин можно разбить на подмножества V_1 и V_0 так, чтобы в подграфе $G[V_1]$ каждая вершина имела степень не больше 1, а $G[V_0]$ не содержал ребер. Доказано, что всякий граф с максимальной средней степенью не более $\frac{12}{5}$ является $(1,0)$-раскрашиваемым. В частности, отсюда следует $(1,0)$-раскрашиваемость любого плоского графа обхвата не менее 12. С другой стороны, построены графы с максимальной средней степенью, сколь угодно близкой (сверху) к $\frac{12}{5}$, которые не имеют $(1,0)$-раскраски.

Фактически в работе получен более сильный результат: найдено неулучшаемое достаточное условие $(1,0)$-раскрашиваемости графа G в терминах минимума, $Ms(G)$, разности $6|V(A)|-5|E(A)|$ по всем подграфам A графа G. А именно, доказано, что всякий граф G с $Ms(G) \geq -2$ является $(1,0)$-раскрашиваемым, и построена бесконечная серия $(1,0)$-нераскрашиваемых графов G с $Ms(G) = -3$.

Ключевые слова: плоские графы, раскраска, обхват.

1. Введение

Граф G называется $(d_1,\dots,d_k)$-*раскрашиваемым*, если его множество вершин $V(G)$ можно разбить на подмножества $V_1,\dots,V_k$ так, чтобы подграф $G[V_i]$, индуцированный множеством V_i, имел максимальную степень не более d_i при всех $1 \leq i \leq k$. Это понятие обобщает понятия правильной k-раскраски (при которой $d_1 = \dots = d_k = 0$) и d-неправильной k-раскраски (когда $d_1 = \dots = d_k = d \geq 1$).

Правильная и d-неправильная раскраски широко изучаются. В частности, Аппелем и Хакеном [1, 2] показано, что каждый плоский граф 4-раскрашиваем, т. е. $(0,0,0,0)$-раскрашиваем. Л. Коэн, Р. Коэн и Д. Вудал [3] доказали, что каждый плоский граф 2-неправильно 3-раскрашиваем, т. е. $(2,2,2)$-раскрашиваем. Последний из этих результатов был обобщен Аве и Серени [4] на разреженные графы, не обязательно являющиеся плоскими: для любого $k \geq 0$ всякий граф G с $\operatorname{mad}(G) < \frac{4k+4}{k+2}$ k-неправильно 2-раскрашиваем, т. е. (k,k)-раскрашиваем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00673 и 09–01–00244). Второй автор поддержан также грантом NSF DMS–0965587 и Министерством образования и науки Российской Федерации (номер контракта 14.740.11.0868).

Напомним, что $\mathrm{mad}(G) = \max\{\frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G\}$ есть максимум средней степени всех подграфов графа G. *Обхватом* $g(G)$ графа G называют длину кратчайшего цикла в G. Степень вершины v будем обозначать через $d(v)$.

Заметим, что нечетный цикл C_{2n-1} имеет $\mathrm{mad}(C_{2n-1}) = 2$ и не является $(0,0)$-раскрашиваемым. С другой стороны, если $\mathrm{mad}(G) < 2$, то G не содержит циклов, поэтому G двудолен, а значит, $(0,0)$-раскрашиваем.

Данная работа посвящена $(1,0)$-раскраске, т. е. разбиению вершин графа на такие подмножества V_1 и V_0, что каждая вершина из V_1 смежна не более чем с одной вершиной из V_1, а вершины из V_0 попарно не смежны. (В дальнейшем будем говорить, что все вершины в V_1 *окрашены в цвет* 1, а вершины в V_0 — *в цвет* 0.)

А. Н. Глебов и Д. Ж. Замбалаева [5] доказали, что если плоский граф G имеет $g(G) \geq 16$, то он $(1,0)$-раскрашиваем. Этот результат был усилен О. В. Бородиным и А. О. Ивановой [6] следующим образом: любой граф G с $\mathrm{mad}(G) < \frac{7}{3}$ имеет $(1,0)$-раскраску и, в частности, любой плоский граф G с $g(G) \geq 14$ $(1,0)$-раскрашиваем.

Для всех целых $k \geq 2$ О. В. Бородин и др. [7] далее доказали, что любой граф G с $\mathrm{mad}(G) < \frac{3k+4}{k+2} = 3 - \frac{2}{k+2}$ допускает $(k,0)$-раскраску, с другой стороны, для всех $k \geq 2$ построены $(k,0)$-нераскрашиваемые графы с mad, сколь угодно близким к $\frac{3k+2}{k+1} = 3 - \frac{1}{k+1}$, а также $(1,0)$-нераскрашиваемые графы с mad, произвольно близким к $\frac{17}{7}$.

Целью данной работы является

Теорема 1. *Всякий граф G с $\mathrm{mad}(G) \leq \frac{12}{5}$ $(1,0)$-раскрашиваем, причем ограничение на $\mathrm{mad}(G)$ неулучшаемо.*

Второе утверждение в теореме 1 означает, что существуют $(1,0)$-нераскрашиваемые графы G с $\mathrm{mad}(G)$, сколь угодно близким к $\frac{12}{5}$.

Поскольку всякий граф G, вложимый в регулярную поверхность с неотрицательной эйлеровой характеристикой (т. е. в плоскость, проективную плоскость, тор или бутылку Клейна), имеет $\mathrm{mad}(G) \leq \frac{2g(G)}{g(G)-2}$, из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Всякий граф G с обхватом $g(G) \geq 12$, вложимый в регулярную поверхность с неотрицательной эйлеровой характеристикой, $(1,0)$-раскрашиваем.*

Как показано в [7], существуют $(1,0)$-нераскрашиваемые плоские графы с обхватом 7. С учетом следствия 1 отсюда возникает

Задача 1. *Найти наименьшее натуральное число g такое, что всякий плоский граф с обхватом не менее g имеет $(1,0)$-раскраску.*

Теперь рассмотрим уточнение параметра $\mathrm{mad}(G)$ для графов G с $\mathrm{mad}(G)$, близким к $\frac{12}{5}$. Для любого графа A положим $\rho(A) = 6|V(A)| - 5|E(A)|$ и назовем эту величину *разреженностью* графа A. Определим *минимальную разреженность* $Ms(G)$ графа G как минимум $\rho(A)$ по всем подграфам A графа G. Таким образом, условие $\mathrm{mad}(G) \leq \frac{12}{5}$ равносильно тому, что $Ms(G) \geq 0$.

Докажем теорему 1 в следующей более сильной форме.

Теорема 2. *Всякий граф G с $Ms(G) \geq -2$ является $(1,0)$-раскрашиваемым, причем существует бесконечно много $(1,0)$-нераскрашиваемых графов G с $Ms(G) = -3$.*

2. Доказательство неулучшаемости ограничений в теоремах 1 и 2

Построим $(1,0)$-нераскрашиваемые графы G_p с $Ms(G_p) = -3$ при всех $p \ge 1$ и $\operatorname{mad}(G_p)$, стремящимся к $\frac{12}{5}$ с ростом p.

Пусть $p \ge 1$ целое, а граф G_p получается из p независимых 3-циклов $x_i y_i z_i$, где $1 \le i \le p$, добавлением путей $y_i y_i' x_{i+1}' x_{i+1}$, где $d(y_i') = d(x_{i+1}') = 2$ при $1 \le i \le p-1$, с последующим добавлением 3-циклов $x_1 x_1' x_1''$ и $y_p y_p' y_p''$, где $d(x_1') = d(x_1'') = d(y_p') = d(y_p'') = 2$ (см. рис. 1 для $p = 3$).

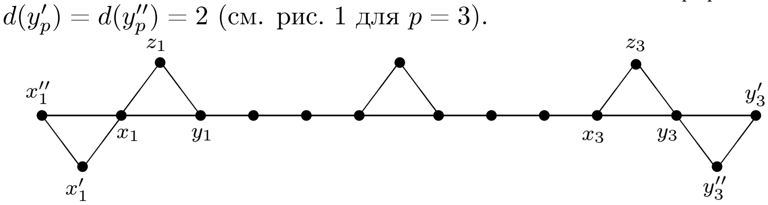

Рис. 1. Граф G_3.

Полезно следующее простое

Утверждение 1. *В любой $(1,0)$-раскраске 3-цикла C_3 ровно две вершины из C_3 окрашены в цвет 1. В частности, каждая вершина из C_3 имеет соседнюю вершину цвета 1 в C_3.*

Допустим, что G_p имеет $(1,0)$-раскраску c. Поскольку x_1 принадлежит двум 3-циклам, $c(x_1) = 0$ согласно утверждению 1. Но тогда $c(y_1) = c(z_1) = 1$, откуда следует, что $c(y_1') = 0$, а значит, $c(x_2') = 1$. Так как $x_2' x_2 \in E(G_p)$, по утверждению 1 получаем, что x_2 имеет соседа цвета 1 в $\{y_2, z_2\}$, т. е. $c(x_2) = 0$. Повторяя это рассуждение, видим, что $c(x_3) = \cdots = c(x_p) = 0$, откуда $c(y_p) = c(z_p) = 1$, но из утверждения 1 следует, что у y_p есть еще один сосед цвета 1 в $\{y_p', y_p''\}$; противоречие.

Наконец, легко проверить, что $Ms(G_p) = \rho(G_p) = 6(5p+2) - 5(6p+3) = -3$,

$$\operatorname{mad}(G_p) = \frac{2|E(G_p)|}{|V(G_p)|} = \frac{12p+6}{5p+2} = \frac{12}{5} + \frac{6}{5(5p+2)}.$$

3. Доказательство основного утверждения в теореме 2

Вершина степени d (соответственно не менее d или не более d) называется *d-вершиной* (соответственно *d^+-вершиной* или *d^--вершиной*). Под *k-путем* мы понимаем путь, в котором все k внутренних вершин имеют степень 2, а концевые вершины — степень не меньше 3. Под *$(k_1, k_2, \dots, k_t)$-вершиной* понимается t-вершина v, из которой исходят k_1-, k_2-, $\dots, k_t$-пути, попарно не имеющие общих вершин, кроме v. *Особым* назовем 3-цикл, инцидентный по меньшей мере двум 2-вершинам.

Будем говорить, что граф G *меньше,* чем граф G', если либо $|V(G)| < |V(G')|$, либо $|V(G)| = |V(G')|$, при этом в G содержится больше особых 3-циклов, чем в G'.

Пусть G — наименьший контрпример к теореме 2. Понятно, что G связен и не содержит висячих вершин. Поскольку $G \ne C_3$, каждый особый 3-цикл в G фактически содержит ровно две 2-вершины.

3.1. Структурные свойства наименьшего контрпримера. Заметим, что граф-бабочка BF, состоящий из двух особых 3-циклов xyz и $xy'z'$ с общей вершиной x, имеет $\rho(BF) = 6 \times 5 - 5 \times 6 = 0$. Нетрудно убедиться, что каждый собственный подграф H' графа BF имеет $\rho(H') > 0$, так что и $Ms(BF) = 0$.

Лемма 1. *Всякий подграф H графа G такой, что $|V(H)| \geq 5$ и $BF \neq H \neq G$, имеет $\rho(H) \geq 1$.*

Доказательство. Предположим, что $\rho(H) \leq 0$. Отметим, что в $G-H$ нет ни одной вершины, смежной по меньшей мере с двумя вершинами подграфа H. Действительно, если такая вершина v есть, то $\rho(V(H)+v) \leq \rho(H)+6-2\times 5 \leq -4$, что невозможно. Поскольку H — подграф графа G, он имеет $(1,0)$-раскраску c_0. Построим граф $G^* = G^*(H)$ по графу G следующим образом:

(a) добавим к $G-H$ копию H^* графа-бабочки с 3-циклами $h_0h_0'h_0''$ и $h_0h_1h_1'$;

(b) каждую вершину $w \in V(G-H)$, смежную с вершиной цвета 1 в c_0, соединим ребром с h_1;

(c) каждую $w \in V(G-H)$, смежную с вершиной цвета 0 в c_0, соединим ребром с h_0.

Если $|V(H)| \geq 6$, то в G^* меньше вершин, чем в G. Проверим, что если $|V(H)| = 5$, то $|V(G^*)| = |V(G)|$, однако G^* содержит больше особых 3-циклов, чем G, поскольку $H \neq H^*$.

Действительно, так как $-2 \leq \rho(H) \leq 0$, то $|E(H)| = 6$. Поскольку полный граф K_4 имеет $\rho(K_4) = -6$, подграф H не содержит K_4. Итак, среди возможных $H \neq BF$ имеются только полный граф $K_{2,3}$, 5-цикл с хордой и $K_4 - e$ с висячей вершиной (соединенной с $K_4 - e$ одним из двух способов). Кроме того, особый 3-цикл графа G не может иметь лишь одну вершину вне H, поскольку такая вершина была бы смежной более чем с одной вершиной подграфа H, а особый 3-цикл графа G с не более чем одной вершиной в H является особым 3-циклом и в G^*. В то же время G^* содержит особый 3-цикл, которого нет в G. Таким образом, G^* — меньший граф, чем G.

Далее докажем, что
$$Ms(G^*) \geq -2. \tag{1}$$
Предположим, что $A^* \subseteq G^*$ и $\rho(A^*) \leq -3$. Пусть $B = V(A^*) - H^*$, $H' = V(A^*) \cap H^*$ и e^* ребер соединяют B с H'. Тогда
$$-3 \geq \rho(A^*) = \rho(G^*[B]) + \rho(H^*[H']) - 5e^*. \tag{2}$$
Для $G' := G[B \cup H]$ аналогично получаем
$$\rho(G') \leq \rho(G^*[B]) + \rho(H) - 5e^*,$$
поскольку каждое ребро, соединяющее B с H' в G^*, отвечает некоторому ребру, соединяющему B с H в G. Так как $\rho(H^*[H']) \geq Ms(BF) \geq 0$ и $\rho(H) \leq 0$, с учетом (2) это означает, что $Ms(G) \leq \rho(G') \leq \rho(A^*) \leq -3$; противоречие. Тем самым (1) доказано.

Поскольку G^* меньше, чем G, из (1) следует существование $(1,0)$-раскраски c^* графа G^*. Заметим, что $c^*(h_0) = 0$, поскольку h_0 принадлежит двум 3-циклам. Отсюда вытекает, что все соседи вершины h_0, включая h_1 и h_1', имеют в раскраске c^* цвет 1, а все соседи вершины h_1, кроме h_1', окрашены в цвет 0. Таким образом, ограничение раскраски c^* на $G^* \setminus \{h_0, h_1\}$ в объединении с раскраской c_0 дает $(1,0)$-раскраску графа G. $\square$

Лемма 2. *Если 2-вершины x и y в G смежны, то существует 3-цикл xyz.*

Доказательство. Предположим, что существует 2-путь $wxyz$, где $w \neq z$ и $d(x) = d(y) = 2$. Пусть граф G^* получается из G удалением ребра yz и добавлением ребра wy. Так как в G^* особых 3-циклов больше, чем в G (из-за наличия 3-цикла wxy), то G^* меньше, чем G.

Если $Ms(G^*) \geq -2$, то ввиду минимальности G граф G^* имеет $(1,0)$-раскраску c^*. Зададим раскраску c графа G следующим образом: (a) положим $c(v) := c^*(v)$ для всех $v \neq x, y$; (b) положим $c(y) \neq c(z)$; (c) если $c(y) = c(w)$ или $c(w) = 0$, то положим $c(x) \neq c(w)$; (d) если $c(z) = 1$ и $c(y) = 0$ (напомним, что в этом случае согласно утверждению 1 в раскраске c^* одна из вершин x и y имела цвет 1), то положим $c(x) := 1$. По построению c является $(1,0)$-раскраской; противоречие.

Итак, $Ms(G^*) \leq -3$. Это означает, что в G^* имеется подграф A^* такой, что $\rho(A^*) \leq -3$. Это может случиться, лишь если $\{w, x, y\} \subset V(A^*)$ (поскольку $\rho(A^* \setminus \{x, y\}) \geq -2$, а всякая висячая вершина вносит $6 \times 1 - 5 \times 1 = 1$ в $\rho(A^*)$).

Таким образом, остается рассмотреть лишь случай, когда существует подграф A в $G' = G \setminus \{x, y\}$ такой, что $\rho(A) \leq \rho(A^*) - 6 \times 2 + 5 \times 3 = 0$. Заметим, что $z \notin G'$, поскольку иначе подграф A^+ графа G на множестве вершин $V(A) \cup \{x, y\}$ имел бы $\rho(A^+) = \rho(A) + 6 \times 2 - 5 \times 3 \leq -3$, что невозможно. Из леммы 1 следует, что либо A есть граф-бабочка, либо $|V(A)| \leq 4$.

Ввиду симметрии вершина z должна принадлежать и некоторому подграфу B графа G такому, что $\rho(B) \leq 0$ и $V(B) \cap \{w, z\} = \{z\}$, имеющему те же свойства, что и A.

Для подграфов $G'[A \cup B]$ и $G'[A \cap B]$ графа G' на множествах вершин $A \cup B$ и $A \cap B$ соответственно нетрудно проверить, что

$$\rho(G'[A \cup B]) + \rho(G'[A \cap B]) \leq \rho(A) + \rho(B) \leq 0.$$

Имеем $\rho(G'[A \cup B]) \geq 1$, так как в противном случае $\rho(G[A \cup B \cup \{x, y\}]) \leq 0 + 6 \times 2 - 5 \times 3 = -3$. Поэтому должно выполняться неравенство $\rho(G'[A \cap B]) \leq -1$, откуда по лемме 1 следует, что $|V(G'[A \cap B])| = 4$ и $|E(G'[A \cap B])| = 5$. Но тогда подграфы A и B не являются бабочками, а значит, $\rho(A) \geq 1$ и $\rho(B) \geq 1$ согласно лемме 1; противоречие. $\square$

Следствие 2. *В G нет k-цепей при $k \geq 3$.*

Лемма 3. *В G нет 3-вершин, входящих в особые 3-циклы.*

Доказательство. Допустим, что 3-вершина x лежит в особом 3-цикле xyz и смежна с вершиной $w \notin \{y, z\}$. Возьмем $(1,0)$-раскраску графа $G \setminus \{x, y, z\}$, покрасим x отлично от w, а затем без затруднений покрасим вершины y и z. $\square$

3.2. Перераспределение зарядов. Из предположения о $Ms(G)$ имеем

$$\sum_{v \in V(G)} (5d(v) - 12) \leq 4.$$

Начальный заряд любой вершины v графа G полагаем равным $\mu(v) = 5d(v) - 12$, а ее *финальный заряд* $\mu^*(v)$ определяется применением следующего правила.

R1. Всякая 2-вершина, входящая в 1-путь, получает по 1 от своих соседей, а 2-вершина из особого 3-цикла — заряд 2 от соседней 3^+-вершины.

Если $d(v) = 2$, то легко видеть, что $\mu^*(v) = 0$.

Утверждение 2. *Всякая 3^+-вершина v имеет $\mu^*(v) \geq 1$, за исключением $(1,1,1)$-вершины v, имеющей $\mu^*(v) = 0$.*

Доказательство. Если $d(v) = 3$, то v либо делает не более двух передач по правилу R1 ввиду леммы 3 и тогда $\mu^*(v) \geq 5 \times 3 - 12 - 2 \times 1 > 0$, либо смежна с тремя 2-вершинами и тогда $\mu^*(v) = 0$.

Если $d(v) \geq 4$, то $\mu^*(v) \geq 5d(v) - 12 - d(v) \times 2 = 3(d(v) - 4) \geq 0$. Равенство здесь достигается, лишь если $d(v) = 4$ и v инцидентна двум особым 3-циклам, но тогда G вырождается в граф-бабочку BF, который $(1, 0)$-раскрашиваем. Таким образом, любая 4^+-вершина v имеет $\mu^*(v) > 0$. $\square$

Поскольку

$$\sum_{v \in V} \mu^*(v) = \sum_{v \in V} \mu(v) \leq 4, \tag{3}$$

из утверждения 2 следует, что каждая вершина v графа G имеет $\mu^*(v) \leq 4$.

Ребро назовем *жестким,* если оно соединяет две 3^+-вершины. Пусть $h(v)$ — число жестких ребер, инцидентных вершине v, а $s(v)$ — число особых 3-циклов, содержащих v.

Рассмотрим частичную $(1, 0)$-раскраску c графа G, в которой все 3^+-вершины имеют цвет 1, все 2-вершины 1-путей покрашены в цвет 0, а 2-вершины особых 3-циклов не окрашены. Единственной причиной, по которой не удается немедленно превратить c в искомую $(1, 0)$-раскраску графа G, является наличие в G хотя бы одной вершины v с

$$h(v) + s(v) \geq 2. \tag{4}$$

В самом деле, если условие (4) не выполняется ни для одной вершины v, то в раскраске c нет вершины цвета 1, смежной более чем с одной вершиной цвета 1, при этом можно легко продолжить c на 2-вершины особых 3-циклов.

Однако сейчас мы убедимся, что если (4) имеет место хотя бы для одной вершины v, то уже нарушается условие (3).

Случай 1. $d(v) \geq 6$. Здесь $\mu^*(v) \geq 5d(v) - 12 - d(v) \times 2 = 3(d(v) - 4) \geq 5$, что противоречит (3).

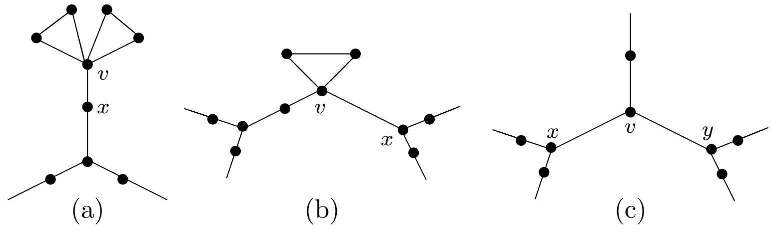

Рис. 2. Заключительные сводимые конфигурации в графе G.

Случай 2. $d(v) = 5$. Если $h(v) \geq 1$ или $s(v) \leq 1$, то $\mu^*(v) \geq 5$ вопреки (3). Допустим, что $s(v) = 2$ и v смежна с 2-вершиной x, не входящей в особый 3-цикл (см. рис. 2a). Тогда $\mu^*(v) = 4$, поэтому ввиду утверждения 2 все остальные 3^+-вершины графа G должны иметь $\mu^* = 0$, т. е. быть $(1, 1, 1)$-вершинами. Это позволяет нам покрасить v в цвет 0, а всех ее соседей, включая x, в цвет 1 и получить искомую $(1, 0)$-раскраску графа G.

Случай 3. $d(v) = 4$. Как уже было сказано, $s(v) \leq 1$. Если v — 4-вершина, инцидентная по меньшей мере двум жестким ребрам, то $\mu^*(v) \geq 4$ плюс каждая из смежных с ней 3^+-вершин имеет $\mu^* \geq 1$ по утверждению 2, что противоречит условию (3). Итак, из (4) следует, что $h(v) = 1$ и $s(v) = 1$. Пусть vx — жесткое ребро, инцидентное v (см. рис. 2b). Тогда $\mu^*(v) = 3$ и $\mu^*(x) \geq 1$, поэтому, как в конце разбора случая 2, можно покрасить v в цвет 0, а ее соседей — в цвет 1.

Случай 4. $d(v) = 3$. Из леммы 3 следует, что $s(v) = 0$. Если $h(v) = 3$, то $\mu^*(v) = 3$ и $\mu^*(x) \geq 1$ для каждой соседней с v вершиной x вопреки (3). Поэтому ввиду (4) имеем $h(v) = 2$, и пусть v смежна с 3^+-вершинами x и y (см. рис. 2c). Теперь $\mu^*(v) = 2$, $\mu^*(x) \geq 1$ и $\mu^*(y) \geq 1$, так что с учетом утверждения 2 снова можно покрасить v в цвет 0, а единственную смежную с ней 2-вершину — в цвет 1.

Теорема 2 доказана.

В заключение авторы выражают сердечную благодарность рецензенту за замечания по первоначальному варианту статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable. Part I. Discharging // Illinois J. Math. 1977. V. 21. P. 429–490.
2. *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility // Illinois J. Math. 1977. V. 21. P. 491–567.
3. *Cowen L. J., Cowen R. H., Woodall D. R.* Defective colorings of graphs in surfaces: partitions into subgraphs of bounded valency // J. Graph Theory. 1986. V. 10. P. 187–195.
4. *Havet F., Sereni J.-S.* Improper choosability of graphs and maximum average degree // J. Graph Theory. 2006. V. 52. P. 181–199.
5. *Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.* Путевые разбиения плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 450–459. (http://semr.math.nsc.ru).
6. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Почти правильные 2-раскраски вершин разреженных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 2. С. 16–20.
7. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Montassier M., Ochem P., Raspaud A.* Vertex decompositions of sparse graphs into an edgeless subgraph and a subgraph of maximum degree at most k // J. Graph Theory. 2010. V. 65. P. 83–93.

Статья поступила 15 июля 2010 г.

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Косточка Александр Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Университет штата Иллинойс, кафедра математики,
Урбана, IL 61801, США
sasha@math.nsc.ru