Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.957

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Д. А. Бердинский, И. П. Рыбников

Аннотация. Дан метод построения n-ортогональных систем координат в пространствах постоянной кривизны. Предложенная конструкция является модификацией метода Кричевера построения ортогональных систем координат в n-мерном евклидовом пространстве. В качестве примеров построены ортогональные системы координат на двумерной сфере и плоскости Лобачевского в случае, когда сингулярная спектральная кривая приводима и неприводимые компоненты изоморфны комплексной проективной прямой.

Ключевые слова: ортогональные системы координат, пространство постоянной кривизны, функция Бейкера — Ахиезера.

§ 1. Введение

В работе предложен метод построения криволинейных ортогональных систем координат в пространствах постоянной кривизны $K \neq 0$ в терминах n-точечной функции Бейкера — Ахиезера.

Напомним некоторые результаты, относящиеся к классической задаче об ортогональных криволинейных системах координат в $\mathbb{R}^n$ ($K = 0$). Пусть в ортогональной системе координат $u_1, \dots, u_n$ метрика имеет вид

$$ds^2 = H_1^2(du^1)^2 + \dots + H_n^2(du^n)^2,$$

где $H_i(u^1, \dots, u^n)$ — коэффициенты Ламе. Тогда метрика будет плоской, если и только если

$$\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \tag{1}$$

$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i,j} \beta_{mi}\beta_{mj} = 0, \tag{2}$$

где β_{ij} — коэффициенты вращения, $\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i}$, $i \neq j$.

Решение системы (1), (2) с использованием методов теории солитонов предложено В. Е. Захаровым в [1]. Уравнение (1) имеет вид абстрактной задачи n волн. К системе (1) в [1] применена процедура одевания и указана дифференциальная редукция, позволяющая находить решение всей системы (1), (2). Процедура интегрирования методом обратной задачи рассеяния уравнений, описывающих ортогональные системы координат в пространствах диагональной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09–01–00598 и 10–01–91056) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7256.2010.1).

кривизны (пространства постоянной кривизны являются пространствами диагональной кривизны), дана В. Е. Захаровым в [2].

Метод конечнозонного интегрирования применен И. М. Кричевером в [3] к задаче построения криволинейных ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$. В конструкции Кричевера координатные функции $x^j(u_1,\dots,u_n)$, $j=1,\dots,n$, выписываются в явном виде: $x^j(u_1,\dots,u_n)=\psi(u_1,\dots,u_n,Q_j)$, где Q_j — точки римановой поверхности Γ и $\psi(u_1,\dots,u_n,z)$ — n-точечная функция Бейкера — Ахиезера, $z\in\Gamma$.

Связь плоских диагональных метрик с интегрируемыми системами гидродинамического типа [4] открыта С. П. Царевым [5] в 1984 г., что возобновило интерес к классической задаче описания ортогональных криволинейных систем координат в плоском пространстве и ее приложениям в математической физике.

С помощью плоских диагональных метрик егоровского типа возможно строить решения уравнений ассоциативности Виттена — Дийкграафа — Верлинде [3, 6, 7].

Нетрудно проверить, что метрике постоянной кривизны K отвечает решение следующей системы:

$$\partial_k\beta_{ij}=\beta_{ik}\beta_{kj},\quad i\neq j\neq k, \tag{3}$$

$$\partial_i\beta_{ij}+\partial_j\beta_{ji}+\sum_{m\neq i,j}\beta_{mi}\beta_{mj}=-KH_iH_j, \tag{4}$$

где, как и ранее, $\beta_{ij}=\frac{\partial_i H_j}{H_i}$, $i\neq j$. Как видно, уравнения (3) и (1) совпадают.

Укажем, что метрики постоянной кривизны появляются в описании нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа (см. [8], где условие постоянства кривизны метрики является необходимым для того, чтобы скобка Пуассона была кососимметрической и удовлетворяла тождеству Якоби). Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, порождаемые метриками постоянной кривизны (скобки Мохова — Ферапонтова), играют важную роль в теории систем гидродинамического типа. Задача описания согласованных скобок Мохова — Ферапонтова эквивалентна задаче описания пучков метрик постоянной кривизны. Для этого достаточно классифицировать пары диагональных метрик постоянной кривизны, имеющие специальный вид, и эта проблема решена методом обратной задачи [9]. При этом ранее О. И. Моховым доказана интегрируемость уравнений, которые описывают плоские пучки метрик (согласованные скобки Дубровина — Новикова), отвечающих важным редукциям уравнений (1), (2).

Отметим также, что в [10] построены пары Лакса со спектральным параметром для значительно более общих классов ортогональных криволинейных координат в пространствах постоянной кривизны, описываемых более общими интегрируемыми редукциями уравнений (3), (4) и отвечающих паре согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа, одна из которых — скобка Мохова — Ферапонтова, а вторая — произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа. При этом в [11] показано, что сами интегрируемые уравнения (3), (4) являются условием совместности для линейной системы, но без спектрального параметра. Спектральный параметр появляется для важных в теории систем гидродинамического типа интегрируемых редукций системы (3), (4), связанных с согласованными нелокальными скобками Пуассона гидродинамического типа.

В этой работе мы укажем спектральные данные, для которых координатные функции, записанные в терминах функции Бейкера — Ахиезера, будут описывать ортогональные системы координат на пространствах постоянной кривизны $K \neq 0$. Также дадим частные решения уравнений (3), (4) в явном виде.

В § 2 напомним определение n-точечной функции Бейкера — Ахиезера. В § 3 модифицируем конструкцию Кричевера [3] так, чтобы в терминах функции Бейкера — Ахиезера получить ортогональные системы координат в S^n и H^n. В § 4 строим примеры ортогональных систем координат в S^2 и H^2 в вырожденном случае, когда спектральная кривая является приводимой и каждая неприводимая компонента изоморфна $\mathbb{CP}^1$. В этом случае функция Бейкера — Ахиезера выражается через элементарные функции, тогда как в случае гладкой спектральной кривой функция Бейкера — Ахиезера выражается через тэта-функцию многообразия Якоби. В § 4 мы следуем методам работ [7, 12].

Авторы благодарны А. Е. Миронову за полезные обсуждения.

§ 2. Многоточечная функция Бейкера — Ахиезера

В этом параграфе кратко напомним определение n-точечной функции Бейкера — Ахиезера. Отметим, что многоточечная функция Бейкера — Ахиезера (при $n = 2$) впервые возникла в [13].

Пусть Γ — риманова поверхность рода g. Предположим, что на Γ заданы дивизоры P, γ и R:

$$P = P_1 + \dots + P_n, \quad \gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l}, \quad R = r + r_1 + \dots + r_l.$$

Пусть k_i^{-1}, $i = 1, \dots, n$, означает локальный параметр в окрестности точки P_i.

Многоточечной функцией Бейкера — Ахиезера $\psi(u_1, \dots, u_n, S)$, где $u_1, \dots, u_n$ — вещественные переменные, $S \in \Gamma$, отвечающей спектральным данным $\{\Gamma, P_1, \dots, P_n, k_1, \dots, k_n, \gamma, R\}$, называется функция, обладающая следующими свойствами:

1) в окрестности $P_1, \dots, P_n$ функция ψ имеет существенные особенности вида

$$\psi = e^{k_j u_j}\left(f_j(x,y) + \frac{g_j(x,y)}{k_j} + \dots\right), \quad j = 1, \dots, n;$$

2) на $\Gamma \backslash \{P_1, \dots, P_n\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами на γ;

3) $\psi(u_1, \dots, u_n, r) = h$, $\psi(u_1, \dots, u_n, r_i) = 0$, где h — ненулевая вещественная константа (в общем случае константы нормировки, отвечающие значениям функции ψ в точках $r_1, \dots, r_l$, можно выбирать ненулевыми, однако, как будет ясно из доказательства теоремы в § 3, нам потребуется считать эти константы нулевыми).

Функцию Бейкера — Ахиезера явным образом можно выразить через тэта-функцию поверхности Γ. Выберем на поверхности Γ базис циклов $a_1, \dots, a_g$, $b_1, \dots, b_g$ с индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, g.$$

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис голоморфных дифференциалов, нормированный условиями $\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. Матрица b-периодов $B_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$ симметрическая, и ее мнимая часть положительно определена.

Тэта-функция Римана задается абсолютно сходящимся рядом

$$\theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i (Bm, m) + 2\pi i (m, z)}, \quad z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g.$$

Для тэта-функции справедливы свойства

$$\theta(z+m)=\theta(z),\quad \theta(z+Bm)=\exp(-\pi i(Bm,m)-2\pi i(m,z))\theta(z),\quad m\in\mathbb{Z}^g.$$

Пусть $X=\mathbb{C}^g/\{\mathbb{Z}^g+B\mathbb{Z}^g\}$ — многообразие Якоби поверхности Γ. Пусть $A:\Gamma\to X$ — отображение Абеля, заданное как

$$A(S)=\left(\int_{q_0}^{S}\omega_1,\dots,\int_{q_0}^{S}\omega_g\right),\quad S\in\Gamma,$$

для некоторой фиксированной точки q_0. По теореме Римана для точек в общем положении $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ функция $\theta(z+A(S))$ имеет на Γ ровно g нулей $\gamma_1,\dots,\gamma_g$, где $z=K_\Gamma-A(\gamma_1)-\dots-A(\gamma_g)$, K_Γ — вектор римановых констант.

Обозначим через Ω^i, $i=1,\dots,n$, мероморфный дифференциал с полюсом в точке P_i вида $d\Omega_i=d\big(k_i+O\big(k_i^{-1}\big)\big)$, нормированный условиями $\int_{a_j}\Omega^i=0$, $j=1,\dots,g$. Пусть $U^i=\big(\int_{b_1}\Omega^i,\dots,\int_{b_g}\Omega^i\big)$, $i=1,\dots,n$. Пусть $\widetilde{\psi}$ — функция вида

$$\widetilde{\psi}(u^1,\dots,u^n,S)=\frac{\theta(A(S)+u^1U^1+\dots+u^nU^n+z)}{\theta(A(S)+z)}\times\exp\left(2\pi i u_1\int_{q_0}^{S}\Omega^1+\dots+2\pi i u^n\int_{q_0}^{S}\Omega^n\right).\quad (5)$$

При $l=0$ функция Бейкера — Ахиезера имеет вид

$$\psi(u^1,\dots,u^n,S)=f(u^1,\dots,u^n)\widetilde{\psi}(u^1,\dots,u^n,S)$$

и f определяется из условия нормировки $\psi(u^1,\dots,u^n,r)=h$. При $l>0$ функция Бейкера — Ахиезера представляется в виде $\psi=f\widetilde{\psi}+f_1\widetilde{\psi}_1+\dots+f_l\widetilde{\psi}_l$, где функция $\widetilde{\psi}_j$ строится аналогично $\widetilde{\psi}$ по дивизору $\gamma_1+\dots+\gamma_{g-1}+r_j$ и функции f и f_j находятся из условий нормировки.

§ 3. Криволинейные ортогональные системы координат в S^n и H^n

Напомним конструкцию Кричевера [3]. Рассматривается гладкая алгебраическая кривая Γ рода g с тремя дивизорами:

$$P=P_1+\dots+P_n,\quad D=\gamma_1+\dots+\gamma_{g+l-1},\quad R=r_1+\dots+r_l.$$

Рассмотрим дивизор $Q=Q_1+\dots+Q_n$, где $Q_i\in\Gamma\setminus\{P\cup D\cup R\}$. Оказывается, что при наложении соответствующих условий на спектральную кривую Γ и множество $P\cup D\cup R$ следующие функции будут задавать ортогональные координаты в $\mathbb{R}^n$: $x^j(u_1,\dots,u_n)=\psi(u_1,\dots,u_n,Q_j)$. Условия на Γ,P,D,R и Q состоят в следующем.

1. Предположим, что на Γ существует голоморфная инволюция $\sigma:\Gamma\to\Gamma$ такая, что точки P_i, Q_j, $i,j=1,\dots,n$, неподвижны относительно σ, причем $\sigma\big(k_i^{-1}\big)=-k_i^{-1}$ в окрестности точек P_i.

2. На Γ существует мероморфный дифференциал Ω с дивизорами нулей и полюсов:

$$(\Omega)_0=D+\sigma D+P,\quad (\Omega)_\infty=R+\sigma R+Q.$$

При этом $\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega = \dots = \operatorname{Res}_{Q_n}\Omega = \mu_0^2 > 0$.

3. Существует антиголоморфная инволюция $\tau : \Gamma \to \Gamma$, для которой точки P_i, Q_j, $i, j = 1, \dots, n$, неподвижны, причем $\tau\bigl(k_i^{-1}\bigr) = \overline{k_i^{-1}}$ в окрестности точки P_i, $i = 1, \dots, n$. Пусть, кроме того, $\tau(R) = R$, $\tau(D) = D$.

Модифицируем конструкцию Кричевера следующим образом. Рассмотрим риманову поверхность Γ рода g с заданными на ней дивизорами

$$P = P_1 + \dots + P_n, \quad D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l}, \quad R = r + r_1 + \dots + r_l.$$

Возьмем $n+1$ точек $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ на Γ. Предположим, что существует голоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, оставляющая точки $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ и $P_1, \dots, P_n, r$ неподвижными, причем в окрестности точки P_i инволюция σ локально устроена как $\sigma k_i = -k_i$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Предположим, что существует 1-форма Ω такая, что*

$$(\Omega) = D + \sigma D + P - Q_1 - \dots - Q_{n+1} - R - \sigma r_1 - \dots - \sigma r_l.$$

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $A_i = \operatorname{Res}_{Q_i}\Omega$, $B = \operatorname{Res}_r \Omega$, C_i определяется из разложения $\bigl(-C_i k_i^{-1} + \dots\bigr)dk_i^{-1}$ формы Ω в окрестности точки P_i, $i = 1, \dots, n$. Пусть $h = \psi(r)$ — константа нормировки функции Бейкера — Ахиезера ψ в точке r и $f_j(u_1, \dots, u_n)$, $j = 1, \dots, n$, определяется как первый коэффициент разложения в окрестности точки P_j функции $e^{-u_j k_j}\psi = \bigl(f_j + \frac{g_j}{k_j} + \dots\bigr)$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi(Q_k)^2 A_k + h^2 B = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi_{u_i}(Q_k)\psi_{u_j}(Q_k) A_k = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \ i \neq j, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi_{u_i}^2(Q^k) A_k = C_i f_i^2, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим форму $\psi(S)\psi(\sigma S)\Omega$, $S \in \Gamma$. Нетрудно видеть, что эта форма имеет полюса в точках $Q_1, \dots, Q_{n+1}, r$ и из требования равенства нулю суммы вычетов получаем (6).

Рассмотрим 1-форму $\psi_{u_i}(S)\psi_{u_j}(\sigma S)\Omega$. При $i \neq j$ эта форма будет иметь полюса в точках $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ и из равенства нулю суммы вычетов вытекает (7). При $i = j$ полюса находятся в точках $Q_1, \dots, Q_n, P_i$ и отсюда следует (8). Теорема доказана.

Функции $\psi(u_1, \dots, u_n, Q_i)$, $i = 1, \dots, n+1$, зависящие от n вещественных переменных $u_1, \dots, u_n$, вообще говоря, комплексные. Для того чтобы получить вещественность этих функций, будем требовать выполнения условий, сформулированных в следующей лемме.

Лемма. *Пусть существует антиголоморфная инволюция τ такая, что точки дивизоров P, D, R и точки $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ неподвижны относительно τ, причем в окрестности точек P_i инволюция τ действует как $\tau k_i = \bar{k}_i$. Тогда функции $\psi(u_1, \dots, u_n, Q_i)$, $i = 1, \dots, n+1$, вещественны.*

Доказательство. Из единственности функции Бейкера — Ахиезера следует, что $\psi(u_1, \dots, u_n, S) = \overline{\psi(u_1, \dots, u_n, \tau S)}$, откуда получаем вещественность функций $\psi(u_1, \dots, u_n, Q_i)$. Лемма доказана.

Отметим, что функция Бейкера — Ахиезера указанного в § 2 вида и формулы, аналогичные (6), (7), появлялись в [14, 15], где строились поверхности, отличные от сферы, с диагональной метрикой.

Теперь мы легко можем сформулировать следствия.

Следствие 1. *Предположим, что A_i вещественны, $A_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, n+1$ и $h^2 B = -1$. Тогда функции*

$$x^i(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{A_i}\psi\left(u_1, \dots, u_n, Q_i\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

задают ортогональные координаты в S^n. При этом коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{f_i^2 C_i}$ удовлетворяют системе (3), (4) *при* $K = 1$.

Доказательство. Из тождеств (6), (7) теоремы следует, что функции $x^i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n+1$, удовлетворяют соотношениям

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1, \quad x^1_{u_i} x^1_{u_j} + \dots + x^{n+1}_{u_i} x^{n+1}_{u_j} = 0, \quad i \neq j.$$

Вещественность функций $x^i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n+1$, вытекает из леммы. Из (8) получаем, что $ds^2 = C_1 f_1^2 du_1^2 + \dots + C_n f_n^2 du_n^2$ является метрикой постоянной кривизны $K = 1$. Значит, коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{C_i f_i^2}$ удовлетворяют системе (3), (4).

При рассмотрении ортогональных систем координат в гиперболическом пространстве будем использовать стандартную модель на гиперболоиде, т. е. будем рассматривать H^n как компоненту связности гиперболоида $(x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^{n+1})^2 = 1$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n}$.

Следствие 2. *Предположим, что A_i вещественны, $A_i < 0$, $i = 2, \dots, n+1$, $A_1 > 0$ и $h^2 B = -1$. Тогда функции*

$$x^i(u^1, \dots, u^n) = \sqrt{|A_i|}\psi(u^1, \dots, u^n, Q_i), \quad i = 1, \dots, n+1,$$

задают ортогональную систему координат в H^n. При этом коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{-f_i^2 C_i}$ удовлетворяют системе (3), (4) *при* $K = -1$.

Доказательство. Ввиду (6), (7) функции $x^i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n+1$, удовлетворяют соотношениям

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^{n+1})^2 = 1, \quad x^1_{u_i} x^1_{u_j} - x^2_{u_i} x^2_{u_j} - \dots - x^{n+1}_{u_i} x^{n+1}_{u_j} = 0, \quad i \neq j.$$

Вещественность функций $x^i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n+1$, следует из леммы. Из (8) получаем, что

$$ds^2 = \left(-C_1 f_1^2\right) du_1^2 + \dots + \left(-C_n f_n^2\right) du_n^2$$

является метрикой постоянной кривизны $K = -1$. Значит, коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{-C_i f_i^2}$ удовлетворяют системе (3), (4).

§ 4. Ортогональные координаты на пространствах постоянной кривизны, отвечающие сингулярным кривым. Примеры

Здесь покажем, как реализуется модифицированная конструкция Кричевера для сингулярной спектральной кривой Γ. Рассмотрим самый простой случай, когда сингулярная кривая приводима и все неприводимые компоненты изоморфны $\mathbb{CP}^1$, при этом сингулярные точки возникают как пересечения по парам точек a_j, b_j, $j = 1, \dots, s$, где s — количество сингулярных точек, принадлежащих различным экземплярам $\mathbb{CP}^1$. Отметим, что такие сингулярные кривые использовались в [7, 12].

Функция Бейкера — Ахиезера задается отдельно на каждой компоненте $\mathbb{CP}^1$ так, чтобы значения в точках пересечения a_j, b_j совпадали. От мероморфного дифференциала Ω из теоремы в § 3 будем требовать, чтобы в точках пересечения a_j, b_j форма Ω имела простые полюса и сумма вычетов в этих точках равнялась нулю:

$$\operatorname{Res}_{a_j} \Omega + \operatorname{Res}_{b_j} \Omega = 0, \quad j = 1, \dots, s. \tag{9}$$

Условие теоремы сохранится без изменений с той лишь оговоркой, что геометрический род g следует заменить арифметическим родом сингулярной поверхности Γ. Результаты теоремы также останутся верными ввиду (9).

Приведем примеры построения ортогональных систем координат на S^2 и H^2. Рассмотрим сингулярную кривую Γ, состоящую из трех компонент $\mathbb{CP}^1$, которые пересекаются по четырем точкам. На рис. 1 точки $a, -a$ принадлежат Γ_1, точки $b, c, -b, -c$ принадлежат Γ_2 и точки $d, -d$ принадлежат Γ_3. Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad r = 0 \in \Gamma_1,$$

$$Q_1 = 0 \in \Gamma_2, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_3, \quad Q_3 = 0 \in \Gamma_3.$$

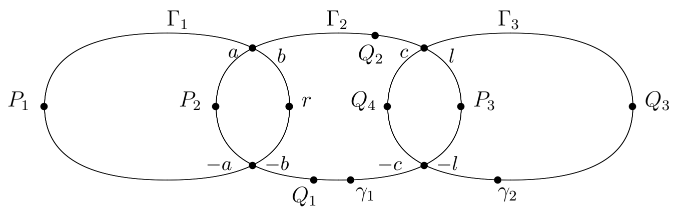

Рис. 1.

Пусть на кривой Γ заданы голоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, $\sigma(z_i) = -z_i$, $i = 1, 2, 3$, и антиголоморфная инволюция $\tau : \Gamma \to \Gamma$, $\tau(z_i) = \bar{z}_i$, $i = 1, 2, 3$. Точки γ_1, γ_2 выберем вещественными на компонентах Γ_2 и Γ_3 соответственно.

Мероморфная 1-форма Ω задается формами ω_i, $i = 1, 2, 3$, на соответствующих компонентах Γ_i:

$$\omega_1 = \frac{dz_1}{z_1\left(z_1^2 - a^2\right)}, \quad \omega_2 = \frac{\left(z_2^2 - \gamma_1^2\right) dz_2}{z_2\left(z_2^2 - b^2\right)\left(z_2^2 - c^2\right)}, \quad \omega_3 = \frac{\left(z_3^2 - \gamma_2^2\right) dz_3}{z_3\left(z_3^2 - d^2\right)}.$$

Условия регулярности для дифференциала Ω записываются так:

$$\begin{gathered} \operatorname{Res}_a \omega_1 + \operatorname{Res}_b \omega_2 = 0, \quad \operatorname{Res}_c \omega_2 + \operatorname{Res}_d \omega_3 = 0, \\ \operatorname{Res}_{-a} \omega_1 + \operatorname{Res}_{-b} \omega_2 = 0, \quad \operatorname{Res}_{-c} \omega_2 + \operatorname{Res}_{-d} \omega_3 = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Будем накладывать дополнительное требование на вычеты Ω в точках Q_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega = \operatorname{Res}_{Q_2} \Omega = \operatorname{Res}_{Q_3} \Omega. \tag{11}$$

Рассмотрим частное решение системы (10), (11):

$$a = \frac{i}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{i}{\sqrt{3}}, \quad c = i, \quad d = i, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \gamma_2 = 1.$$

Выпишем функцию Бейкера — Ахиезера ψ для каждой компоненты Γ_1, Γ_2, Γ_3, отвечающую нашим спектральным данным:

$$\psi_1(u,v,z_1) = e^{uz_1} f_1(u,v), \quad \psi_2(u,v,z_2) = e^{vz_2}\left(f_2(u,v) + \frac{g_2(u,v)}{z_2-\gamma_1}\right),$$

$$\psi_3(u,v,z_3) = \left(f_3(u,v) + \frac{g_3(u,v)}{z_3-\gamma_2}\right).$$

Выберем $h = \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда

$$-\frac{h^2 \operatorname{Res}_r \Omega}{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega} = 1.$$

Таким образом, $f_1(u,v) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и остальные функции f_2, g_2, f_3, g_3 находятся из условия согласования функции ψ на компонентах Γ_1, Γ_2, Γ_3:

$$\psi_1(u,v,a) = \psi_2(u,v,b), \psi_1(u,v,z,-a) = \psi_2(u,v,-b),$$

$$\psi_2(u,v,c) = \psi_3(u,v,d), \psi_2(u,v,-c) = \psi_3(u,v,-d).$$

Рассмотрим функции двух переменных $x_i(u,v) = \psi(u,v,Q_i)$, $i = 1,\ldots,3$:

$$x_1(u,v) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\cos\frac{u-v}{\sqrt{3}} + \sin\frac{u-v}{\sqrt{3}}\right],$$

$$x_2(u,v) = \frac{1}{12}\left[(3+\sqrt{3})\cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v\right) + 3(-1+\sqrt{3})\cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v\right)\right.$$
$$\left. - 3(1+\sqrt{3})\sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v\right) + (-3+\sqrt{3})\sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v\right)\right],$$

$$x_3(u,v) = \frac{1}{12}\left[3(1+\sqrt{3})\cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v\right) + (-3+\sqrt{3})\cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v\right)\right.$$
$$\left. + (3+\sqrt{3})\sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}+v\right) - 3(-1+\sqrt{3})\sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}}-v\right)\right].$$

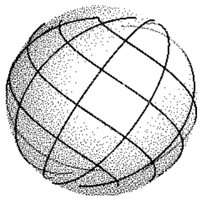

Рис. 2.

Координатные линии этой системы координат изображены на рис. 2. Отметим, что при фиксированном v координатные линии являются окружностями радиуса 1, но в отличие от обычной сферической системы координат эти окружности не имеют общих точек в северном и южном полюсах.

В силу следствия 1 u и v задают ортогональные координаты на сфере S^2.

Отметим, что в координатах u и v метрика на S^2 имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{3}du^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \sin\left(\frac{2(u-v)}{\sqrt{3}}\right)\right)dv^2.$$

Приведем пример построения ортогональной системы координат на H^2. Для той же спектральной кривой Γ (см. рис. 1) возьмем следующие значения для $a, b, c, d, \gamma_1, \gamma_2$:

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = d = i, \quad \gamma_1 = \sqrt{3}, \quad \gamma_2 = 1.$$

Легко проверить, что условие (10) выполнено. Вычеты формы Ω в точках Q_1, Q_2, Q_3 и r равны 3, -1, -1 и -1 соответственно.

Здесь нам удобно положить $h = \psi(r) = 1$. Таким образом, $f_1(u,v) = 1$, и остальные функции f_2, g_2, f_3, g_3 находятся из условия согласования функции ψ на компонентах Γ_1, Γ_2, Γ_3:

$$\psi_1(u,v,a) = \psi_2(u,v,b), \psi_1(u,v,z,-a) = \psi_2(u,v,-b),$$

$$\psi_2(u,v,c) = \psi_3(u,v,d), \psi_2(u,v,-c) = \psi_3(u,v,-d).$$

Рассмотрим функции $x_1(u,v) = \sqrt{3}\psi(u,v,Q_1)$ и $x_i(u,v) = \psi(u,v,Q_i)$, $i = 2,3$:

$$x_1(u,v) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(e^{-u-v} + (2+\sqrt{3})e^{u+v}),$$

$$x_2(u,v) = \frac{1}{4\left(1+\sqrt{3}\right)}((-2e^{-u-v} + (6+4\sqrt{3})e^{u+v})\cos v \\ - 2(\sqrt{3}e^{-u-v} + (2+\sqrt{3})e^{u+v})\sin v),$$

$$x_3(u,v) = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}(((3+\sqrt{3})e^{-u-v} + (5+3\sqrt{3})e^{u+v})\cos v \\ + ((-1-\sqrt{3})e^{-u-v} + (9+5\sqrt{3})e^{u+v})\sin v).$$

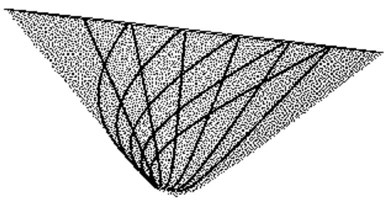

Рис. 3.

В силу следствия 2 u и v задают ортогональные координаты на H^2. Координатные линии этой системы координат изображены на рис. 3.

В координатах u и v метрика на H^2 имеет вид $ds^2 = du^2 + (((7+4\sqrt{3})e^{-2(u+v)} + (97+56\sqrt{3})e^{2(u+v)})/(52+30\sqrt{3}) - 1)dv^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zakharov V. E.* Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. 1: Integration of the Lame equation // Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103–139.
2. *Zakharov V. E.* Application of the inverse scattering transform to classical problems of differential geometry and general relativity // Contemp. Math. 2002. V. 301. P. 15–34.
3. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функцион. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 1. С. 32–50.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 6. С. 29–98.
5. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1990. Т. 54, № 5. С. 1048–1068.
6. *Dubrovin B.* Geometry of 2D topological field theories // Integrable systems and quantum groups. (Montecatini Terme, 1993). Berlin: Springer-Verl., 1995. P. 120–348. (Lect. Notes Math.; V. 1620).
7. *Миронов А. Е., Тайманов И. А.* О некоторых алгебраических примерах фробениусовых многообразий // Теорет. мат. физика. 2007. Т. 151, № 2. С. 195–206.
8. *Мохов О. И., Ферапонтов Е. В.* О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 3. С. 191–192.

9. *Мохов О. И.* Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость // Функцион. анализ и его прил. 2002. Т. 36, № 3. С. 36–47.

10. *Мохов О. И.* Пары Лакса для уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, и интегрируемые редукции уравнений Ламе // Теорет. мат. физика. 2004. Т. 138, № 2. С. 283–296.

11. *Мохов О. И.* Пары Лакса для неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57, № 3. С. 155–156.

12. *Миронов А. Е., Тайманов И. А.* Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 180–196.

13. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шредингера в магнитном поле и римановы поверхности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 1. С. 15–18.

14. *Миронов А. Е.* Спектральные данные для гамильтоново минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{CP}^2$ // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 263. С. 120–134.

15. *Mironov A. E.* Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in $\mathbb{CP}^2$ // Osaka City Univ. Adv. Math. Institute. Stud. Ser. 2010. V. 3. P. 185–196.

Статья поступила 28 сентября 2010 г.

Бердинский Дмитрий Александрович, Рыбников Иван Павлович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`berdinsky@gmail.com`, `ivan.p.rybnikov@gmail.com`