Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 519.14

КЛИКОСОЧЕТАНИЯ В k–ЗНАЧНОМ n–МЕРНОМ КУБЕ

В. Н. Потапов

Аннотация. *Кликосочетанием* в k-значном n-мерном кубе (гиперкубе) называется набор непересекающихся одномерных граней. Кликосочетание называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины гиперкуба. Показано, что число совершенных кликосочетаний в k-значном n-мерном кубе выражается как k-мерный перманент массива смежности некоторого гиперграфа. Вычислен порядок логарифма числа совершенных кликосочетаний в k-значном n-мерном кубе при любом натуральном k и $n \to \infty$.

Совершенное кликосочетание называется *точным*, если в каждой двумерной грани гиперкуба лежит ровно одна одномерная грань из кликосочетания. Точные кликосочетания являются частным случаем дизайнов Ханани. Доказано, что для существования точного кликосочетания в k-значном n-мерном кубе необходимо, чтобы $k = 2m$ и $n = 4m$ для некоторого натурального m. Предложена конструкция точных кликосочетаний при $k = 2^t$, $n = 2^{t+1}$ для любого натурального t.

Ключевые слова: совершенное паросочетание, кликосочетание, перманент, МДР-код, дизайн Ханани.

Введение

Пусть $Q_k = \{0, \dots, k-1\}$. *k-Значным n-мерным кубом* (*гиперкубом*) называется множество Q_k^n. Гиперкубом называют также граф ΓQ_k^n минимальных расстояний метрического пространства (Q_k^n, d), где d — расстояние Хэмминга, т. е. $d(u, v)$ — число отличающихся компонент в наборах $u, v \in Q_k^n$. Одномерная грань направления i, проходящая через вершину $(a_1, \dots, a_n) \in Q_k^n$, определяется как множество $\{(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \mid x \in Q_k\}$ и является максимальной кликой в гиперкубе ΓQ_k^n. Аналогично определяются грани большей размерности в Q_k^n. Множество клик (одномерных граней) в гиперкубе Q_k^n будем обозначать через $\widetilde{Q}_k^n$. *Кликосочетанием* в Q_k^n будем называть набор не пересекающихся по вершинам клик. При $k = 2$ понятие кликосочетания в Q_2^n совпадает с понятием паросочетания.

Кликосочетание B в гиперкубе Q_k^n будем называть *совершенным*, если оно является разбиением вершин гиперкуба на клики, т. е. $Q_k^n = \bigcup\limits_{b \in B} b$. Ясно, что кликосочетание $B \subset \widetilde{Q}_k^n$ является совершенным тогда и только тогда, когда $|B| = k^{n-1}$. Здесь и далее через $|A|$ обозначается мощность множества A.

Известно, что число совершенных паросочетаний в двудольном графе равняется перманенту матрицы смежности графа и отлично от нуля для любого регулярного графа (теорема Кёнига). В § 1 показано, что число совершенных кликосочетаний в гиперкубе Q_k^n равняется k-мерному перманенту массива

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–0616, 10–01–00424).

смежности гиперграфа, k-ребрами которого являются клики в ΓQ_k^n. Кроме того, построен пример, показывающий, что регулярный гиперграф может не содержать совершенных кликосочетаний, т. е. формальное обобщение теоремы Кёнига неверно.

Обозначим через $K_k(n)$ множество кликосочетаний и через $SK_k(n)$ — множество совершенных кликосочетаний в Q_k^n. Из определения следует тривиальная верхняя оценка $|SK_k(n)| \leq n^{k^n}$ числа кликосочетаний в Q_k^n. В [1] как прямое следствие теорем из [2, 3] указана асимптотика логарифма числа совершенных паросочетаний $\ln|SK_2(n)| = 2^{n-1}(\ln n - 1 + o(1))$ при $n \to \infty$. В § 2 получен порядок логарифма для числа совершенных кликосочетаний в n-мерном кубе произвольной значности $k > 1$. Справедливо асимптотическое равенство $\ln|SK_k(n)| \asymp k^n \ln n$ при $n \to \infty$. Кроме того, получено уточнение верхней оценки числа $|SK_k(n)|$ при четных k.

Будем говорить, что кликосочетание f *не содержит близких параллельных клик*, если никакие две клики из f не лежат в одной двумерной грани. Совершенное кликосочетание f будем называть *точным*, если в каждой двумерной грани лежит ровно одна клика из кликосочетания f. В [4–6] построены совершенные паросочетания без близких параллельных ребер в булевом гиперкубе. Точнее, в [4, 6] построены тернарные коды, эквивалентность которых паросочетаниям показана в [4]. В частности, в [4] доказано, что при $n = 2^j$, $j \geq 2$, в булевом n-мерном кубе Q_2^n имеются совершенные паросочетания без параллельных ребер в трехмерных гранях. Из мощностных соображений нетрудно доказать, что при $k > 2$ в гиперкубе Q_k^n не существует совершенных кликосочетаний без параллельных клик в трехмерных гранях. В [7] построены совершенные паросочетания в булевом n-мерном кубе, сужения которых на любую грань размерности больше 1 и меньше n не являются паросочетаниями в этой грани и, следовательно, не содержат близких параллельных ребер.

Отметим, что точные кликосочетания в Q_k^n являются частным случаем дизайнов Ханани (H-design), впервые определенных в [8]. *Дизайном Ханани типа* $H(n, k, w, t)$ называется такой набор $(n-w)$-мерных граней гиперкуба Q_k^n, что любая $(n-t)$-мерная грань гиперкуба Q_k^n содержит ровно одну грань из этого набора (см. также [9]). Таким образом, точное кликосочетание в Q_k^n является дизайном Ханани типа $H(n, k, n-1, n-2)$.

В § 3 получены необходимые условия для существования точных кликосочетаний в Q_k^n, а именно $n = 4m$, $k = 2m$, где m натуральное. Предложена конструкция точных кликосочетаний в Q_k^n при $k = 2^t$, $n = 2^{t+1}$ для любого натурального t. Кроме того, показано что совершенные кликосочетания без близких параллельных клик в Q_k^n имеются при $k \leq 2^t$ и $n \geq 2^{t+1}$, где t — произвольное натуральное число.

§ 1. Многомерные перманенты

В [10] предложено выражать через многомерные перманенты число комбинаторных объектов, подобных совершенным кликосочетаниям. Рассмотрим G_k — *k-дольный гиперграф* с N вершинами в каждой доли, каждое k-ребро которого состоит из k вершин по одной из каждой *доли* гиперграфа. Занумеруем вершины каждой доли числами $1, 2, \ldots, N$. Определим *массив смежности* $A(G_k) = (a_{i_1 \ldots i_k})$ гиперграфа G_k равенствами $a_{i_1 \ldots i_k} = 1$, если имеется k-ребро гиперграфа G_k, состоящее из вершин с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ из 1-й, 2-й и т. д. долей соответственно; в противном случае $a_{i_1 \ldots i_k} = 0$. *Диагональю* массива

$F = \{1, \ldots, N\}^k$ будем называть множество, состоящее из N попарно различных во всех координатах элементов F. При $k = 2$ понятие диагонали массива совпадает с понятием диагонали матрицы. *k-Мерным перманентом* массива $A(G_k)$ называется величина

$$\operatorname{per} A(G_k) = \sum_{I \in D_N} \prod_{(i_1,\ldots,i_k)\in I} a_{i_1\ldots i_k},$$

где D_N — множество всех диагоналей массива F. При $k = 2$ массив $A(G_2)$ является матрицей смежности двудольного графа G_2 и величина $\operatorname{per} A(G_2)$ совпадает с ее перманентом. Известно (см., например, [3]), что число совершенных паросочетаний в двудольном графе G_2 равно перманенту матрицы $A(G_2)$.

МДР-*кодом* (с расстоянием 2) называется подмножество Q_k^n, пересекающееся с каждой одномерной гранью ровно по одному элементу. *Разбиением* Q_k^n на МДР-коды будем называть набор попарно не пересекающихся МДР-кодов $M_0, \ldots, M_{k-1}$. Тогда $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} M_i = Q_k^n$. МДР-код $M \subset Q_k^n$ можно рассматривать как график некоторой функции ($(n-1)$-*арной квазигруппы порядка* k) $\varphi_M : Q_k^{n-1} \to Q_k$, т. е.

$$M = \bigl\{(a_1, \ldots, a_{n-1}, \varphi_M(a_1, \ldots, a_{n-1})) \mid (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in Q_k^{n-1}\bigr\}.$$

Из определения МДР-кода следует, что $\varphi_M(\bar a) \neq \varphi_M(\bar a')$, если $d(\bar a, \bar a') = 1$. Отметим, что МДР-коды с расстоянием 2, как и разбиения на них множества Q_k^n, существуют при всех $n \geq 2$ и $k \geq 2$.

Рассмотрим гиперграф $G_k(n)$ с множеством вершин Q_k^n, k-ребрами которого являются элементы множества $\widetilde{Q}_k^n$ (максимальные клики в гиперкубе ΓQ_k^n). В качестве набора долей гиперграфа $G_k(n)$ рассмотрим произвольное разбиение гиперкуба Q_k^n на МДР-коды. Как нетрудно видеть, совершенному кликосочетанию в гиперкубе Q_k^n соответствует диагональ массива $A(G_k(n))$, состоящая из единиц. Поэтому число совершенных кликосочетаний в гиперкубе Q_k^n равно k-мерному перманенту массива $A(G_k(n))$.

Из теоремы Кёнига (см., например, [3]) следует, что в любом t-регулярном (степень любой вершины равна t, $t \geq 1$) двудольном графе имеется совершенное паросочетание или, другими словами, любая квадратная $(0,1)$-матрица с одинаковым (ненулевым) числом единиц в каждом столбце и каждой строке имеет положительный перманент. Аналогичное утверждение неверно для многомерных перманентов. В частности, справедливо

Утверждение 1. *В гиперграфе $G_k(n)$ при $k \geq 3$ и $n \geq 5$ имеется 2-регулярный подгиперграф, не содержащий совершенных кликосочетаний.*

Доказательство. Регулярный подгиперграф степени 1 в гиперграфе $G_k(n)$ является кликосочетанием в гиперкубе Q_k^n. Нетрудно видеть, что 2-регулярным подгиперграфам в $G_k(n)$ соответствуют функции $h : Q_k^n \to I_n$, где I_n — множество неупорядоченных пар из $\{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющие следующему условию:

$$h(a_1, \ldots, a_n) = \{i, j\} \ \Rightarrow\ \forall x \in Q_k \ i \in h(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$
$$j \in h(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Циклом в гиперграфе $G_k(n)$ будем называть такой набор k-ребер $b_1, \ldots, b_m$, что $b_m \cap b_1 \neq \varnothing$, $b_i \cap b_{i+1} \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ и $b_i \cap b_j = \varnothing$ в остальных случаях. Нетрудно убедиться, что гиперграф $G_3(3)$ содержит цикл длины 7, состоящий из одномерных граней $e_1, \dots, e_7$, имеющих направления $i_1, \dots, i_7 = 1, 2, 3, 1, 3, 2, 3$ соответственно. Определим функцию $h : Q_3^5 \to I_5$ равенством

$$h(a_1, \dots, a_5) = \begin{cases} \{i_j, i_{j'}\}, & \text{если } (a_1, a_2, a_3) \in e_j \cap e_{j'}, \\ \{j, 4\}, & \text{если } (a_1, a_2, a_3) \in e_j \setminus \bigcup\limits_{l \neq j} e_l, \\ \{4, 5\}, & \text{если } (a_1, a_2, a_3) \notin \bigcup\limits_{l=1}^{7} e_l. \end{cases}$$

По построению функция h определяет 2-регулярный подгиперграф H в $G_3(5)$, который содержит как минимум девять циклов длины 7. Предположим, что 2-регулярный подгиперграф H содержит совершенное кликосочетание. Тогда H является объединением двух совершенных кликосочетаний, одно из которых содержит четыре k-ребра из цикла длины 7. Поскольку как минимум два из любых четырех k-ребер цикла длины 7 пересекаются, получаем противоречие с определением кликосочетания. Нетрудно видеть, что любой 2-регулярный подгиперграф в $G_3(5)$ можно вложить в 2-регулярный подгиперграф гиперграфа $G_k(n)$ при $k \geq 3$, $n \geq 5$. Следовательно, в $G_k(n)$ имеется 2-регулярный подгиперграф, не содержащий совершенных кликосочетаний. $\square$

§ 2. Число кликосочетаний

Кликосочетание можно рассматривать как функцию, ставящую в соответствие каждой вершине из Q_k^n направление i одномерной грани кликосочетания, в которой лежит вершина, или 0, если вершина не содержится ни в одной грани кликосочетания. Нетрудно видеть, что функция $f : Q_k^n \to \{0, 1, \dots, n\}$ определяет кликосочетание, если удовлетворяет следующему условию:

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = i \neq 0 \\ \Rightarrow \ \forall x \in Q_k \ f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = i. \quad (1)$$

В дальнейшем будем называть кликосочетанием и определяющую кликосочетание функцию. Кликосочетание f является совершенным тогда и только тогда, когда $0 \notin f(Q_k^n)$.

Изотопией называется упорядоченный набор из n перестановок $(\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_i : Q_k \to Q_k$, где $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через S_k^n множество изотопий гиперкуба Q_k^n. Пусть $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in S_k^n$ и $f \in K_k(n)$. Нетрудно видеть, что функция $g(x_1, \dots, x_n) = f(\theta_1 x_1, \dots, \theta_n x_n)$ является кликосочетанием. Введем обозначение $g = \bar{\theta} f$. Определим *изотопное замыкание* множества $A \subseteq K_k(n)$ равенством $\overline{A} = \{\bar{\theta} f \mid f \in A, \bar{\theta} \in S_k^n\}$. Справедливо следующее

Утверждение 2. *Пусть $A \subseteq K_k(n)$ и $A = \overline{A}$. Тогда величины $P_{A,i}(\bar{x}) = \frac{|\{f \in A \mid f(\bar{x}) = i\}|}{|A|}$, $i \in \{0, \dots, n\}$, не зависят от $\bar{x} \in Q_k^n$.*

Если множество кликосочетаний A замкнуто относительно автоморфизмов гиперкуба Q_k^n, то частоты $P_{A,i}(\bar{x})$ встречаемости направлений будут равны для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\bar{x} \in Q_k^n$.

Обозначим через $K_k(n, p)$ множество кликосочетаний, принимающих значение 0 с вероятностью p, т. е.

$$K_k(n, p) = \left\{ f \in K_k(n, p) \mid p = \frac{|\{\bar{x} \in Q_k^n \mid f(\bar{x}) = 0\}|}{k^n} \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < 1$ *и* $K_k(m,p) \neq \varnothing$ *для некоторого натурального* m. *Тогда* $|K_k(n,p)| \geq n^{ck^{n-2}(1+o(1))}$ *при* $n \to \infty$, *где* $c = p^{k-1}(1-p)\ln 2$.

Доказательство. Докажем неравенство

$$|K_k(n+1,p)| \geq |K_k(n,p)|^k 2^{\frac{k^{n-1}p^{k-1}(1-p)}{n}}. \tag{2}$$

Рассмотрим произвольную вектор-функцию $F \in (K_k(n,p))^k$, $F = (f_0,\dots,f_{k-1})$. Нетрудно видеть, что F определяет кликосочетание $\widehat{F}$ в гиперкубе Q_k^{n+1} по правилу $\widehat{F}(x_1,\dots,x_n,z) = f_z(x_1,\dots,x_n)$. Однако построенных таким способом кликосочетаний в Q_k^{n+1} оказывается недостаточно для требуемой асимптотической оценки числа $|K_k(n,p)|$. Ниже описан способ получения из кликосочетаний вида $\widehat{F}$ кликосочетаний другого типа посредством некоторых локальных преобразований.

Двумерную грань $\alpha_{x_2,\dots,x_n} = \{(y,x_2,\dots,x_n,z) \mid y,z \in Q_k\}$ в Q_k^{n+1} будем называть *сдвигаемой* относительно F, если

$$(f_0(y_0,x_2,\dots,x_n),\dots,f_{k-1}(y_0,x_2,\dots,x_n)) = (0,\dots,0,1)$$

для некоторого $y_0 \in Q_k$. Определим функцию $g^0_\alpha[F] : \alpha \to Q_k$ на произвольной грани $\alpha = \alpha_{x_2,\dots,x_n}$ равенством

$$g^0_\alpha[F](y,x_2,\dots,x_n,z) = f_z(y,x_2,\dots,x_n)$$

и функцию $g^1_\alpha[F] : \alpha \to Q_k$ на сдвигаемой грани $\alpha = \alpha_{x_2,\dots,x_n}$, полагая

$$g^1_\alpha[F](y,x_2,\dots,x_n,z) = \begin{cases} n+1 & \text{при } z \in Q_k \text{ и } y = y_0, \\ 0 & \text{при } \ z = k-1 \text{ и } y \neq y_0, \\ f_z(y,x_2,\dots,x_n) & \text{при } \ z \neq k-1 \text{ и } y \neq y_0. \end{cases}$$

Если $y_0 \in Q_k$ можно выбрать несколькими способами, то для определенности полагаем y_0 минимальным из возможных. Рассмотрим произвольный набор Ω сдвигаемых граней $\alpha_{x_2,\dots,x_n}$, $x_i \in Q_k$, относительно фиксированной вектор-функции $F \in (K_k(n,p))^k$. Нетрудно видеть, что функция $h_\Omega[F] : Q_k^{n+1} \to Q_k$, определенная как

$$h_\Omega[F]|_\alpha = \begin{cases} g^0_\alpha[F] & \text{при } \alpha \notin \Omega, \\ g^1_\alpha[F] & \text{при } \ \alpha \in \Omega, \end{cases}$$

является кликосочетанием, более того, $h_\Omega[F] \in K_k(n+1,p)$.

Вектор-функция F восстанавливается из кликосочетания $h_\Omega[F]$ однозначно заменой подфункции $g^1_\alpha[F]$ подфункцией $g^0_\alpha[F]$ во всех тех гранях $\alpha_{x_2,\dots,x_n}$, $x_i \in Q_k$, где кликосочетание $h_\Omega[F]$ принимает значение $n+1$. Тогда из равенства $h_\Omega[F] = h_{\Omega'}[F']$ следует, что $F = F'$ и $\Omega = \Omega'$. Следовательно,

$$|K_k(n+1,p)| \geq \sum_{F \in (K_k(n,p))^k} 2^{d_F}, \tag{3}$$

где d_F — число сдвигаемых граней относительно вектор-функции F.

Оценим количество сдвигаемых граней во всех функциях $F \in (K_k(n,p))^k$. Имеем

$$|\{F \in (K_k(n,p))^k \mid F(\bar{x}) = (0,\dots,0,1)\}| = |K_k(n,p)|^k (P_0(\bar{x}))^{k-1} P_1(\bar{x}),$$

где

$$P_i(\bar{x}) = \frac{|\{f \in K_k(n,p) \mid f(\bar{x}) = i\}|}{|K_k(n,p)|}.$$

Поскольку каждая двумерная грань состоит из k одномерных, справедливо неравенство

$$\sum_{F\in(K_k(n,p))^k} d_F \geq \frac{1}{k}|K_k(n,p)|^k \sum_{\bar{x}\in Q_k^n} (P_0(\bar{x}))^{k-1} P_1(\bar{x}). \tag{4}$$

Без ограничения общности полагаем, что

$$\sum_{\bar{x}\in Q_k^n} P_1(\bar{x}) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\bar{x}\in Q_k^n} P_i(\bar{x}) \geq \frac{1}{n}(1-p)k^n.$$

Поскольку $K_k(n,p) = \overline{K_k(n,p)}$, из утверждения 2 и неравенства (4) имеем

$$\sum_{F\in(K_k(n,p)^k} d_F \geq \frac{1}{k}|K_k(n,p)|^k \sum_{\bar{x}\in Q_k^n} (P_0(\bar{x}))^{k-1} P_1(\bar{x})$$
$$\geq k^{n-1}|K_k(n,p)|^k \frac{p^{k-1}(1-p)}{n}.$$

Из (3) и выпуклости (вниз) функции $y(t) = 2^t$ получаем неравенство (2).

Введем обозначение $\beta_n = \frac{\ln|K_k(n,p)|}{k^{n-1}}$. Подразумевается, что $K_k(n,p) \neq \varnothing$. Это верно, например, при $n = 2$ и $p = 1 - \frac{1}{k}$. Из неравенства (2) имеем $\beta_{n+1} \geq \beta_n + \frac{c}{kn}$, следовательно, $\beta_n \geq \frac{c}{k}\ln n(1 + o(1))$ при $n \to \infty$. $\square$

Следствие 1. $|SK_k(n)| \geq n^{c_n k^{n-4}}$ *при* $n \to \infty$, *где* $c_n = \frac{\ln 2(1+o(1))}{e}$.

Доказательство. Пусть $f \in K_k(n)$. Определим функцию

$$\tilde{f}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \begin{cases} f(x_1,\dots,x_n), & \text{если } f(x_1,\dots,x_n) \neq 0, \\ n+1, & \text{если } f(x_1,\dots,x_n) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{f} \in SK_k(n)$. Отсюда $|SK_k(n)| \geq |K_k(n-1,p)|$ для любого p, $0 < p < 1$. Выберем $p = 1 - \frac{1}{k}$. Тогда $p^{k-1} > 1/e$ и из теоремы 1 получаем требуемое неравенство. $\square$

Поскольку $\ln|SK_k(n)| \leq \ln|K_k(n)| \leq k^n \ln n$, справедливо

Следствье 2. $\ln|SK_k(n)| \asymp k^n \ln n$ *при* $n \to \infty$.

Прямым следствием теоремы Брэгмана (см. [3, 11]) является верхняя оценка числа совершенных паросочетаний в булевом кубе Q_2^n:

$$|SK_2(n)| \leq (n!)^{2^{n-1}/n}. \tag{5}$$

На основе этой оценки в следующем утверждении предлагается некоторое усиление тривиальной верхней оценки числа совершенных кликосочетаний в случае четного k.

Утверждение 3. *Пусть k четно, тогда*

$$|SK_k(n)| \leq \left(\frac{n}{e}\right)^{k^{n-1}(1+o(1))} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $k = 2m$. Представим элементы $a \in Q_{2m}$ в виде $a = (\alpha,\beta) \in Q_2 \times Q_m$. Пусть M — некоторый МДР-код в Q_m^n. Совершенное кликосочетание $f : (Q_2 \times Q_m)^n \to \{1,\dots,n\}$ однозначно определяется набором своих сужений на множества $Q_2^n \times \bar{c}$, где $\bar{c} \in M$. Поскольку $|M| = m^{n-1}$, из неравенства (5) получаем оценку $|SK_{2m}(n)| \leq (n!)^{m^{n-1}2^{n-1}/n}$. Отсюда требуемое асимптотическое неравенство получается при помощи формулы Стирлинга $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$ при $n \to \infty$. $\square$

§ 3. Точные кликосочетания

Сначала выясним, при каких k и n в гиперкубе Q_k^n могут существовать совершенные кликосочетания без близких параллельных клик и точные кликосочетания.

Утверждение 4. (a) *Если в Q_k^n существует совершенное кликосочетание без близких параллельных клик, то $n \geq 2k$.*

(b) *Совершенное кликосочетание без близких параллельных клик в Q_k^n является точным, если и только если $n = 2k$.*

Доказательство. Совершенное кликосочетание B в гиперкубе Q_k^n содержит k^{n-1} клик, и каждая клика (одномерная грань) содержится в $n-1$ двумерных гранях. Если в кликосочетании B нет близких параллельных клик, то $k^{n-1}(n-1)$ не меньше числа различных двумерных граней в гиперкубе Q_k^n, т. е. справедливо неравенство

$$k^{n-1}(n-1) \leq \frac{n(n-1)}{2} k^{n-2},$$

из которого следует утверждение (a). Это неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда совершенное кликосочетание без близких параллельных клик является точным. Отсюда имеем (b).

Утверждение 5. *Если в Q_k^n существует точное кликосочетание, то $n = 4m$, $k = 2m$, m натуральное.*

Доказательство. Покажем, что точное кликосочетание содержит равное количество клик каждого из направлений. Пусть z_i — число клик направления i, $i \in \{1, \dots, n\}$, в точном кликосочетании $B \subset \widetilde{Q}_k^n$. Число двумерных граней в гиперкубе Q_k^n одинаково для каждой пары направлений и равно k^{n-2}. Имеем систему из $\frac{n(n-1)}{2}$ линейных уравнений $z_i + z_j = k^{n-2}$, где $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Нетрудно видеть, что соответствующая однородная система имеет единственное (нулевое) решение при $n \geq 3$. Поэтому исходная неоднородная система имеет единственное решение $z_i = \frac{k^{n-2}}{2}$ при любом $i \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку z_i — целое число, то k делится на 2; $n = 2k$ из утверждения 4(b). $\square$

Перейдем к построению точных кликосочетаний в Q_k^n при $k = 2^t$ и $n = 2^{t+1}$. Занумеруем произвольным образом элементы поля Галуа $x_i \in GF(2^{t+1})$ числами из множества $i \in \{1, \dots, n\}$. Поле Галуа $GF(2^{t+1})$ можно рассматривать как $(t+1)$-мерное векторное пространство над полем $GF(2)$. Выберем в этом векторном пространстве произвольный базис $\{b_1, \dots, b_{t+1}\}$. Элементам множества $Q_k = \{0, \dots, 2^t - 1\}$ поставим во взаимно однозначное соответствие элементы линейной оболочки векторов $\{b_1, \dots, b_t\}$ в $GF(2^{t+1})$. Ниже с целью упрощения формул будем отождествлять элементы множества Q_k с соответствующими элементами $GF(2^{t+1})$. Зададим функцию $f : Q_k^n \to \{1, \dots, n\}$ равенством

$$f(a_1, \dots, a_n) = l, \quad \text{где } x_l = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i}{b_{t+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \tag{6}$$

(все арифметические операции производятся в $GF(2^{t+1})$).

Теорема 2. *Функция f, определенная формулой (6), является точным кликосочетанием.*

Доказательство. Поскольку b_{t+1} не содержится в линейной оболочке множества $\{b_1, \dots, b_t\}$, знаменатель в выражении (6) не обращается в нуль. Следовательно, функция f определена всюду на Q_k^n.

Покажем, что f определяет кликосочетание. Достаточно доказать, что из равенства $f(a_1, \dots, a_l, \dots, a_n) = l$ следует, что $f(a_1, \dots, a_{l-1}, c, a_{l+1}, \dots, a_n) = l$ для любого $c \in Q_k$. Из (6) имеем

$$x_l \left(b_{t+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i.$$

Прибавив к правой и левой частям последнего равенства величину $x_l(c - a_l)$, получаем, что $f(a_1, \dots, a_{l-1}, c, a_{l+1}, \dots, a_n) = l$.

Покажем, что кликосочетание f не содержит близких параллельных клик, т. е. для любого $c \in Q_k$, $c \neq a_m$, и $m \neq l$ имеем $f(a_1, \dots, a_{m-1}, c, a_{m+1}, \dots, a_n) \neq l$, когда $f(a_1, \dots, a_l, \dots, a_n) = l$. Предположим, что

$$f(a_1, \dots, a_{m-1}, c, a_{m+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_l, \dots, a_n) = l.$$

Тогда из (6) имеем равенства

$$x_l \left(b_{t+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i,$$

$$x_l(c - a_m) + x_l \left(b_{t+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + x_m(c - a_m).$$

Вычитая из второго равенства первое, имеем $x_l(c - a_m) = x_m(c - a_m)$. Если $a_m \neq c$, то $x_m = x_l$. Пришли к противоречию.

Из утверждения 4(b) следует, что кликосочетание f точное. $\square$

При $t = 1$ паросочетание, определяемое формулой (6), совпадает с построенным в [5].

Рассмотрим вопрос построения совершенных кликосочетаний без близких параллельных клик.

Утверждение 6. *При $k = 2^t$ и $n = 2^{t+1}$ (t натуральное) в гиперкубе Q_k^n существует разбиение множества клик $\widetilde{Q}_k^n$ на n точных кликосочетаний.*

Доказательство. Определим кликосочетание f_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, формулой

$$f_j(a_1, \dots, a_n) = l, \quad \text{где } x_l + x_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + x_j) a_i}{b_{t+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}.$$

По теореме 6 кликосочетания f_j являются точными при $j \in \{1, \dots, n\}$. Ясно, что из равенства $f_j(a_1, \dots, a_n) = f_{j'}(a_1, \dots, a_n)$ следует $x_j = x_{j'}$. Таким образом, набор $\{f_j\}_{j=1,\dots,n}$ представляет собой разбиение множества $\widetilde{Q}_k^n$ на непересекающиеся точные кликосочетания. $\square$

Утверждение 7. *При* $2 \le k \le 2^t$ *и* $n \ge 2^{t+1}$ *(*t *натуральное) в гиперкубе* Q_k^n *существует совершенное кликосочетание без близких параллельных клик.*

Доказательство. В утверждении 6 доказано, что при $m = 2^t$ существует разбиение множества $\widetilde{Q}_m^{2m}$ на $2m$ совершенных кликосочетания без близких параллельных клик. Представим произвольные m из этих $2m$ кликосочетаний в виде функций $f_0, \dots, f_{m-1} : Q_m^{2m} \to \{1, \dots, 2m\}$. Пусть $\varphi : Q_m^{n-2m} \to Q_m$ — некоторая $(n-2m)$-арная квазигруппа. Тогда функция $F : Q_m^{2m} \times Q_m^{n-2m} \to \{1, \dots, 2m\}$, заданная равенством

$$F(c_1, \dots, c_{2m}, a_1, \dots, a_{n-2m}) = f_{\varphi(a_1, \dots, a_{n-2m})}(c_1, \dots, c_{2m}),$$

соответствует совершенному кликосочетанию без близких параллельных клик в Q_m^n.

Пусть $k < 2m$. Тогда сужение $g = F|_{Q_k^n}$ также является совершенным кликосочетанием без близких параллельных клик. $\square$

Таким образом, остаются открытыми вопросы о существовании в Q_k^n точных кликосочетаний при $k = 2m$, $n = 4m$, где m не степень числа 2, и совершенных кликосочетаний без близких параллельных клик при k и n таких, что $2^{t-1} < k < 2^t$, $2k \le n < 2^{t+1}$.

Автор благодарит Н. Н. Токареву за постановку задачи о числе кликосочетаний и С. В. Августиновича за постановку задачи о существовании совершенных кликосочетаний без близких параллельных клик и многочисленные полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пережогин А. Л., Потапов В. Н.* О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 52–62.
2. *Егорычев Г. П.* Доказательство гипотезы Ван дер Вардена для перманентов // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 65–71.
3. *Минк Х.* Перманенты. М.: Мир, 1982.
4. *Кротов Д. С.* Индуктивные конструкции совершенных троичных равновесных кодов с расстоянием 3 // Пробл. передачи информ. 2001. Т. 37, № 1. С. 3–11.
5. *Hamburger P., Pippert R. E., Weakley W. D.* On a leverage problem in the hypercube // Networks. 1992. V. 22. P. 435–439.
6. *Svanström M.* A class of 1-perfect ternary constant-weight codes // Des. Codes Cryptography. 1999. V. 18, N 1–3. P. 223–230.
7. *Пережогин А. Л.* О специальных совершенных паросочетаниях в булевом кубе // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 4. С. 51–59.
8. *Hanani H.* On some tactical configurations // Canad. J. Math. 1963. V. 15. P. 702–722.
9. *Etzion T.* Optimal constant weight codes over Z_k and generalized designs // Discrete Math. 1997. V. 167. P. 55–82.
10. *Августинович С. В.* Многомерные перманенты в задачах перечисления // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 5. С. 3–5.
11. *Брэгман Л. М.* Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 1. С. 27–30.

Статья поступила 7 апреля 2010 г., окончательный вариант — 24 декабря 2010 г.

Потапов Владимир Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vpotapov@math.nsc.ru