Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.5

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

Д. В. Лыткина

Аннотация. Доказана локальная конечность периодической группы G, насыщенной прямыми произведениями элементарной абелевой 2-группы фиксированного порядка и простой группы $L_2(q)$ при условии, что G содержит элемент порядка 4.

Ключевые слова: группа, насыщенная группа из заданного множества, простая группа, периодическая группа.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество групп. Группа G называется *насыщенной* группами из $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа группы G содержится в подгруппе, изоморфной элементу из $\mathfrak{M}$. Структура периодических групп, насыщенных различными множествами групп, изучалась в [1–12].

Теорема 1. *Пусть $m \geq 0$ целое, G — периодическая группа, насыщенная группами вида $E \times R$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Если G содержит элемент порядка 4, то G является прямым произведением элементарной абелевой подгруппы порядка 2^m и подгруппы, изоморфной $L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

На самом деле теорема 1 является частным случаем следующего результата.

Теорема 2. *Пусть $m \geq 0$ целое, G — периодическая группа такая, что каждая конечная подгруппа группы G четного порядка содержится в подгруппе вида $F = E \times R$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Если G содержит элемент порядка 4, то G является прямым произведением элементарной абелевой подгруппы порядка 2^m и подгруппы, изоморфной группе $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле нечетной характеристики.*

Доказательство теоремы 2 использует строение 2-групп, каждая конечная подгруппа которых изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой группы.

Теорема 3. *Пусть каждая конечная подгруппа 2-группы T изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой группы. Тогда T изоморфна одной из следующих групп:*

(a) *элементарной абелевой 2-группе;*

(b) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и циклической 2-группы;*

(c) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы* $C = \left\langle c_i,\ i=1,2,\dots \mid c_1^2=1,\ c_{i+1}^2=c_i,\ i=1,2,\dots\right\rangle$;

(d) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и диэдральной 2-группы;*

(e) *прямому произведению элементарной абелевой 2-группы и группы* $D = \left\langle C, d \mid d^2=1,\ c_i^d = c_i^{-1}\right\rangle$.

В частности, T *локально конечна.*

Предварительные сведения

Лемма 1. *Пусть* $L \simeq L_2(q)$, *где* q *нечетно,* V — *нециклическая подгруппа порядка 4 группы* L *и* B — *подгруппа* L, *содержащая* V *и изоморфная* A_4.

(a) *Если* $q \geq 11$, *то* $L = \langle B, C_L(u)\rangle$ *для произвольной инволюции* $u \in L$.

(b) *Если* q *равно 7 или 9, то* $L = \langle N_L(V), C_L(u)\rangle$ *для любой инволюции* $u \in N_L(V) \setminus B$.

(c) *Для любой инволюции* $u \in L$ *группа* $C_L(u)$ *есть группа диэдра, содержащая силовскую 2-подгруппу группы* L.

(d) *Если* A — *максимальная элементарная абелева 2-подгруппа группы* L, *то* $|A| = 4$ *и либо* A — *силовская 2-подгруппа группы* L *и* $N_L(A) \simeq A_4$, *либо* $N_L(A) \simeq S_4$.

Доказательство следует из классификации подгрупп группы $L_2(q)$ (см. [13, II.8.27]).

Лемма 2 (В. П. Шунков). *Если периодическая группа* G *содержит конечную силовскую 2-подгруппу, то все силовские 2-подгруппы группы* G *сопряжены.*

Доказательство см. в [10, предложение 6].

Лемма 3. *Пусть* G — *объединение возрастающей цепочки* $L_1 < L_2 < \dots$ *групп, каждая из которых изоморфна* $L_2(q)$ *для некоторого нечетного* q. *Тогда* $G \simeq L_2(Q)$, *где* Q — *локально конечное поле нечетной характеристики.*

Доказательство. Это частный случай результата А. В. Боровика [14] (доказан без использования классификации конечных простых групп).

Лемма 4. *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Доказательство. Результат леммы является частью знаменитой теоремы В. П. Шункова [15].

2-Группы

Пусть выполнены условия теоремы 3. Если $x^2 = 1$ для всех $x \in T$, то выполнен п. (a) теоремы 3, поэтому можно считать, что T содержит элемент порядка 4. В процессе доказательства теоремы 3 мы часто будем использовать без упоминания следующие очевидные свойства конечных подгрупп группы T.

Лемма 5. *Пусть* P — *прямое произведение элементарной абелевой группы и группы диэдра.*

(a) *Если* $a \in P$ *и порядок* a *больше двух, то* $a^t = a^{\pm 1}$ *для любого* $t \in P$; *более того, если* $a^t = a^{-1}$, *то* t — *инволюция. В частности,* $\langle a\rangle \trianglelefteq P$.

(b) *Если* $a, b \in P$ *и порядки* a *и* b *больше двух, то* $ab = ba$, $\langle a\rangle$ *и* $\langle b\rangle$ *содержат общую инволюцию и* $\langle a, b\rangle = \langle c\rangle \times \langle d\rangle$ *для некоторого* c *и* d, *где* $d^2 = 1$.

Лемма 6. *Пусть $a \in T$ — элемент порядка 4 и $z = a^2$. Тогда все инволюции $t \in T$ перестановочны с z и нормализуют $\langle a\rangle$.*

Доказательство. Предположим противное. Выберем t так, что $tz \neq zt$ и порядок 2^r элемента tz как можно меньший. Очевидно, что $r \geq 2$. Если $r \geq 3$, то $(tz)^2 = tztz = z^t z$ — произведение инволюции $t_1 = z^t$ и z таких, что порядок $t_1 z$ равен $2^{r-1} \geq 2$ и, следовательно, $t_1 z \neq z t_1$, что противоречит выбору t.

Таким образом, порядок tz равен 4. Пусть $u = (tz)^2$. Ясно, что $z \neq u \in C_T(z)$. Поскольку $u\langle z\rangle$ и $a\langle z\rangle$ — инволюции в $C_T(z)/\langle z\rangle$, подгруппа $\langle u, a\rangle$ конечна. По предположению $a^u = a^{\pm 1}$ и, следовательно, a нормализует $Z = \langle u, z\rangle$. С другой стороны, Z — подгруппа индекса два в $\langle z, t\rangle$, поэтому tz тоже нормализует Z. Значит, aZ, tzZ — инволюции из $N_T(Z)/Z$ и, следовательно, $\langle a, tz\rangle = \langle a, t\rangle$ конечна, откуда $\langle a\rangle$ является t-инвариантной и $tz = zt$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если a — элемент порядка $2^s \geq 4$ из T, то $a^t = a^{\pm 1}$ для любой инволюции $t \in T$.*

Доказательство. Используем индукцию по s. Если $s = 2$, то заключение следует из леммы 6. Пусть $s > 2$. По индукции t нормализует a^2 и, значит, t, a — инволюции по модулю $\langle a^2\rangle$. Таким образом, $\langle t, a\rangle$ конечна, откуда $a^t = a^{\pm 1}$. Лемма доказана.

Пусть $A = \langle x \in T \mid x^2 \neq 1\rangle$.

Лемма 8. *Подгруппа A коммутативна.*

Доказательство. Пусть $x \in T$, $y \in T$ — элементы порядка $2^r \geq 4$ и $2^s \geq 4$ соответственно. Докажем индукцией по $r + s$, что $xy = yx$. Предположим вначале, что $r + s = 4$. По лемме 7 y^2 нормализует $\langle x\rangle$ и x^2 нормализует $\langle y\rangle$. Отсюда следует, что $B = \langle x^2, y^2\rangle \lhd \langle x, y\rangle$, и так как xB, yB — инволюции в $\langle x, y\rangle/B$, то $\langle x, y\rangle$ конечна. По предположению $\langle x, y\rangle$ абелева.

Теперь предположим, что $r \geq s$ и $r \geq 3$. По индукции $x^2 y = y x^2$. Если $s \geq 3$, то аналогично $y^2 x = x y^2$. В частности, $B = \langle x^2, y^2\rangle \lhd \langle x, y\rangle$, Bx, By — инволюции в группе $N_T(B)/B$, поэтому $\langle x, y\rangle$ конечна и, следовательно, абелева.

Если $s = 2$, то $y^2 x y^2 = x^{\pm 1}$ по лемме 7. В частности, $[x, y^2] \in \langle x^2, y^2\rangle$, и, значит, $\langle x^2, y^2\rangle \lhd \langle x, y\rangle$. Как и раньше, $\langle x, y\rangle$ конечна и, следовательно, абелева. Лемма доказана.

Лемма 9. *A — прямое произведение элементарной абелевой группы и группы, которая либо является циклической, либо изоморфна C.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ — элемент порядка 4, $z = a^2$ и $B = \{x \in A \mid x^2 = 1\}$. Тогда B — элементарная абелева группа и $z \in B$. Пусть M — максимальная подгруппа группы B, не содержащая z. Тогда $B = M \times \langle z\rangle$. Пусть $\overline{A} = A/M$.

Докажем, что $\bar{z} = zM$ — единственная инволюция в $\overline{A}$. Действительно, если xA — инволюция в $\overline{A}$, то $\langle x, a\rangle = \langle a\rangle \times \langle d\rangle$, где $d \in M$ и, следовательно, $\langle x, a\rangle M/M = \langle a\rangle M/M$ — циклическая группа с единственной инволюцией, равной zM.

Итак, $\overline{A}$ — (локально) циклическая 2-группа. Если $\overline{A}$ конечна, то пусть $\overline{A} = \langle \bar{c}\rangle$. Если $\bar{c} = cM$, то z — единственная инволюция в $\langle c\rangle$. Таким образом, $\langle c\rangle \cap M = 1$ и $A = \langle c\rangle \times M$, что и требовалось.

Пусть $\overline{A}$ бесконечна. Тогда $\overline{A} \simeq C$ и $\overline{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i$, где $\overline{A}_i = \langle \bar{x}_i \rangle$, $\bar{x}_1 \neq 1$, $\bar{x}_1^2 = 1$, $\bar{x}_i^2 = \bar{x}_i$ для $i \geq 1$. Пусть $\bar{x}_i = x_i M$, $x_i \in A$, и $c_i = x_{i+1}^2$. Так как $x_{i+2}^2 = x_{i+1} d$, $d \in M$, то $c_{i+1}^2 = x_{i+2}^4 = x_{i+1}^2 = c_i$ и пересечение $\widehat{C} = \langle c_i \mid i = 1, 2, \dots \rangle$ с M тривиально. С другой стороны, Mc/M содержит $\bar{x}_i$ для всех $i = 1, 2, \dots$, поэтому $Mc/M = \overline{A} = A/M$, т. е. $A = M \times \widehat{C}$. Лемма доказана.

Если $A = G$, то в силу леммы 9 G удовлетворяет п. (b) или п. (c).

Предположим, что $A \neq G$, и пусть $t \in G \setminus A$. По определению A элемент t — инволюция. По лемме 6 t централизует каждую инволюцию из A и $a^t = a^{\pm 1}$ для любого элемента a порядка, не меньшего 4. Если $a^t = a$, то at имеет порядок как минимум 4 и, следовательно, $at \in A$, что противоречит выбору t. Таким образом, $a^t = a^{-1}$, и, значит, t инвертирует каждый элемент из A с помощью сопряжения.

Если $\langle A, t \rangle = G$, то, очевидно, выполняются п. (d) или п. (e), поэтому будем считать, что $G \setminus \langle A, t \rangle$ включает элемент t_1. Как и ранее, t_1 — инволюция, и $a^{t_1} = a^{-1}$ для любого $a \in A$. Таким образом, $tt_1 \notin A$, откуда $a^{-1} = a^{tt_1} = a$ для любого $a \in A$. Поскольку A не элементарная, это невозможно. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 2.

Определим $\mathfrak{N}$ как множество всех подгрупп F группы G вида $F = E \times R$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Ясно, что $E = Z(F)$ и $R = [F, F]$ определены однозначно, поэтому для $F \in \mathfrak{N}$ положим $E(F) = Z(F)$ и $R(F) = [F, F]$. Для конечной подгруппы K группы G определим $\mathfrak{N}(K)$ как множество всех элементов множества $\mathfrak{N}$, содержащих K.

Пусть X — множество элементов порядка 4 группы G. Для $x \in X$ определим $\mathscr{A}(x)$ как множество всех подгрупп A группы G таких, что A — максимальная абелева подгруппа некоторой $F \in \mathfrak{N}(\langle x \rangle)$. Пусть $\mathscr{A} = \bigcup \{\mathscr{A}(x) \mid x \in X\}$.

Для $A \in \mathscr{A}$ положим $E(A) = Z(N_G(A))$, $B(A) = [N_G(A), N_G(A)]$ и $V(A) = O_2(B(A))$.

Лемма 10. *Пусть $A \in \mathscr{A}$. Тогда*

(a) *$C_G(A) = A$ и $N_G(A) = E(A) \times S(A)$, где $S(A) \simeq S_4$. В частности, $E(A)$ — элементарная абелева группа порядка 2^m, $B(A) = [S(A), S(A)] \simeq A_4$, $A = E(A) \times V(A)$, $|A| = 2^{m+2}$ и A — максимальная элементарная абелева подгруппа группы G.*

(b) *Если $A \in \mathscr{A}(x)$, где $x \in X$ и $A \leq F \in \mathfrak{N}(\langle x \rangle)$, то $E(A) = Z(F)$, $N_G(A) \leq F$, $B(A) \leq R(F)$ и $N_G(A) = N_F(V)$.*

Доказательство. (a) Пусть $b \in C_G(A)$, $B = \langle b, A \rangle$. Если $F_1 \in \mathfrak{N}(B)$, то $C_{F_1}(A)$ элементарная абелева, поэтому $b^2 = 1$. Значит, $C_G(A)$ — элементарная абелева 2-группа, которую в силу леммы 1(d) нормализует элемент y порядка 4 из $N_F(A)$. Пусть $c \in C_G(A)$. Тогда $C = \langle A, c, y \rangle$ — конечная 2-группа. Если $F_2 \in \mathfrak{N}(C)$, то F_2 содержит элемент порядка 4, откуда следует, что $R(F_2) \simeq L_2(q)$, где q нечетно. Из леммы 1(d) вытекает, что порядок каждой максимальной элементарной абелевой 2-подгруппы группы F_2 равен 2^{m+2}, поэтому A — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа группы F_2 и $c \in A$. Таким образом, $C_G(A) = A$ конечна и $N_G(A)$ тоже конечна. Пусть $F_3 \in \mathfrak{N}(N_G(A))$.

Так как $N_G(A)$ содержит элемент порядка 4, то $R(F_3) \simeq L_2(q)$, где q нечетно, и $N_G(A) = N_{F_3}(A) \simeq N_F(A)$ по лемме 1(d). Значит, $N_G(A) = N_F(A)$.

(b) Пусть $A \leq F \in \mathfrak{N}(\langle x \rangle)$ для некоторого $x \in X$. Тогда $F = Z(F) \times R$, где $R \simeq L_2(q)$, q нечетно, и $N_F(A) = N_G(A) = E(A) \times N_R(A \cap R)$. Из $Z(F) \leq Z(N_G(A)) = E(A)$ и $|Z(F)| = |E(A)| = 2^m$ следует, что $Z(F) = E(A)$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если E — элементарная абелева подгруппа из G и $N_G(E)$ содержит некоторый $x \in X$, то E конечна и $|E| \leq 2^{m+2}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть E_0 — подгруппа группы E порядка 2^{m+3}. Очевидно, $E_1 = \langle E_0, x \rangle$ конечна. Выберем $F \in \mathfrak{N}(E_1)$. Тогда $R(F) \simeq L_2(q)$, где q нечетно, и, следовательно, любая элементарная абелева подгруппа группы F имеет порядок не больше 2^{m+2}. Это противоречит выбору E_0. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $x \in X$ и $C = C_G(x)$. Тогда C — абелева группа, изоморфная прямому произведению элементарной абелевой группы порядка 2^m и (локально) циклической группы, $N_G(\langle x \rangle) = C\langle t \rangle$, где t — инволюция, инвертирующая каждый элемент из C посредством сопряжения, и $N_G(\langle x \rangle)$ содержит силовскую 2-подгруппу группы G.*

Доказательство. Выберем две инволюции $a, b \in C$. Тогда $B = \langle a, b, x \rangle$ — конечная группа и $B \leq F \in \mathfrak{N}(B)$. Ясно, что $x^2 \in R = R(F)$ и R содержит элемент порядка 4. По лемме 1(c) $R_0 = C_R(x^2)$ — диэдральная группа, $C_F(x^2) = E(F) \times R_0$ и $C_F(x) = E(F) \times U$, где U — циклическая группа индекса 2 в R_0.

В частности, $ab = ba$. Это означает, что подгруппа H, порожденная всеми инволюциями из C, является элементарной абелевой нормальной подгруппой группы C. Так как $x \in N_G(H)$, подгруппа H конечна по лемме 11.

По теореме 3 силовская 2-подгруппа S группы C совпадает с $H_0 \times Q$, где H_0 — подгруппа группы H индекса 2, Q содержит единственную инволюцию и каждая собственная подгруппа группы Q конечна. В частности, Q локально циклическая.

Докажем, что $S = O_2(C)$. Действительно, в противном случае $O_2(C)$ конечна и существует $n \geq 2$ такой, что $C \setminus O_2(C)$ содержит элемент y порядка 2^{n+1}, где $y^2 \in O_2(C)$. Для любого $c \in C$ элементы y и y^c являются инволюциями по модулю $O_2(C)$ и, значит, $K = \langle x, y, y^c, O_2(C) \rangle$ — конечная подгруппа. Если $F \in \mathfrak{N}(K)$, то K содержится в $C_F(x)$, которая коммутативна. Следовательно, $\langle y^c \mid c \in C \rangle$ — абелева 2-группа и $y \in O_2(C)$; противоречие.

Таким образом, $S \lhd C$ и C/S не содержит инволюций. Поскольку $x \in F \in \mathfrak{N}(K)$, существует инволюция t, для которой $x^t = x^{-1}$ и, следовательно, $N_G(\langle x \rangle) = C\langle t \rangle$.

Предположим, что для $c \in C$ подгруппа $S\langle c \rangle$ t-инвариантна. Поскольку S локально конечна, $K = \langle c, c^t, x, t \rangle$ конечна. Если $F \in \mathfrak{N}(K)$, то $c, c^t \in C_F(x)$ и из строения F следует, что $c^t = c^{-1}$. В частности, t действует без неподвижных точек на C/S сопряжением в G. Хорошо известно, что в этом случае C/S коммутативна, $S\langle c \rangle$ t-инвариантна для любого $c \in C$ (см., например, лемму 2 в [16]) и, значит, $c^t = c^{-1}$. Отсюда следует, что C абелева и, в частности, локально конечна.

Пусть P — подгруппа, состоящая из всех элементов нечетного порядка из C. Для доказательства леммы достаточно показать, что P локально циклическая. Пусть K — конечное множество элементов из P. Тогда $M = \langle K \rangle$ — конечная подгруппа нечетного порядка, а M — подгруппа централизатора $C_N(x)$, где $N \in \mathfrak{N}(\langle x, K\rangle)$. В силу леммы 1(c) K циклическая. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $x \in X$ и $z = x^2$. Тогда $C_G(z) = N_G(\langle x\rangle)$.*

Доказательство. Очевидно, $N_G(\langle x\rangle) \leq C_G(z)$. Предположим, что $c \in C_G(z)\backslash N_G(\langle x\rangle)$. Тогда $\langle x^c\rangle \neq \langle x\rangle$. Поскольку x^c и x — инволюции по модулю $\langle z\rangle$, подгруппа $\langle x^c, x\rangle$ конечна и, следовательно, содержится в элементе множества $\mathfrak{N}$. По лемме 1(c) x^c и x перестановочны. Это означает, что $K = \langle x^r \mid r \in \langle c\rangle\rangle$ — абелева c-инвариантная подгруппа и, значит, $M = \langle K, c\rangle = \langle x, c\rangle$ — конечная подгруппа в $C_G(z)$. Как и выше, по лемме 1(c) $\langle x\rangle \trianglelefteq M$ и, следовательно, $\langle x^c\rangle = \langle x\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $x, y \in X$ и $x^2y^2 = y^2x^2$. Тогда либо $x^2 = y^2$, либо $\langle x, y\rangle \simeq S_4 \times E$, где E — элементарная абелева группа порядка $n \leq 4$.*

Доказательство. Положим $K = \langle x^2, y^2\rangle$ и предположим, что $x^2 \neq y^2$. По лемме 13 $C_G(K) \leq N_G(\langle x\rangle) \cap N_G(\langle y\rangle)$. В частности, y^2 нормализует $\langle x\rangle$, и, следовательно, x нормализует K. Аналогично y нормализует K. Поскольку x и y — инволюции по модулю K, то $U = \langle x, y\rangle$ — конечная разрешимая группа. Пусть $F \in \mathfrak{N}(U)$. Тогда $K \leq R = R(F)$ и $U \leq N_F(K) = E(F) \times N_R(K)$. Таким образом, без потери общности можно считать, что $K = V$ и $V \times E(F) \in \mathscr{A}$. Заключение теперь следует из леммы 10.

Лемма 15. *Пусть $A \in \mathscr{A}$, u, v — инволюции группы A, $u \neq v$ и существуют элементы $x, y \in X$ такие, что $x^2 = u$, $y^2 = v$. Тогда $\langle u, v\rangle = V$, где $V = V(A)$, $C_G(V) = A$ и $N_G(V) = N_G(A)$.*

Доказательство. По лемме 13 $A \leq C_G(\langle u, v\rangle) \leq N_G(\langle x\rangle) \cap N_G(\langle y\rangle)$. Поскольку по лемме 12 квадрат каждого элемента порядка 4 из $N_G(\langle x\rangle)$ совпадает с u и аналогичное утверждение справедливо для $N_G(\langle y\rangle)$, $C_G(\langle u, v\rangle)$ не содержит элемента порядка 4, откуда A — силовская 2-подгруппа группы $C_G(\langle u, v\rangle)$. Снова по лемме 12 $A \triangleleft C_G(\langle u, v\rangle)$. Если c — элемент нечетного порядка из $C_G(\langle u, v\rangle)$, то по леммам 13 и 12 $c \in C_G(\langle x, y\rangle)$ и, значит, $K = \langle c, x, y\rangle$ — конечная подгруппа. Пусть $F \in \mathfrak{N}(K)$. Тогда $\langle c, u, v\rangle \leq R = R(F)$, $c \in C_R(\langle u, v\rangle) = \langle u, v\rangle$, откуда $c = 1$. Таким образом, $C_G(\langle u, v\rangle) = A$, $\langle x, y\rangle \leq N_G(A)$ и $\langle u, v\rangle = V$. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть $W \leq A \in \mathscr{A}$, $|W| = 4$ и $N_G(W)/C_G(W)$ содержит элемент порядка 3. Тогда $W = V(A)$.*

Доказательство. Положим $C = C_G(W)$, $N = N_G(W)$. По лемме 10 $C_G(A) = A$, и так как $W \leq A \leq C$, то A — максимальная элементарная абелева подгруппа группы C. Пусть T — силовская 2-подгруппа группы C, содержащая A. Если T — элементарная абелева, то $T = A$ по лемме 10 и, следовательно, по лемме 2 любая силовская 2-подгруппа группы C сопряжена с T. В силу замечания Фраттини $N = CN_N(A)$, откуда $N_N(A)\backslash C$ содержит элемент n нечетного порядка. По лемме 10 $W = [W, n] \leq [A, n] = V$ и, значит, $W = V$.

Таким образом, T содержит элемент порядка 4. Пусть $\mathscr{S}$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы C, содержащих элемент порядка 4. Докажем, что любой элемент множества $\mathscr{S}$ сопряжен с T в C.

По теореме 3 для каждого $T_1 \in \mathscr{S}$ существует единственная инволюция $i(T_1) \in T_1$ такая, что $i(T_1) = j^2$ для некоторого $j \in T_1$. Пусть $T_1 \in \mathscr{S}$, $u = i(T)$ и $v = i(T_1)$. Без потери общности можно считать, что $\langle u, v\rangle$ — 2-группа.

Если $u = v$, то T, T_1 — силовские 2-подгруппы группы $C_G(u) \cap C$. Поскольку $C_G(u)$ в силу лемм 13 и 12 является расширением абелевой 2-группы посредством группы, силовская подгруппа которой имеет порядок 2, то T и T_1 сопряжены в C.

Если $u \neq v$ и $uv = vu$, то существуют $a, b \in C_G(W)$ такие, что $a^2 = u$, $b^2 = v$ и по лемме 14 $\langle a, b\rangle \simeq S_4 \times B$, где B — элементарная абелева группа. Таким образом, существует элемент r порядка 3 в $C_G(W)$ такой, что $u = v^r$. В силу предыдущего абзаца T и T_1 сопряжены в C.

Если $uv \neq vu$, то пусть T_2 — силовская 2-подгруппа группы C, содержащая $\langle u, v\rangle$. Ясно, что T_2 содержит элемент порядка 4, $i = i(T_2) \in \langle u, v\rangle$ и $i \in Z(\langle u, v\rangle)$. В силу предыдущего абзаца T_2 сопряжена как с T, так и с T_1. Следовательно, T_1 сопряжена с T.

По замечанию Фраттини $N = CN_N(T)$. В частности, $N_N(T)$ содержит элемент n нечетного порядка, который нормализует, но не централизует W. Так как T локально конечна в силу теоремы 3, $T\langle n\rangle$ тоже локально конечна, откуда $K = \langle y, n, W\rangle$, где элемент y порядка 4 из T конечен. Зафиксируем $F \in \mathfrak{N}(K)$. Очевидно, что $W\langle n\rangle \leq R = R(F)$, и поскольку R содержит элемент порядка 4, для любой инволюции $w \in W$ существует $r \in R$, для которого $r^2 = w$. По лемме 15, $W = V$. Лемма доказана.

Пусть $A \in \mathscr{A}$ и u — инволюция из $B(A)$. Определим $\mathscr{F} = \mathscr{F}(A)$ как множество всех подгрупп $F \leq G$, удовлетворяющих следующим условиям: $F = E \times L$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m, $L \simeq L_2(q)$ для некоторого нечетного $q \geq 11$, F содержит A и элемент порядка 4, квадрат которого равен u.

Лемма 17. *Если $F, F_1 \in \mathscr{F}$, то $F_1 \leq F$ тогда и только тогда, когда $|C_{F_1}(u)|$ делит $|C_F(u)|$.*

Доказательство. Если $F_1 \leq F$, то, очевидно, $|C_{F_1}(u)|$ делит $|C_F(u)|$. Предположим, что $|C_{F_1}(u)|$ делит $|C_F(u)|$. Из лемм 13 и 12 следует, что $C_{F_1}(u) \leq C_F(u)$. По лемме 10 $B(A) \leq F_1 \cap F_2$. В силу леммы 1(a) $F = \langle B(A), C_F(u)\rangle \geq \langle B(A), C_{F_1}(u)\rangle = F_1$. Лемма доказана.

Лемма 18. *$\mathscr{F}(A)$ непусто для любого $A \in \mathscr{A}$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть u — инволюция из $V(A)$. По леммам 13 и 12 $C_G(u) = AU$, где U — локально циклическая группа, содержащая элемент порядка 4. Если U порядка 4, то в силу леммы 4 G локально конечна и, более того, конечна, что противоречит предположению теоремы. Пусть U_0 — подгруппа группы U такая, что $|U_0| > 4$ и $F \in \mathfrak{N}(AU_0)$. Тогда $u \in R(F)$ и $C_R(u)$ содержит подгруппу, изоморфную U_0. Таким образом, $R(F) \simeq L_2(q)$, где $q \geq 11$. Отсюда $F \in \mathscr{F}(A)$. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть $U = \langle F \mid F \in \mathscr{F}(A)\rangle$. Тогда $U = Z \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$, Q — локально конечное поле нечетной характеристики, централизатор каждой инволюции из L содержится в U и $C_G(L) = Z$.*

Доказательство. В силу лемм 13 и 12 $C = C_G(u)$ — произведение A и нормальной локально циклической группы, являющейся объединением возрастающей цепочки конечных циклических подгрупп. Поскольку $|C_{R(F)}(u)| > 8$ для любого $F \in \mathscr{F}(A)$, существует конечная подгруппа C_0 группы C, содержащая A, такая, что $|C_0 : A| > 4$. Пусть $C_0 < C_1 < \cdots$ — цепочка подгрупп, объединение которых равно C, и $F_0 \in \mathfrak{N}(C_0)$. Тогда $F \in \mathscr{F}$ и $C_{F_0}(u) \geq C_0$. Предположим, что определены $F_i \in \mathscr{F}$ такие, что $C_{F_i}(u) \geq C_i$. Пусть $F_{i+1} \in$

$\mathfrak{N}(\langle C_{F_i}(u), C_{i+1}\rangle)$. Тогда $F_{i+1} \in \mathscr{F}$ и по лемме 17 $F_i \leq F_{i+1}$. Если $R_i = [F_i, F_i]$, $i = 0, 1, \ldots$, то $R_0 \leq R_1 \leq \cdots$ — возрастающая цепочка подгрупп, каждая из которых изоморфна $L_2(q)$ для некоторого нечетного q. По лемме 3 $L = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} R_i$ изоморфна $L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля нечетной характеристики.

Очевидно, что $U_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ совпадает с $Z \times L$. Если теперь $F \in \mathscr{F}$, то $|C_F(u)|$ делит $|C_{F_i}(u)|$ для некоторого $i = 0, 1, \ldots$ и в силу леммы 17 $F \leq F_i \leq U_1$. Следовательно, $U \leq U_1$, и, значит, $U = U_1$.

Поскольку все инволюции из L сопряжены с u в L, то U содержит все централизаторы инволюций из L.

Последнее утверждение леммы следует из лемм 15 и 10.

Зафиксируем до конца доказательства некоторую $A \in \mathscr{A}$.

Лемма 20. *Если $L \cap L^g$, где $g \in G$, содержит инволюцию, то $L^g = L$.*

Доказательство. Предположим, что v — инволюция из $L \cap L^g$. Тогда $v^{g^{-1}} \in L$, и так как все инволюции из L сопряжены, существует $l \in L$ такой, что $v^{g^{-1}l} = v$ и, следовательно, $l^{-1}g \in C_G(v)$. Таким образом, по лемме 19 $l^{-1}g \in U \leq N_G(L)$ и $g \in N_G(L)$. Лемма доказана.

До конца доказательства сохраним обозначения из леммы 19.

Лемма 21. *Если $F \in \mathfrak{N}(A)$, то $F \leq U$.*

Доказательство. Пусть $F = E \times R$, где E — элементарная абелева 2-группа и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. По лемме 10 q нечетно и $E = Z(N_F(A)) \leq Z(N_G(A)) = Z \leq U$. Из $|E| = |Z|$ следует, что $E = Z$. Если $q \neq 5$, то в силу леммы 1 $R = \langle C_R(t) \mid t$ — инволюция из $N_R(A)\rangle \leq L$, откуда $F \leq U$. Тогда $q = 5$ и $N_R(A) \simeq A_4$. Пусть r — элемент порядка 3 в $N_R(A)$, t — инволюция из R такая, что $r^t = r^{-1}$, и s — инволюция из $N_L(A)$ такая, что $r^s = r^{-1}$. Ясно, что $t \neq s$, $ts \in C_G(r)$ и $\langle ts\rangle \neq \langle r\rangle$. Подгруппа $\langle r, t, s, Z\rangle$ конечна, т. е. содержится в подгруппе $F_1 = E_1 \times R_1$, где E_1 — элементарная абелева порядка 2^m и $R_1 \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Заметим, что $\langle r, s, Z\rangle \leq F$ и $r, s \in L$.

Пусть A_1 — максимальная элементарная абелева 2-подгруппа группы F_1, содержащая $\langle Z, s\rangle$. Так как $A_1 \leq C_G(s) \leq U$, порядок A_1 равен 2^{m+2}, в частности, q нечетно. Пусть $x \in L$ и $x^2 = s$. Тогда $\langle A_1, x\rangle \leq C_G(s)$, откуда $A_1 \leq N_G(x)$, $[A_1, x] \leq \langle s\rangle \leq A_1$ и $x \in N_G(A_1)$. По лемме 10 $C_G(A_1) = A_1$ и $N_G(A_1) \simeq Z_1 \times B$, где Z_1 — элементарная абелева 2-группа, $B \simeq S_4$. Очевидно, что

$$s = x^2 \in [B, B] \leq [F_1, F_1] = [R_1, R_1] = R_1.$$

Если $V_1 = A_1 \cap R_1$, то $V_1 \leq L$, $N_G(A_1) \leq F$ и, значит, $E_1 \leq U$.

Пусть $K = L \cap R_1$. Тогда $K \geq \langle N_{R_1}(U_1), r\rangle$, откуда $K \not\simeq A_4$. Предположим, что $K \neq R_1$. Если $x \in R_1 \setminus K$, то $K \cap K^x = L \cap L^x \cap R_1$, и поскольку $L^x \neq L$, то $K \cap K^x$ не содержит инволюции для любого $x \in R_1 \setminus K$ и, следовательно, K сильно вложена в R_1. Это невозможно, поэтому $R_1 \leq L$. Но тогда $t \in U$ и $R = \langle C_R(V), t\rangle \leq U$. Лемма доказана.

Лемма 22. *Если v — инволюция в группе L и F — конечная подгруппа, содержащая $\langle Z, v\rangle$, то $F \leq U$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $F \in \mathfrak{N}(\langle Z, v\rangle)$. Пусть $E = E(F)$, $R = R(F)$ и $A_1 = E \times V_1$, где $V_1 = A_1 \cap R$ — максимальная элементарная абелева подгруппа группы F. Тогда $v \in L \cap R$, $V_1 \leq L$, $E = Z(N_F(A_1)) = Z(N_G(A_1)) = Z$. По лемме 21 $F \leq U$. Лемма доказана.

Лемма 23. *Пусть $Z = E(A)$. Тогда $N_G(Z) = Z \times L$.*

Доказательство. В силу леммы 19 достаточно доказать, что $L \triangleleft N_G(Z)$. Предположим противное. Пусть $g \in N_G(Z) \setminus N_G(L)$. Тогда $L^g \cap L$ не содержит инволюций. Значит, $\langle Z, u, u^g\rangle$ — конечная подгруппа, содержащая $\langle Z, u\rangle$. По лемме 22 $u^g \in U$ и, значит, $u^g \in L$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 24. *$L \trianglelefteq G$, $G = U$.*

Доказательство. В противном случае существует $g \in G$ такой, что $u^g \notin L$ и $\langle u, u^g\rangle$ — конечная подгруппа, лежащая в $F \in \mathfrak{N}(\langle u, u^g\rangle)$.

Пусть $F = E \times R$, где $E = E(F)$, $R = R(F)$ и A_1 — максимальная абелева подгруппа группы F, содержащая u. Тогда

$$A_1 \leq C_G(u) \leq U, \quad [N_G(A_1), N_G(A_1)] = [N_F(A_1), N_F(A_1)] \leq F \cap L$$

и

$$E = Z(N_F(A_1)) \leq Z(N_G(A_1)) \leq Z(U).$$

Отсюда $E = Z$ и $F \in \mathfrak{N}(A)$. По лемме 21 $F \leq U$, $u^g \in L$; противоречие. Это завершает доказательство леммы и теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлепкин А. К.* О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
2. *Шлепкин А. К.* О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 2. С. 224–245.
3. *Шлепкин А. К.* О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 606–615.
4. *Созутов А. И., Шлепкин А. К.* О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 3. С. 433–447.
5. *Шлепкин А. К., Рубашкин А. Г.* О группах, насыщенных конечным множеством простых групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1397–1400.
6. *Шлепкин А. К., Рубашкин А. Г.* Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 114–125.
7. *Рубашкин А. Г., Филиппов К. А.* О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1388–1392.
8. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 520–535.
9. *Lytkina D. V.* Periodic groups saturated by the group $U_3(9)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. V. 4. P. 300–303.
10. *Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 394–399.
11. *Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^m)$ // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 166–175.
12. *Лыткина Д. В.* О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979. V. I.
14. *Боровик А. В.* Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 26–35.

15. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.

16. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.

Статья поступила 13 сентября 2010 г.

Лыткина Дарья Викторовна
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com