*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2011. Том 52, № 2*

*УДК 517.55*

# СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ, ДОСТАТОЧНЫЕ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

**А. М. Кытманов,**
**С. Г. Мысливец, В. И. Кузоватов**

**Аннотация.** Рассматриваются непрерывные функции, заданные на границе ограниченной области $D$ в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, и обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в область $D$ в зависимости от размерности и расположения семейств комплексных прямых.

**Ключевые слова:** голоморфное продолжение, интеграл Бохнера — Мартинелли, гармоническая функция.

nce of holomorphic continuation of such functions in a domain $D$ depending on dimension and location of the families.

## Введение

Статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций $f$, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, получен М. Л. Аграновским и Р. Э. Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А. М. Кытмановым (см. [3]), применившим интеграл Бохнера — Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера — Мартинелли, Коши — Фантаппье, логарифмического вычета) оказалась полезной при

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00844), вторым автором — при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7347.2010.1).

изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения (см. обзор в [4]).

Вопрос о нахождении различных семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения, поставлен в [5]. Ясно, что семейство комплексных прямых, проходящих через одну точку, не является достаточным. Как показано в [6], семейство всех комплексных прямых, проходящих через конечное число точек, также, вообще говоря, не является достаточным. Таким образом, простых аналогов теоремы Гартогса ожидать не следует.

В работе [6] доказано, что семейство комплексных прямых, пересекающее росток порождающего многообразия $\gamma$, является достаточным для голоморфного продолжения. Различные другие семейства приведены в работах [7–10]. Отметим здесь работы [8, 10], в которых показано, что семейство комплексных прямых, проходящих через некоторым образом расположенное конечное число точек, является достаточным для голоморфного продолжения. Правда, это утверждается только для вещественно аналитических функций, заданных на границе шара.

В данной статье рассмотрены семейства комплексных прямых, проходящих через росток комплексной гиперповерхности, росток порождающего многообразия на комплексной гиперповерхности и росток вещественно аналитического многообразия вещественной размерности $n-1$. В частности, в $\mathbb{C}^2$ это может быть любая вещественно аналитическая кривая.

## 1. Предварительные результаты

Рассмотрим ограниченную односвязную область $D \subset \mathbb{C}^n$ со связной границей $\partial D$ класса $\mathscr{C}^2$. Точки пространства $\mathbb{C}^n$ будем обозначать через $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и т. д. Для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$ введем соответственно скалярное произведение и модуль

$$\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k, \quad |z| = \sqrt{\langle z, \bar{z}\rangle}$$

($\bar{z}$ — это вектор, сопряженный к $z$).

Пусть $\varGamma$ — росток комплексного многообразия размерности $n-1$ в $\mathbb{C}^n$, лежащий вне $\overline{D}$ (черта над множеством $\overline{D}$ означает замыкание множества $D$). Делая сдвиг и унитарное преобразование, можно считать, что $0 \in \varGamma$, $0 \notin \overline{D}$ и в некоторой окрестности $U$ точки 0 комплексная гиперповерхность $\varGamma$ имеет вид

$$\varGamma = \{z \in U : z_n = \varphi(z'),\ z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})\},$$

где $\varphi$ — голоморфная функция в окрестности нуля в $\mathbb{C}^{n-1}$ и $\varphi(0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(0) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.

В дальнейшем будем считать, что существует направление $b^0 \neq 0$ такое, что

$$\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle \neq 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \overline{D}. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_\varGamma$ множество комплексных прямых вида

$$l = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1, \ldots, n,\ t \in \mathbb{C}\}, \tag{2}$$

проходящих через точку $z \in \varGamma$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление $b$ определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $\partial D \cap l$ представляет собой набор конечного числа кусочно гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \varnothing$).

Будем говорить, что функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых* $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$ *вида* (2), если для любой прямой $l \in \mathfrak{L}_\Gamma$ такой, что $\partial D \cap l \neq \varnothing$, существует функция $f_l$ со следующими свойствами:

1) $f_l \in \mathscr{C}(\overline{D} \cap l)$,

2) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$,

3) функция $f_l$ голоморфна во внутренних (относительно топологии $l$) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Рассмотрим ядро Бохнера — Мартинелли

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ выбрасыванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

Для функции $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ определим интеграл (типа) Бохнера — Мартинелли

$$F(z) = \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D. \tag{3}$$

Функция $F(z)$ является гармонической вне $\partial D$ и стремится к нулю при $|z| \to \infty$.

Сформулируем лемму 1 из работы [6].

**Лемма 1** [6]. *Если для точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и для всех комплексных прямых, проходящих через точку $z^0$, функция $f(z)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то $F(z^0) = 0$ и ее производные по $z$ любого порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ равны нулю, т. е.*

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z^0) = \frac{\partial^{\|\alpha\|} F}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}(z^0) = 0,$$

*где $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.*

Из леммы 1 получаем

**Предложение 1.** *Если функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, то для любого мультииндекса $\alpha$ выполняется*

$$F|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}\right|_\Gamma = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим ядро вида

$$U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - w_k}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^n}\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta$$

и интеграл

$$\varPhi(z, w) = \int_{\partial D_\zeta} f(\zeta) U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w). \tag{5}$$

Ясно, что функция $\varPhi(z, w)$ является голоморфной в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^{2n}$, поскольку $0 \notin \overline{D}$.

**Лемма 2.** *Пусть область $D$ односвязна и удовлетворяет условию* (1). *Тогда существует неограниченное открытое и связное множество $\Omega \subset \mathbb{C}^{2n}$, $(0,0) \in \Omega$, в которой функция $\Phi(z,w)$ определена и голоморфна, а также существуют $\varepsilon > 0$, $R > 0$ такие, что точки вида $(tb, w)$ принадлежат $\Omega$ при $|w| < \varepsilon$, $|b - b^0| < \varepsilon$ и $|t| > R$ $(t \in \mathbb{C})$.*

Доказательство. Рассмотрим знаменатель ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, tb^0, w)$:

$$\psi = \langle \zeta - tb^0, \bar{\zeta} - w\rangle = |\zeta|^2 - \langle \zeta, w\rangle - t\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle + t\langle b^0, w\rangle.$$

Найдем условия, при которых $\psi \neq 0$. Пусть

$$\max_{\overline{D}} |\zeta| = M, \quad \min_{\overline{D}} |\zeta| = m > 0, \quad \min_{\overline{D}} |\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle| = c > 0.$$

Тогда при $|w| < \varepsilon$ имеем

$$|\langle b^0, w\rangle| \leqslant |b^0| \cdot |w| \leqslant \varepsilon |b^0|, \quad |\langle \zeta, w\rangle| \leqslant M\varepsilon.$$

Приравнивая $\psi$ к нулю, получим

$$t = \frac{|\zeta|^2 - \langle \zeta, w\rangle}{\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle - \langle b^0, w\rangle}. \tag{6}$$

Оценим числитель в (6) для $\zeta \in \overline{D}$:

$$||\zeta|^2 - \langle \zeta, w\rangle| \geqslant |\zeta|^2 - |\langle \zeta, w\rangle| \geqslant m^2 - M\varepsilon > 0$$

при $\varepsilon < \frac{m^2}{M}$. Оценим также знаменатель в (6) для $\zeta \in \overline{D}$:

$$|\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle - \langle b^0, w\rangle| \geqslant |\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle| - |\langle b^0, w\rangle| \geqslant c - |b^0|\varepsilon > 0$$

при $\varepsilon < \frac{c}{|b^0|}$.

Таким образом, при $|w| \leqslant \varepsilon$ (где $\varepsilon$ удовлетворяет обоим неравенствам) образ $\overline{D}$ при отображении $\frac{|\zeta|^2 - \langle \zeta, w\rangle}{\langle b^0, \bar{\zeta}\rangle - \langle b^0, w\rangle}$ есть некоторый компакт $K_{b^0,\varepsilon}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащий точку 0. Так как $D$ односвязна, дополнение $K_{b^0,\varepsilon}$ связно, т. е. 0 лежит в неограниченной компоненте дополнения.

Следовательно, при $t \notin K_{b^0,\varepsilon}$ функция $\psi$ ненулевая. В частности, это так при $t = 0$, $|w| \leqslant \varepsilon$ и при $|t| > R$, где $R$ достаточно велико. Ясно, что для всех $b$ с $|b - b^0| < \varepsilon$ эти рассуждения остаются верными при уменьшении, если это нужно, $\varepsilon$. Так что существование области $\Omega$ обеспечено. $\square$

Из леммы 2 и вида ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ следует, что функция $\Phi(z,w)$ и все ее производные стремятся к нулю при $|z| \to \infty$, $|w| \to \infty$ и $(z,w) \in \Omega$. Отметим, что $\Phi(z, \bar{z}) = F(z)$ и $\frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial z^\alpha}\Big|_{w=\bar{z}} = \frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}$.

Введем дифференциальный оператор в $\mathbb{C}^{2n}$:

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \Delta_{\mathbb{C}}(z,w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial w_k}.$$

При $w = \bar{z}$ получим оператор Лапласа $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}$.

Обозначим через $\Gamma_{\mathbb{C}}$ комплексное многообразие в $\mathbb{C}^{2n}$ вида

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = \{(z,w) \in U \times U : z_n = \varphi(z'),\ w_n = \overline{\varphi(\overline{w'})}\}.$$

Выбирая $U$ достаточно малой, можно считать, что функция $\Phi(z,w)$ определена и голоморфна в $U \times U$. При $w = \bar{z}$ получим, что $\Gamma_{\mathbb{C}} = \Gamma$ или $\Gamma_{\mathbb{C}}|_{w=\bar{z}} = \Gamma$.

**Предложение 2.** *Если для функции $F(z)$ справедливы равенства (4), то для функции $\Phi(z,w)$ верны соотношения*

$$\Phi|_{\Gamma_{\mathbb{C}}} = 0, \quad \frac{\partial^\alpha \Phi}{\partial z^\alpha}\bigg|_{\Gamma_{\mathbb{C}}} = 0 \tag{7}$$

*для всех мультииндексов $\alpha$.*

Доказательство. Многообразие $M = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{2n} : w = \bar{z}\}$ является порождающим в $\mathbb{C}^{2n}$, т. е. для каждой точки $(z,w) \in M$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(M)$ совпадает с касательным пространством $T_z(\mathbb{C}^{2n})$. Действительно, записав $M$ в виде

$$\{(z,w) : \operatorname{Re}(z_j - w_j) = 0,\ \operatorname{Re}(i(z_j + w_j)) = 0,\ j = 1,\dots,n\}$$

и сделав невырожденное комплексное линейное преобразование $\tilde{z}_j = z_j - w_j$, $\widetilde{w}_j = i(z_j + w_j)$, $j = 1,\dots,n$, многообразие $M$ перепишем в виде

$$M = \{(\tilde{z},\widetilde{w}) : \operatorname{Re}\tilde{z}_j = 0,\ \operatorname{Re}\widetilde{w}_j = 0,\ j = 1,\dots,n\}.$$

Так что в новых координатах $M$, очевидно, порождающее в $\mathbb{C}^{2n}$. Так как при голоморфных преобразованиях свойство порождаемости не изменяется, $M$ порождающее и в старых координатах. Тогда очевидно, что подмногообразие $\{(z,w) \in M : z_n = 0,\ w_n = 0\}$ является порождающим в многообразии $\{(z,w) \in \mathbb{C}^{2n} : z_n = 0,\ w_n = 0\}$. Следовательно, многообразие $\Gamma$, записанное в виде

$$\{(z,w) \in M \cap (U \times U) : z_n = \varphi(z'),\ w_n = \overline{\varphi(\overline{w}')}\},$$

является порождающим в $\Gamma_{\mathbb{C}}$. Здесь опять пользуемся утверждением, что при голоморфных преобразованиях свойство порождаемости не изменяется.

Для доказательства предложения остается воспользоваться утверждением, что порождающее многообразие является множеством единственности для голоморфных функций [11, предложение]. $\square$

**Лемма 3.** *Ядро $U_{\mathbb{C}}(\zeta,z,w)$ удовлетворяет соотношению*

$$\Delta_{\mathbb{C}}(z,w) U_{\mathbb{C}}(\zeta,z,w) = 0$$

*вне нулей знаменателя этого ядра.*

Доказательство. Достаточно проверить это равенство для функции вида $1/\left(\sum\limits_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n-1}$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n-1}}\right) = \frac{(n-1)(\zeta_k - z_k)}{\left(\sum\limits_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n}},$$

то

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial w_k}\left(\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{(n-1)(\zeta_k - z_k)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n}}\right)$$

$$= (1-n)\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n} - n(\zeta_k - z_k)(\bar{\zeta}_k - w_k)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n-1}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{2n}}$$

$$= \frac{(1-n)\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j) - n(\zeta_k - z_k)(\bar{\zeta}_k - w_k)\right)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\Delta_{\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{(1-n)n\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j) - \sum\limits_{k=1}^{n}(\zeta_k - z_k)(\bar{\zeta}_k - w_k)\right)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j)\right)^{n+1}} = 0. \quad \square$$

**Лемма 4.** *Функция $\Phi(z, w)$ в своей области определения удовлетворяет равенству $\Delta_{\mathbb{C}}\Phi(z, w) = 0$.*

**Лемма 5.** *Для голоморфных функций $h$ и $g$ в $\mathbb{C}^{2n}$ справедливо соотношение*

$$\Delta_{\mathbb{C}}(h \cdot g) = h\Delta_{\mathbb{C}}g + g\Delta_{\mathbb{C}}h + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial z_k}\,\frac{\partial g}{\partial w_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial w_k}\,\frac{\partial g}{\partial z_k}.$$

Сделаем голоморфную замену переменных в окрестности точки $(0,0) \in \mathbb{C}^{2n}$:

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1} = u_{n-1}, \\ z_n = u_n + \varphi(u'), \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 = v_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ w_{n-1} = v_{n-1}, \\ w_n = v_n + \overline{\varphi(\bar{v}')}. \end{cases}$$

Пусть $U^*$ — образ окрестности $U$ при такой замене.

Обратная замена переменных выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_1 = z_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1} = z_{n-1}, \\ u_n = z_n - \varphi(z'), \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = w_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{n-1} = w_{n-1}, \\ v_n = w_n - \overline{\varphi(\bar{w}')}. \end{cases}$$

При этой замене $\Gamma_{\mathbb{C}}$ перейдет в часть плоскости

$$\Gamma^*_{\mathbb{C}} = \{(u, v) \in U^* \times U^* : u_n = 0,\ v_n = 0\}.$$

При $v = \bar{u}$ плоскость $\varGamma^*_{\mathbb{C}}$ перейдет в часть гиперплоскости

$$\varGamma^* = \{u \in U^* : u_n = 0\}.$$

**Лемма 6.** *Пусть $\varPhi^*(u, v) = \varPhi(z(u), w(v))$. Равенства* (7) *можно переписать в виде*

$$\varPhi^*|_{\varGamma^*_{\mathbb{C}}} = 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^\alpha \varPhi^*}{\partial u^\alpha}\right|_{\varGamma^*_{\mathbb{C}}} = 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\beta'} \varPhi^*}{\partial u^\alpha \partial v^{\beta'}}\right|_{\varGamma^*_{\mathbb{C}}} = 0 \tag{10}$$

*для всех мультииндексов $\alpha$ и мультииндексов $\beta'$ вида $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0)$.*

Доказательство. Равенство (8) очевидно. Поскольку производные функции $\varPhi^*$ по переменным $u_j$, $j = 1, \dots, n$, выражаются только через производные функции $\varPhi$ по $z_k$, $k = 1, \dots, n$, из (7) получаем равенство (9). Из равенств (8), (9) и вида плоскости $\varGamma^*_{\mathbb{C}}$ следует равенство (10). □

Рассмотрим разложение функции $\varPhi^*(u, v)$ в ряд Тейлора по переменной $v_n$ в точке $v_n = 0$:

$$\varPhi^*(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varPhi^*(u, v', 0)}{\partial v_n^k}\, v_n^k. \tag{11}$$

**Лемма 7.** *Пусть для функции $\varPhi^*(u, v)$ выполнены условия* (8)–(10), *тогда в ряде* (11) *коэффициент $\varPhi^*(u, v', 0)$ нулевой, поэтому $\varPhi^*(u, v) = v_n \varPsi(u, v)$.*

Доказательство. Разложим функцию $\varPhi^*(u, v)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$ по переменным $u$ и $v$:

$$\varPhi^*(u, v) = \sum_{\|\alpha\| \geqslant 0,\, \|\beta\| \geqslant 0} c_{\alpha,\beta} u^\alpha v^\beta,$$

где $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}$, $v^\beta = v_1^{\beta_1} \dots v_n^{\beta_n}$. Покажем, что в этом ряде отсутствуют мономы вида $c_{\alpha,\beta'} u^\alpha v^{\beta'}$, где $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0)$. Действительно, если $c_{\alpha,\beta'} \neq 0$, то, применяя к функции $\varPhi^*(u, v)$ дифференциальный оператор $\frac{\partial^{\alpha+\beta'}}{\partial u^\alpha \partial v^{\beta'}}$ и подставляя $u_n = 0$, $v_n = 0$, получим степенной ряд по переменным $u'$, $v'$ с не равным нулю свободным членом. Это противоречит равенствам (8)–(10). □

## 2. Достаточные семейства, связанные с комплексной гиперповерхностью

**Теорема 1.** *Если функция $\varPhi(z, w)$ удовлетворяет условиям* (7), *то $\varPhi(z, w) \equiv 0$ в окрестности точки* $(0, 0)$.

Доказательство. Перейдем от $(u, v)$ к старым переменным $z$ и $w$. По лемме 7 получим разложение

$$\varPhi(z, w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varPhi^*}{\partial v_n^k}(u, v', 0) v_n^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (w_n - \overline{\varphi(\overline{w'})})^k \frac{\partial^k \varPhi}{\partial w_n^k}\big(z, w', \overline{\varphi(\overline{w'})}\big), \tag{12}$$

поскольку $\frac{\partial \varPhi^*}{\partial v_n} = \frac{\partial \varPhi}{\partial w_n}$. Применив к равенству (12) оператор $\Delta_{\mathbb{C}}$, получим

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta_{\mathbb{C}} \left[ (w_n - \overline{\varphi(\overline{w'})})^k \frac{\partial^k \varPhi}{\partial w_n^k}(z, w', \overline{\varphi(\overline{w'})}) \right].$$

После применения оператора $\Delta_{\mathbb{C}}$ полученный ряд перегруппируем по степеням $(w_n - \overline{\varphi(\overline{w}')})^k$, тогда

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (w_n - \overline{\varphi(\overline{w}')})^k c_k(z, w').$$

В силу единственности разложения в такой ряд все $c_k(z, w')$ тождественно равны нулю. Единственность разложения в данный ряд следует из того, что в новых переменных $u, v$ получаем степенной ряд по $v_n$, разложение в который обладает свойством единственности.

Вычислим последовательно $\Delta_{\mathbb{C}}$ от $(w_n - \overline{\varphi(\overline{w}')})^k \frac{\partial^k \Phi}{\partial w_n^k}$ начиная с $k = 1$. По лемме 5 имеем

$$\Delta_{\mathbb{C}}\left[(w_n - \overline{\varphi(\overline{w}')}) \frac{\partial \Phi}{\partial w_n}(z, w', \overline{\varphi(\overline{w}')})\right] = (w_n - \overline{\varphi(\overline{w}')}) \Delta_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}\right) + \frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}\right).$$

Отсюда

$$c_0(z, w') = \left(\frac{\partial}{\partial z_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_k} \frac{\partial}{\partial z_k}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}\right) \equiv 0. \tag{13}$$

Таким образом, при фиксированном $w'$ производные по направлению вектора $s = \left(-\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_1}, \dots, -\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_{n-1}}, 1\right)$ от функции $\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}(z, w', \overline{\varphi(\overline{w}')})$ тождественно равны нулю. Зафиксируем точку $(z^0, w'^0, \overline{\varphi(\overline{w}'^0)})$ в области $\Omega$ из леммы 2 такую, чтобы комплексная прямая

$$\left\{z : z_j = z_j^0 - \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_j}\, t,\ j = 1, \dots, n-1,\ z_n = z_n^0 + t,\ t \in \mathbb{C}\right\}$$

не пересекала $\overline{D}$ при достаточно малом $|w|$. Этого можно добиться, взяв $|z^0|$ достаточно большим (см. лемму 2).

В силу равенства (13) на комплексной прямой

$$l_{z^0,s} = \left\{(z, w'^0, \overline{\varphi(\overline{w}'^0)}) \in \mathbb{C}^n \times U : z_j = z_j^0 - \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_j}\, t,\ j = 1, \dots, n-1,\ z_n = z_n^0 + t,\ t \in \mathbb{C}\right\}$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_n}\right) = 0$$

при достаточно малых по модулю $t$. Область $\Omega$ выбрана в лемме 2 так, что функция $\Phi(z, w)$ голоморфна в $\Omega$, т. е. знаменатель ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ не обращается в нуль для всех $\zeta \in \overline{D}$ и всех $(z, w) \in \Omega$.

Рассмотрим этот знаменатель на прямой $l_{z^0,s}$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\zeta_j - z_j)(\bar{\zeta}_j - w_j^0) + (\zeta_n - z_n)(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\overline{w}'^0)}) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\zeta_j - z_j^0\right)\left(\bar{\zeta}_j - w_j^0\right) + \left(\zeta_n - z_n^0\right)(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\overline{w}'^0)}) + t\left(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\overline{w}'^0)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial w_j}\left(\bar{\zeta}_j - w_j^0\right)\right).$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\zeta_j - z_j^0\right)\left(\bar{\zeta}_j - w_j^0\right) + \left(\zeta_n - z_n^0\right)\left(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\overline{w}'^0)}\right) \neq 0$$

для всех $\zeta \in \overline{D}$. Так что значения этого выражения на комплексной плоскости при $\zeta \in \overline{D}$ и $w'$ из некоторой компактной окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ образуют компактное множество, не содержащее нуля. Можно считать (делая сдвиг по $z$), что $z^0 = 0$.

При $z^0 = 0$, $w'^0 = 0$ будет

$$t\left(\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\overline{w}'^0)} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial w_j}\left(\bar{\zeta}_j - w_j^0\right)\right) = t\bar{\zeta}_n.$$

Так как $\bar{\zeta}_n \neq 0$ на $\overline{D}$, значения выражения

$$\bar{\zeta}_n - \overline{\varphi(\overline{w}'^0)} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial w_j}\left(\bar{\zeta}_j - w_j^0\right)$$

на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ при $\zeta \in \overline{D}$ и $z$, $w'$ из некоторой компактной окрестности точки $(0, 0)$ также образуют компактное множество, не содержащее 0. Поэтому знаменатель ядра $U_{\mathbb{C}}(\zeta, z, w)$ на прямой $l_{z^0,s}$ может обратиться в 0 лишь для $t$, лежащих на некотором компакте комплексной плоскости, не содержащем нуля. Таким образом, вне этого компакта знаменатель не равен нулю, и, значит, функция $\Phi(z, w)$ голоморфна на комплексной прямой $l_{z^0,s}$, за исключением некоторого компакта $K_{z^0,s}$, не содержащего нуля. Так как дополнение этого компакта связно, то $(0, 0)$ лежит в неограниченной компоненте множества голоморфности $\Phi(z, w', 0)$ для всех $z$ и $w'$ из некоторой окрестности точки $(0, 0)$.

Следовательно, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}\right) = 0$ в $\mathbb{C} \setminus K_{z^0,s}$. Поэтому $\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\mathbb{C}\setminus K_{z^0,s}} = \mathrm{const}$. Из вида (5) функции $\Phi(z, w)$ получим, что $\Phi|_{\mathbb{C}\setminus K_{z^0,s}} \to 0$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\mathbb{C}\setminus K_{z^0,s}} \to 0$ при $|t| \to \infty$. Поэтому $\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\mathbb{C}\setminus K_{z^0,s}} = 0$, а следовательно, $\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}\Big|_{\mathbb{C}\setminus K_{z^0,s}} \equiv 0$ для всех $z^0$ и $w'$ из некоторой окрестности точки 0. Из леммы 2 следует, что функция $\frac{\partial\Phi}{\partial w_n}(z, w', 0)$ нулевая в неограниченной компоненте своей области определения.

Поэтому ряд (12) начинается с $k = 2$. Применяя такие же рассуждения для выражения $\Delta_{\mathbb{C}}\left[(w_n - \varphi(w'))^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial w_n^2}\right]$, получим, что $\frac{\partial^2\Phi}{\partial w_n^2}\Big|_{\mathbb{C}\setminus K_{z^0,s}} \equiv 0$, и т. д. □

**Следствие 1.** *Пусть функция $F(z)$ удовлетворяет условиям* (4). *Тогда $F(z) \equiv 0$ в окрестности точки нуль.*

**Теорема 2.** *Пусть $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ и для ее интеграла Бохнера — Мартинелли $F(z)$ выполняются условия* (4). *Тогда $f$ голоморфно продолжается в область $D$.*

Доказательство вытекает из следствия 1 и следствия 15.5 в [12].

**Теорема 3.** *Пусть $D$ — односвязная ограниченная область и выполнено условие* (1). *Если функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_{\Gamma}$, то функция $f$ голоморфно продолжается в область $D$.*

Доказательство следует из предложения 1 и теоремы 2.

Если $\Gamma$ является ростком комплексной гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$, то условие (1) становится лишним. Действительно, пусть $\widetilde{\Gamma}$ — комплексная гиперповерхность (комплексное многообразие размерности $(n-1)$) в $\mathbb{C}^n$ и $\Gamma=\widetilde{\Gamma}\cap U$. Поверхность $\widetilde{\Gamma}$ является связным неограниченным множеством в $\mathbb{C}^n$. По-прежнему $\Gamma$ не пересекает $\overline{D}$, но $\widetilde{\Gamma}$ может пересекать $\overline{D}$. Тогда $\widetilde{\Gamma}\cap D$ — относительно компактное открытое множество на $\widetilde{\Gamma}$. Пусть $\widetilde{\Gamma}\setminus(\widetilde{\Gamma}\cap\overline{D})$ связно. Предположим, что функция $f\in\mathscr{C}(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых $l\in\mathfrak{L}_\Gamma$. Тогда для интеграла Бохнера — Мартинелли $F$ выполнено предложение 1, т. е. верны равенства (4). В силу вещественной аналитичности данного интеграла это условие будет выполнено и на всем множестве $\widetilde{\Gamma}\setminus(\widetilde{\Gamma}\cap\overline{D})$. Поскольку оно не ограничено, найдутся точка $z^0\in\widetilde{\Gamma}$ и направление $b^0$ такие, что $\langle b^0,\bar{\zeta}-\bar{z}^0\rangle\neq 0$ для всех $\zeta\in\overline{D}$. Таким образом, приходим к нашим первоначальным условиям на область $D$, и росток $\widetilde{\Gamma}$ уже в окрестности точки $z^0$. Тем самым справедлива

**Теорема 4.** *Пусть $D$ — односвязная ограниченная область со связной гладкой границей, $\widetilde{\Gamma}$ — комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ с условием, что множество $\widetilde{\Gamma}\setminus(\widetilde{\Gamma}\cap\overline{D})$ связно и $\Gamma=\widetilde{\Gamma}\cap U$ не пересекает $\overline{D}$. Если функция $f$ принадлежит $\mathscr{C}(\partial D)$ и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\Gamma$, то функция $f$ голоморфно продолжается в область $D$.*

Условие (1) возникло не только из-за метода доказательства. Приведем следующий

Пример 1. Пусть $B=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:|z|^2+|w|^2<1\}$ — единичный шар, $\Gamma=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:w=0\}$ — комплексное многообразие. Оно совпадает со своей комплексной касательной плоскостью в каждой своей точке и пересекает $\overline{B}$.

Рассмотрим комплексные прямые, пересекающие $\Gamma$:

$$l_a=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:z=a+bt,\ w=ct,\ t\in\mathbb{C}\}. \tag{14}$$

Эти прямые проходят через точку $(a,0)\in\Gamma$. При $|a|<1$ точка $(a,0)$ принадлежит $B$, при $|a|>1$ точка $(a,0)$ не принадлежит $\overline{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $|b|^2+|c|^2=1$.

Пересечение $l_a\cap\partial B$ образует окружность

$$|t|^2+a\bar{b}\bar{t}+\bar{a}bt=1-|a|^2,\quad\text{или}\quad|t+a\bar{b}|^2=1-|c|^2|a|^2. \tag{15}$$

Это множество $l_a\cap\partial B$ непусто, если $|a|^2|c|^2<1$. Таким образом, на $l_a\cap\partial B$ выполнено условие

$$\bar{t}=\frac{1-|a|^2-\bar{a}bt}{t+a\bar{b}}. \tag{16}$$

Пусть

$$f_a(z,w)=(1-\bar{a}z)\frac{w^{k+2}}{\overline{w}},\quad k\in\mathbb{Z},\ k\geqslant 0.$$

Эта функция на $\partial B$ является гладкой функцией класса $\mathscr{C}^k$, поскольку отношение $\frac{w}{\overline{w}}$ ограничено, функция $\frac{w^2}{\overline{w}}$ непрерывна, а $\frac{w^{k+2}}{\overline{w}}$ — функция гладкости $\mathscr{C}^k$.

На множестве $l_a\cap\partial B$ функция $f_a$ равна

$$\frac{1-\bar{a}(a+bt)}{1-|a|^2-\bar{a}bt}\cdot(t+a\bar{b})\cdot(ct)^{k+2}=(t+a\bar{b})\cdot(ct)^{k+2}.$$

Таким образом, сужение функции $f_a$ голоморфно продолжается на множество $l_a \cap B$ для всех комплексных прямых $l_a$, проходящих через точку $(a, 0)$ и пересекающих $\overline{B}$.

Рассматривая произвольное конечное множество точек $(a_m, 0)$ с $|a_m| > 1$, $m = 1, \ldots, N$, и функцию

$$f(z, w) = \frac{w^{k+2}}{\overline{w}} \cdot \prod_{m=1}^{N} (1 - \bar{a}_m z),$$

получим, что $f$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых $l_{a_m}$, пересекающих $\overline{B}$. Тем не менее $f$ не продолжается голоморфно в шар $B$ с границы $\partial B$, поскольку очевидно, что $f$ не является $CR$-функцией на $\partial B$.

Для комплексных гиперповерхностей, лежащих в области, теоремы 3 и 4, вообще говоря, неверны.

Пример 2. Рассмотрим в шаре $B$ часть комплексного многообразия $\Gamma_1 = \{(z, w) \in B : w = 0\}$. Как показал Глобевник, функция $f_1 = \frac{w^{k+2}}{\overline{w}}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$) обладает одномерным свойством голоморфного продолжения с $\partial B$ вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_{\Gamma_1}$, гладкая на $\partial B$, но не продолжается голоморфно в $B$.

Действительно, так как для комплексных прямых вида (14) на $\partial B$ выполнено равенство (16), функция $f_1$ на $\partial B$ примет вид

$$f_1 = \frac{(t + a\bar{b})}{1 - |a|^2 - \bar{a}bt} \cdot (ct)^{k+2}.$$

Знаменатель данной дроби обращается в нуль в точке $t_0 = \frac{1-|a|^2}{\bar{a}b}$. Подставляя эту точку в выражение (15), получим

$$\frac{(1 - |a|^2)^2}{|a|^2 |b|^2} + 1 - |a|^2 > 0 \quad \text{при } |a| < 1.$$

Поэтому точка прямой $l_a$, соответствующая $t_0$, лежит вне шара $B$. Так что функция $f_1$ голоморфно продолжается в $l_a \cap B$.

## 3. Достаточные семейства, связанные с порождающим многообразием

Пусть $\gamma \subset \Gamma$, $0 \in \gamma$ и $\gamma$ является порождающим многообразием класса $\mathscr{C}^\infty$ в $\Gamma$, т. е. для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\gamma)$ совпадает с касательным пространством $T_z(\Gamma)$. Отметим, что действительная размерность $\gamma$ не меньше $n - 1$. Обозначим через $\mathfrak{L}_\gamma$ множество комплексных прямых, пересекающих $\gamma$.

**Теорема 5.** *Пусть $D$ и $\Gamma$ удовлетворяют условиям теоремы 3 или теоремы 4. Если функция $f$ принадлежит $\mathscr{C}(\partial D)$ и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\gamma$, то $f$ голоморфно продолжается в область $D$.*

Доказательство. Пусть $F(z)$ — интеграл вида (3), тогда по лемме 1 выполняются равенства

$$F(z) = 0, \quad \frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = 0 \tag{17}$$

для всех $z \in \gamma$ и мультииндексов $\alpha$. Делая опять замену переменных

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1} = u_{n-1}, \\ z_n = u_n + \varphi(u'), \end{cases}$$

получим, что $\Gamma$ перейдет в $\Gamma^* = \{u \in \mathbb{C}^n : u_n = 0\}$, а $\gamma$ — в порождающее многообразие $\gamma^* \subset \Gamma^*$. Поскольку производные по $u$ выражаются через производные такого же порядка по $z$, из условия (17) следует, что

$$F^*(u) = 0, \quad \frac{\partial^\alpha F^*}{\partial u^\alpha}(u) = 0, \quad u \in \gamma^*,$$

где $F^* = F(z(u))$.

Приведем лемму 2 из [4].

**Лемма 8.** *Если вещественно аналитическая функция $F$, заданная в окрестности $U$ порождающего многообразия $\gamma$, удовлетворяет условиям* (17), *то она равна нулю в $U$.*

Применим эту лемму к функциям $F^*(u', 0)$ и $\frac{\partial^{\alpha_n} F^*}{\partial u^{\alpha_n}}(u', 0)$, равным нулю на $\gamma^*$. Тогда $\frac{\partial^\alpha F^*}{\partial u^\alpha}(u) = 0$ на $\Gamma^*$. Делая в этих равенствах обратную замену, получим, что для функции $F$ выполняются условия (17) для $z \in \Gamma$.

Для завершения доказательства теоремы 5 остается применить теорему 3 или теорему 4. $\square$

Рассмотрим $\gamma$ — росток вещественно аналитического многообразия вещественной размерности $n-1$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Можно считать, что $0 \in \gamma$ и в некоторой окрестности $U$ точки 0 многообразие $\gamma$ имеет вид

$$\gamma = \{z \in U : z_j = \psi_j(t_1, \dots, t_{n-1}),\ t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in V,\ j = 1, \dots, n\}. \tag{18}$$

Функции $\psi_j(t)$ вещественно аналитические в окрестности $V$ точки $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\psi_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, и ранг матрицы Якоби равен $n-1$, т. е.

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(t_1, \dots, t_{n-1})} = n - 1. \tag{19}$$

Функции $\psi_j(t)$ в окрестности $V$ разлагаются в ряд Тейлора

$$\psi_j(t) = \sum_{\|\beta\| \geqslant 0} c_\beta t^\beta, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, $t^\beta = t_1^{\beta_1} \dots t_{n-1}^{\beta_{n-1}}$.

Рассмотрим комплексификацию $\Gamma$ многообразия $\gamma$, тогда $\Gamma$ имеет вид

$$\Gamma = \{z \in U : z_j = \tilde{\psi}_j(t_1, \dots, t_{n-1}),\ t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1},\ j = 1, \dots, n\},$$

где $\tilde{\psi}_j(t) = \sum\limits_{\|\beta\| \geqslant 0} c_\beta t^\beta$, $t \in \mathbb{C}^{n-1}$, $j = 1, \dots, n$. Условие (19) показывает, что $\Gamma$ — комплексное аналитическое многообразие размерности $(n-1)$ в $U$.

Покажем, что $\gamma$ является порождающим многообразием в $\Gamma$. Действительно, касательная плоскость $T_{z^0}(\gamma)$ в точке $z^0 \in \gamma$ имеет вид

$$T_{z^0}(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : z_j = z_j^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_k}(t^0)(t_k - t_k^0),\ t \in \mathbb{R}^{n-1},\ j = 1, \dots, n \right\},$$

где $\psi_j(t^0) = z_j^0$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим комплексную линейную оболочку $T_{z^0}(\gamma)$, которая, очевидно, будет иметь вид

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n : z_j = z_j^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial t_k}(t^0)\big(t_k - t_k^0\big),\ t \in \mathbb{C}^{n-1},\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Данное множество есть в точности $T_{z^0}(\mathit{\Gamma})$. Поэтому $\gamma$ является порождающим многообразием в $\mathit{\Gamma}$.

Будем, как и прежде, считать, что для области $D$ выполнено условие (1).

**Следствие 2.** *Пусть функция $f \in \mathscr{C}(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\gamma$, где $\gamma$ — росток вещественно аналитического многообразия вида* (18). *Тогда функция $f$ голоморфно продолжается в область $D$.*

Рассмотрим $l_0$ — комплексную прямую, проходящую через точку 0 и пересекающую область $D$. В $l_0$ возьмем росток $\mathscr{C}^\infty$ кривой $\tau$, содержащей точку нуль. Тогда $\tau$ является порождающим многообразием в $l_0$.

**Теорема 6.** *Пусть область $D \subset \mathbb{C}^n$ строго выпуклая с границей класса $\mathscr{C}^\infty$, и пусть функция $f \in \mathscr{C}^\infty(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства $\mathfrak{L}_\tau$. Тогда функция $f$ голоморфно продолжается в область $D$.*

Доказательство. Рассмотрим комплексную двумерную плоскость $\mathit{\Pi}_{\zeta_0}$, содержащую $l_0$ и проходящую через точку $\zeta^0 \in \partial D$. Пересечение $D \cap \mathit{\Pi}_{\zeta^0}$ является строго выпуклой областью в $\mathbb{C}^2$ с границей класса $\mathscr{C}^\infty$. Для области $D \cap \mathit{\Pi}_{\zeta^0}$ выполнены условия теоремы 5, поэтому функция $f$ голоморфно продолжается с $\partial D \cap \mathit{\Pi}_{\zeta^0}$ в $D \cap \mathit{\Pi}_{\zeta^0}$ до функции $F(z)$. Эта функция однозначно определена в $D$, поскольку пересечение двух разных плоскостей $\mathit{\Pi}_{\zeta^0}$ и $\mathit{\Pi}_{w^0}$ совпадает с $l_0$. Продолжение с $\partial D \cap l_0$ в $D \cap l_0$ дается интегралом Коши. Более того, функция $F(z)$ является функцией класса $\mathscr{C}^\infty$ в области $D$, так как ее голоморфное продолжение с $\partial D \cap \mathit{\Pi}_{\zeta^0}$ дается интегралом Бохнера — Мартинелли, бесконечно гладко зависящим от параметра. Выберем точку $z^0 \in D \cap l_0$, тогда функция $F(z)$ голоморфна в $D \cap l$, где $l$ — произвольная комплексная прямая, проходящая через точку $z^0$. Поскольку прямые $l$ и $l_0$ определяют некоторую двумерную плоскость $\mathit{\Pi}$, функция $F(z)$ голоморфна в $D \cap \mathit{\Pi}$. По теореме Форелли [13, теорема 4.4.5] функция $F(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки $z^0$. Следовательно, по теореме Гартогса о продолжении [14, теорема 1, п. 26] функция $F(z)$ голоморфна в области $D$. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Аграновский М. Л., Вальский Р. Э.* Максимальность инвариантных алгебр функций // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 1. С. 3–12.
2. *Stout E. L.* The boundary values of holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1977. V. 44, N 1. P. 105–108.
3. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
4. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions // J. Math. Sci. 2004. V. 120, N 6. P. 1842–1867.
5. *Globevnik J., Stout E. L.* Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1991. V. 64, N 3. P. 571–615.

6. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 545–551.
7. *Agranovsky M.* Propagation of boundary $CR$-foliations and Morera type theorems for manifolds with attached analytic discs // Adv. Math. 2007. V. 211, N 1. P. 284–326.
8. *Agranovsky M.* Holomorphic extension from the unit sphere in $\mathbb{C}^n$ into complex lines passing through a finite set // arxiv.org/abs/0910.3592.
9. *Baracco L.* Holomorphic extension from the sphere to the ball // arxiv.org/abs/0911.2560.
10. *Globevnik J.* Small families of complex lines for testing holomorphic extendibility // arxiv.org/abs/0911.5088.
11. *Пинчук С. И.* Граничная теорема единственности для голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 2. С. 205–212.
12. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
13. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
14. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

*Статья поступила 3 июня 2010 г.*

Кытманов Александр Мечиславович, Мысливец Симона Глебовна,
Кузоватов Вячеслав Игоревич
Сибирский федеральный университет, Институт математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
kytmanov@lan.krasu.ru, simona@lan.krasu.ru