Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.54

О $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$–НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. Го, С. Юй

Аннотация. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс конечных групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-*нормальной в* G, если в G существует нормальная подгруппа T такая, что HT — нормальная подгруппа в G и $(H \cap T)H_G/H_G$ содержится в $\mathfrak{F}$-гиперцентре $Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$ группы G/H_G. Получен ряд результатов о $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальных подгруппах. Эти результаты использованы для изучения строения некоторых групп.

Ключевые слова: конечная группа, $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальная подгруппа, максимальная подгруппа, сверхразрешимая группа, p-нильпотентная группа.

1. Введение

На протяжении статьи все группы считаются конечными и G обозначает конечную группу. Остальные обозначения и термины стандартны и заимствованы из [1, 2].

Свойство нормальности подгрупп играет важную роль в изучении конечных групп. Бакли [3] показал, что группа нечетного порядка сверхразрешима, если все ее минимальные подгруппы нормальны. Сринивасан [4] доказал, что группа G сверхразрешима, если в ней есть нормальная подгруппа N такая, что фактор-группа G/N сверхразрешима и все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы N нормальны в G. Рамадан [5] показал, что группа G сверхразрешима, если она разрешима и все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы $F(G)$ нормальны. Результаты из [3, 4] обобщены Вангом [6], который заменил нормальность c-нормальностью, условием более слабым, чем нормальность (подгруппа H группы G называется *c-нормальной*, если найдется нормальная подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$, где H_G обозначает максимальную нормальную подгруппу группы G, содержащуюся в H). Позже Янг и Го [7] ввели понятие $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-добавляемой подгруппы: подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-*добавляемой в* G, если в G существует нормальная подгруппа K такая, что $G = HK$ и $(H \cap K)H_G/H_G$ содержится в $\mathfrak{F}$-гиперцентре $Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$ группы G/H_G. Используя $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-добавляемые подгруппы, они получили некоторые обобщения перечисленных выше результатов. Развивая данное направление, мы предлагаем следующее новое понятие.

Определение 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп и H — подгруппа группы G. Группа H называется $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-*нормальной в* G, если в G существует нормальная подгруппа T такая, что HT — нормальная подгруппа в G и $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$.

Research is supported by NNSF of China (Grant #11071229).

Напомним, что для класса групп $\mathfrak{F}$ главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным* (см. [8] или [1, определение 2.4.3]), если $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Через $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G, т. е. произведение всех нормальных подгрупп группы G, G-главные факторы которых $\mathfrak{F}$-центральны. Хорошо известно, что 1) если $\mathfrak{F}$ — класс всех нильпотентных групп, то $\mathfrak{F}$-гиперцентр — это в точности гиперцентр $Z_\infty(G)$ группы G (см. [1, с. 89]); 2) если $\mathfrak{F}$ — класс всех сверхразрешимых групп, то главный фактор H/K группы G является $\mathfrak{F}$-гиперцентральным тогда и только тогда, когда $|H/K|$ — простое число. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*гиперцентральной в* G, если $H \leq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.

Очевидно, что нормальные подгруппы, c-нормальные подгруппы и $\mathfrak{F}_n$-добавляемые подгруппы являются $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальными в G для любого класса групп $\mathfrak{F}$, содержащего единичную группу. Например, если H — c-нормальная подгруппа группы G, то существует нормальная подгруппа K такая, что $G = HK$ и $(H \cap K)H_G/H_G = 1 \leq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$. С другой стороны, следующий пример показывает, что обратное неверно.

Пример 1.2. Пусть $S_3 = [Z_3]Z_2$ — симметрическая группа степени 3 и Z — группа порядка 5. Пусть $G = Z \wr S_3 = [K]S_3$ — стандартное сплетение, где K — база этого сплетения. Тогда Z_3K — нормальная подгруппа в G и $Z_3 \cap K = 1$. Группа Z_3 $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G для класса $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. Но, как несложно видеть, Z_3 не является ни нормальной, ни c-нормальной, ни $\mathfrak{U}_n$-добавляемой в G (это обосновывается, например, тем, что G — единственная нормальная подгруппа в G такая, что $Z_3G = G$ и $(Z_3)_G$=1, и поскольку единственная минимальная нормальная подгруппа K группы G не циклическая, $Z_3 \cap G = Z_3 \nleq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$).

Настоящая статья посвящена изучению свойств $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальных подгрупп и их использованию для новых характеризаций некоторых классов групп. В качестве приложений получены обобщения ряда известных результатов.

2. Предварительные сведения

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и каждая группа G содержит наименьшую нормальную подгруппу (называемую $\mathfrak{F}$-*корадикалом* и обозначаемую через $G^{\mathfrak{F}}$), фактор по которой лежит в $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если она содержит любую группу G, удовлетворяющую условию $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется S-*замкнутой* (S_n-*замкнутой*), если она содержит все подгруппы (все нормальные подгруппы) любой из содержащихся в ней групп.

Через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ мы обозначаем формации всех нильпотентных, сверхразрешимых и разрешимых групп соответственно. Хорошо известно, что $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ — S-замкнутые насыщенные формации. Через $[A]B$ обозначается полупрямое произведение двух групп A и B, где B — группа операторов на A.

Лемма 2.1 [9, лемма 2.1]. *Предположим, что $A \leq G$. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация и $Z = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.*

(1) *Если A нормальна в G, то $AZ/A \leq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/A)$.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ S-замкнута, то $Z \cap A \leq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$.*

(3) *Если $\mathfrak{F}$ S_n-замкнута и A нормальна в G, то $Z \cap A \leq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(A)$.*

(4) *Если $G \in \mathfrak{F}$, то $Z = G$.*

Лемма 2.2 [9, лемма 2.3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathfrak{F}$. Если E — циклическая группа, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Напомним, что группа G называется *q-замкнутой*, если силовская q-подгруппа группы G нормальна.

Лемма 2.3 [10, лемма 2.2]. *Пусть p и q — различные простые делители числа $|G|$ и P — нециклическая силовская p-подгруппа группы G. Если все максимальные подгруппы группы P (кроме одной) имеют q-замкнутое добавление в G, то G сама q-замкнута.*

Лемма 2.4 [11, лемма II.7.9]. *Пусть N — нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если $N \neq 1$ и $N \cap \Phi(G) = 1$, то N — прямое произведение некоторых минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-добавляемой в* G, если в G есть подгруппа $L \in \mathfrak{F}$ такая, что $G = HL$. Очевидно, имеет место следующая

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и H — подгруппа группы G. Предположим, что H имеет $\mathfrak{F}$-добавление в G.*

(1) *Если $N \trianglelefteq G$, то HN/N имеет $\mathfrak{F}$-добавление в G/N.*

(2) *Если $H \leq K \leq G$, то H имеет $\mathfrak{F}$-добавление в K.*

Следующая лемма также очевидна.

Лемма 2.6. *Предположим, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $\Phi(G) = 1$. Если N разрешима, то $N = O_p(G) = F(G) = C_G(N)$ для некоторого простого числа p.*

Лемма 2.7 [12, лемма 2.8]. *Пусть P — силовская p-подгруппа группы G, где p — наименьший простой делитель числа $|G|$. Если P — циклическая группа или если любая максимальная подгруппа группы P имеет $\mathfrak{U}$-добавление в G, то G разрешима.*

Лемма 2.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация и $H \leq K \leq G$.*

(1) *Группа H является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в G тогда и только тогда, когда в G есть нормальная подгруппа T такая, что HT — нормальная подгруппа в G, $H_G \leq T$ и $H/H_G \cap T/H_G \leq Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$.*

(2) *Предположим, что H нормальна в G. Если K является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в G, то K/H является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в G/H.*

(3) *Предположим, что H нормальна в G. Тогда для любой $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной подгруппы E группы G, удовлетворяющей условию ($|H|$,$|E|$)=1, группа HE/H — $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальная подгруппа в G/H.*

(4) *Если H является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в G и $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, то H является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в K.*

(5) *Если H является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в G, K — нормальная подгруппа в G и $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая формация, то H является $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в K.*

(6) *Если $G \in \mathfrak{F}$, то любая подгруппа группы G будет $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальной в G.*

Доказательство. (1) Допустим, что H — $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальная подгруппа в G, и пусть T — нормальная подгруппа группы G такая, что HT нормальна в G и $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$. Положим $T_0 = TH_G$. Тогда $HT_0 = HTH_G = HT$, $H_G \leq T_0$ и $T_0/H_G \cap H/H_G = (T_0 \cap H)/H_G = (H \cap T)H_G/H_G \leq Z_\infty^\mathfrak{F}(G/H_G)$. Обратное очевидно.

(2) Предположим, что K — $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальная подгруппа в G. Тогда по (1) в G есть нормальная подгруппа T такая, что KT — нормальная подгруппа в G, $K_G \leq T$ и $K/K_G \cap T/K_G \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/K_G)$. Поскольку $H \trianglelefteq G$ и $H \leq K$, выполнено включение $H \leq K_G$. Значит, $H \leq T$ и T/H — нормальная подгруппа в G/H. Очевидно, что KT/H — нормальная подгруппа в G/H. Так как $(T \cap K)/K_G \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/K_G)$, имеем $((T \cap K)/H)/(K_G/H) \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/H)/(K_G/H)) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/H)/(K/H)_{G/H})$. Следовательно,

$$(T/H)/(K/H)_{G/H} \cap (K/H)/(K/H)_{G/H} = (T/H)/(K_G/H) \cap (K/H)/(K_G/H) \\ = ((T \cap K)/H)/(K_G/H) \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/H)/(K/H)_{G/H}).$$

Отсюда следует, что K/H $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальна в G/H.

(3) Предположим, что H — нормальная подгруппа в G и E — $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальная подгруппа в G, причем $(|H|,|E|)=1$. В силу (1) найдется нормальная подгруппа T группы G такая, что $E_G \leq T$, ET нормальна в G и $E/E_G \cap T/E_G \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/E_G)$. Пусть $Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/E_G) = Z/E_G$. Если $H \leq T$, то группа $HET = ET$ нормальна в G. Согласно (2) для доказательства того, что HE/H $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальна в G/H, достаточно показать, что HE $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальна в G. Поскольку $H \leq T$, выполнено равенство $T \cap HE = H(T \cap E) \leq HZ$. В силу G-изоморфизма $HZ/HE_G = HE_GZ/HE_G \simeq Z/Z \cap HE_G = Z/E_G(Z \cap H)$ имеем $HZ/HE_G \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/HE_G)$. Следовательно, $(HE \cap T)/HE_G = H(T \cap E)/HE_G \leq HZ/HE_G \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/HE_G)$. Положим $D = (HE)_G$. По лемме 2.1(1)

$$Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/HE_G)(D/HE_G)/(D/HE_G) \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/HE_G)/(D/HE_G)).$$

Значит,

$$((HE \cap T)/HE_G)(D/HE_G)/(D/HE_G) \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/HE_G)(D/HE_G)/(D/HE_G) \\ \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/HE_G)/(D/HE_G)).$$

Следовательно, $(HE \cap T)D/D \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/D)$. Таким образом, HE $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальна в G. Допустим, что $H \not\leq T$. Очевидно, что TH/H — нормальная подгруппа в G/H и $(HE/H)(TH/H) = ETH/H$ — нормальная подгруппа в G/H. Таким образом, достаточно показать, что

$$(EH/H \cap TH/H)(EH/H)_{G/H}/(EH/H)_{G/H} \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/H)/(EH/H)_{G/H}).$$

Положим $D = (HE)_G$. Поскольку $(E \cap T)/E_G \leq Z/E_G$, выполнены включения $E \cap T \leq Z$ и $(E \cap T)D/D \leq ZD/D$. По лемме 2.1(1) имеем

$$((E \cap T)D/E_G)/(D/E_G) \leq (ZD/E_G)/(D/E_G) \\ = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/E_G)(D/E_G)/(D/E_G) \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/E_G)/(D/E_G)).$$

Следовательно, $(E \cap T)D/D \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G/D)$. Из условия $(|H|,|E|) = 1$ вытекает равенство $(|HT : T|, |HT \cap E|) = 1$ и, значит, $HT \cap E \leq T \cap E$. Таким образом,

$$(HE/H \cap HT/H)(HE/H)_{G/H}/(HE/H)_{G/H} = (H(E \cap T)D/H)/(D/H) \\ \leq ((E \cap T)D/H)/(D/H) \leq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}((G/H)/(D/H)).$$

Отсюда следует, что HE/H $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальна в G/H.

(4) Предположим, что H — $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальная подгруппа в G. Тогда по (1) в G есть нормальная подгруппа T такая, что группа HT нормальна в G, $H_G \leq T$

и $H/H_G \cap T/H_G \le Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G)$. Положим $T_1 = K \cap T$. Тогда T_1 нормальна в K и $HT_1 = H(K \cap T) = K \cap HT$ — нормальная подгруппа в K. Ясно, что

$$T_1/H_G \cap H/H_G = (H \cap T \cap K)/H_G \le Z/H_G := Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/H_G) \cap K/H_G.$$

Поскольку $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, из леммы 2.1(2) следует, что $Z/H_G \le Z_\infty^{\mathfrak{F}}(K/H_G)$. По лемме 2.1(1) имеем

$$(Z/H_G)(H_K/H_G)/(H_K/H_G) \le Z_\infty^{\mathfrak{F}}((K/H_G)/(H_K/H_G))$$

и, значит, $(T_1 \cap H)H_K/H_K \le Z_\infty^{\mathfrak{F}}(K/H_K)$. Таким образом, H $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальна в K.

(5) См. доказательство п. (4).

(6) Если $G \in \mathfrak{F}$, то $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G) = G$, поэтому (6), очевидно, выполнено.

3. Новая характеризация сверхразрешимых групп

Теорема 3.1. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G существует нормальная подгруппа E такая, что G/E сверхразрешима и любая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы E, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, поэтому нужно доказать только достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и возьмем контрпример G, для которого число $|G||E|$ минимально.

(1) *Если N — нетривиальная нормальная p-подгруппа группы G для некоторого p и N содержится в E, то G/N сверхразрешима.*

Ясно, что группа $(G/N)/(E/N) \simeq G/E$ сверхразрешима. Пусть T/N — нециклическая силовская q-подгруппа в E/N для некоторого простого делителя q числа $|E/N|$ и T_1/N — максимальная подгруппа в T/N. Если $q = p$, то T — нециклическая силовская p-подгруппа в E и T_1 — максимальная подгруппа в T. По условию T_1 либо имеет сверхразрешимое добавление в G, либо является $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальной в G. Следовательно, по леммам 2.5(1) и 2.8(2) группа T_1/N либо имеет сверхразрешимое добавление в G/N, либо $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G/N. Теперь предположим, что $q \ne p$. Тогда существует силовская q-подгруппа Q группы E такая, что $T = QN$. Положим $Q_1 = Q \cap T_1$. Несложно понять, что Q_1 — максимальная подгруппа в Q и $T_1 = Q_1N$. По условию Q_1 либо имеет сверхразрешимое добавление в G, либо $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G. Значит, по леммам 2.5(1) и 2.8(3) группа T_1/N либо имеет сверхразрешимое добавление в G/N, либо $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G/N. Отсюда следует, что пара $(G/N, E/N)$ удовлетворяет условиям теоремы. В силу выбора группы G получаем, что G/N сверхразрешима.

(2) *G разрешима.*

Поскольку $\mathfrak{U}$ является S-замкнутой формацией, из лемм 2.5(2) и 2.8(4) следует, что условия теоремы выполнены и для пары (E, E). Если $E < G$, то E сверхразрешима в силу выбора группы G. Тогда G разрешима. Предположим, что $E = G$ и G неразрешима. Пусть p — наименьший простой делитель числа $|G|$ и P — силовская p-подгруппа группы G. Тогда $p = 2$ по хорошо известной теореме Фейта — Томпсона о группах нечетного порядка. Если P — циклическая группа, то G 2-нильпотентна в силу [2, (10.1.9)]. Следовательно, G разрешима; противоречие. Таким образом, можно считать, что P не циклическая. По лемме 2.7 существует максимальная подгруппа P_1 группы P такая, что P_1 не имеет сверхразрешимого добавления в G. Тогда по условию P_1

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальна в G. Следовательно, существует нормальная подгруппа T группы G такая, что P_1T нормальна в G и $(P_1 \cap T)(P_1)_G/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G/(P_1)_G)$. В силу (1) имеем $(P_1)_G = 1$ и, значит, $P_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$. Если $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$, то в G есть минимальная нормальная подгруппа H, содержащаяся в $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$. Очевидно, H — элементарная абелева r-группа для некоторого простого r. По (1) группа G/H сверхразрешима. Отсюда следует, что G разрешима; противоречие. Значит, $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) = 1$. Следовательно, $P_1 \cap T = 1$. Покажем, что P_1T разрешима. Действительно, поскольку $P_1 \cap T = 1$, имеем $2^2 \nmid |T|$. Если $2 \nmid |T|$, то T разрешима. Если $2 \mid |T|$, то T — 2-нильпотентная группа по [2, (10.1.9)]. Тогда T тоже разрешима. Поскольку $P_1T/T \cong P_1/P_1 \cap T \cong P_1$, группа P_1T/T разрешима. Таким образом, P_1T разрешима, как и требовалось. Так как $2^2 \nmid |G/P_1T|$, из теоремы Фейта — Томпсона и [2, (10.1.9)] следует, что G/P_1T разрешима. Значит, G разрешима.

(3) *В E содержится единственная минимальная нормальная подгруппа N группы G, $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G и $N = O_p(E) = F(E) = C_E(N)$ для некоторого простого числа $p \in \pi(G)$.*

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в E. По (2) группа N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого числа p. По (1) группа G/N сверхразрешима. Поскольку класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп — насыщенная формация, группа N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в E и $N \nsubseteq \Phi(G)$. Следовательно, в G существует максимальная подгруппа M такая, что $N \nleq M$. Ясно, что $\Phi(E) = 1$, $G = [N]M$ и $N \subseteq O_p(E) \leq F(E)$. Положим $F = F(E)$. Тогда $F = F \cap NM = N(F \cap M)$. Так как $\Phi(E) = 1$, группа $F(E)$ абелева в силу (2). Значит, $F \cap M \trianglelefteq NM = G$ и $F \cap M = 1$. Следовательно, $F = N$. Группа E разрешима, поэтому $N \leq C_E(N) = C_E(F(E)) \leq F(E) = F$. Таким образом, $N = O_p(E) = F(E) = C_E(N)$.

(4) *N — силовская не циклическая p-подгруппа группы E.*

Если N — циклическая группа, то по (1) и лемме 2.2 группа G сверхразрешима; противоречие. Значит, N не циклическая. Пусть q — наибольший простой делитель числа $|E|$ и Q — силовская q-подгруппа в E. Тогда QN/N — силовская q-подгруппа в E/N. По (1) группа G/N сверхразрешима, поэтому E/N сверхразрешима и, значит, $QN/N \trianglelefteq E/N$. Следовательно, $QN \trianglelefteq E$. Пусть P — силовская p-подгруппа в E. Если $p = q$, то $P = Q = QN \trianglelefteq E$. По (3) получаем, что $N = O_p(E) = P$ — силовская p-подгруппа в E. Предположим, что $q > p$. Тогда, очевидно, $QP = QNP$ — подгруппа в E. Если $QP < G$, то по леммам 2.5 и 2.8(4) пара (QP, QP) удовлетворяет условиям теоремы. В силу минимальности пары (G, E) отсюда следует, что QP сверхразрешима. Значит, $Q \trianglelefteq QP$ и $QN = Q \times N$. Таким образом, $Q \leq C_E(N) = N$; противоречие.

Пусть теперь $G = QP = E$. Ясно, что $Q \ntrianglelefteq G$. Предположим, что $N < P$. Поскольку N не циклическая, P тоже не циклическая. По (2) и лемме 2.3 в P существует максимальная подгруппа P_1, не имеющая q-замкнутого добавления в G и, следовательно, сверхразрешимого добавления в G. Тогда P_1 является $\mathfrak{F}_{\mathfrak{n}}$-нормальной в G. Если $(P_1)_G \neq 1$, то по (3) имеем $N \leq (P_1)_G \leq P_1$ и $G = NM = P_1M$, где $M \simeq G/N$ сверхразрешима. Отсюда следует, что M — q-замкнутая группа; противоречие. Теперь предположим, что $(P_1)_G = 1$. Поскольку N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и N не циклическая, выполнено $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) = 1$. По условию в G существует нормальная подгруппа T такая, что P_1T нормальна в G и $P_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) = 1$. Значит, $p^2 \nmid |T|$. Если

$T \neq 1$, то $N \leq T$. Группа N не циклическая, поэтому $p^2 \mid |T|$; противоречие. Если $T = 1$, то $P_1 \trianglelefteq G$ и, значит, $P_1 \leq O_p(E) \leq N$. Поскольку P не циклическая, имеем $P_1 \neq 1$ и, следовательно, $P_1 = N$. Применяя аргумент Фраттини к $QN \trianglelefteq E = G$, получаем $G = QNN_G(Q) = NN_G(Q) = P_1N_G(Q)$. Это означает, что P_1 имеет q-замкнутое добавление в G; еще одно противоречие. Таким образом, $N = P$, и (4) выполнено.

(5) *Заключительное противоречие.*

Пусть P — силовская p-подгруппа в G. Тогда $N \subseteq P$ по (3) и ясно, что $N \nsubseteq \Phi(P)$. Значит, существует максимальная подгруппа P_1 группы P такая, что $N \nleq P_1$. Тогда $P = NP_1$. Положим $N_1 = N \cap P_1$. Поскольку $|N : N \cap P_1| = |NP_1 : P_1| = |P : P_1| = p$, группа $N_1 = N \cap P_1$ — максимальная подгруппа в N. Предположим, что T — некоторое добавление к N_1 в G. Тогда $G = N_1T = NT$ и $N = N \cap N_1T = N_1(N \cap T)$. Отсюда вытекает, что $N \cap T \neq 1$. Очевидно, что $N \cap T \trianglelefteq G$. Следовательно, $N \cap T = N$, и, значит, $N \leq T$. Это означает, что $T = G$ не сверхразрешима. Таким образом, у N_1 нет сверхразрешимых добавлений в G. По условию N_1 является $\mathfrak{U}_n$-нормальной в G. По (3) и (4) имеем $(N_1)_G = 1$ и $N_1 \neq 1$. Следовательно, в G существует нормальная подгруппа T такая, что N_1T нормальна в G и $N_1 \cap T \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$. Если $N_1T = G$, то так же, как выше, получаем, что $N \leq T$. Значит, $1 \neq N_1 \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) \cap N \leq N$. Поскольку $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) \cap N \trianglelefteq G$, выполнено $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) \cap N = N$ и, значит, $N \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$. Тогда из (1) следует, что G сверхразрешима; противоречие. Таким образом, можно считать, что $N_1T < G$. Так как $N \cap T \trianglelefteq G$, группа $N \cap T$ равна 1 или N. Если $N \cap T = 1$, то $N_1 = N_1(N \cap T) = N \cap N_1T \trianglelefteq G$, что невозможно. Если $N \cap T = N$, то $N \leq T$ и, значит, $N_1 \leq T$. Отсюда вытекает, что $N_1 \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) \cap N$. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $N \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$ и, следовательно, G сверхразрешима; противоречие. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 3.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — s-замкнутая насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$, и G — группа. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда в G существует нормальная подгруппа E такая, что $G/E \in \mathfrak{F}$ и любая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы группы E является $\mathfrak{U}_n$-нормальной в G.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, поэтому нужно доказать только его достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и выберем контрпример G с минимальным числом $|G||E|$.

По лемме 2.8(4) и теореме 3.1 получаем, что $E \in \mathfrak{U}$. Пусть p — наибольший простой делитель числа $|E|$ и E_p — силовская p-подгруппа в E. Тогда E_p char $E \trianglelefteq G$ и, значит, $E_p \trianglelefteq G$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в E_p. Очевидно, $(G/N)/(E/N) \simeq G/E \in \mathfrak{F}$. По лемме 2.8(2)(3) условия теоремы выполнены и для G/N (относительно E/N). Тогда из выбора G следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, группа N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в E_p, и $N \nleq \Phi(G)$. Следовательно, существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = [N]M$. Несложно заметить, что $N = O_p(E) = E_p$ (см. (3) в доказательстве теоремы 3.1). Если N — циклическая группа, то $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 2.2, что противоречит выбору группы G. Таким образом, можно считать, что N не циклическая. Пусть M_p — силовская p-подгруппа группы M и $P = NM_p$. Тогда P — силовская p-подгруппа группы G. Пусть P_1 — максимальная подгруппа в P такая, что $M_p \leq P_1$. Тогда $P = NP_1$. Так же, как в (5), из доказательства теоремы 3.1, получаем, что

$N \leq Z_\infty^\mathfrak{U}(G) \subseteq Z_\infty^\mathfrak{F}(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречие завершает доказательство следствия.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда в G существует разрешимая нормальная подгруппа H такая, что $G/H \in \mathfrak{F}$ и любая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы группы $F(H)$, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, $\mathfrak{F}_\mathfrak{n}$-нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, поэтому нужно доказать только его достаточность. Предположим, что утверждение неверно, и выберем контрпример G с минимальным числом $|G||H|$. Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа группы $F(H)$. Очевидно, $P \trianglelefteq G$. Дальнейшее доказательство разбито на несколько шагов.

(1) $\Phi(G) \cap P = 1$.

Если это не так, то $1 \neq \Phi(G) \cap P \trianglelefteq G$. Пусть $R = \Phi(G) \cap P$. Ясно, что $(G/R)/(H/R) \simeq G/H \in \mathfrak{F}$. По теореме Гашюца (см. [13, теорема III.3.5]) выполнено равенство $F(H/R) = F(H)/R$. Предположим, что P/R — силовская p-подгруппа в $F(H/R)$ и P_1/R — максимальная подгруппа в P/R. Тогда P — силовская p-подгруппа в $F(G)$ и P_1 — максимальная подгруппа в P. По леммам 2.5(1) и 2.8(2) группа P_1/R либо имеет сверхразрешимое добавление в G/R, либо $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G/R. Теперь пусть Q/R — максимальная подгруппа некоторой силовской q-подгруппы группы $F(H/R) = F(H)/R$, где $q \neq p$. Тогда $Q = Q_1R$, где Q_1 — максимальная подгруппа силовской q-подгруппы группы $F(H)$. По условию Q_1 либо имеет сверхразрешимое добавление в G, либо $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G. Следовательно, $Q/R = Q_1R/R$ либо имеет сверхразрешимое добавление в G/R, либо $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальна в G/R по леммам 2.5(1) и 2.8(3). Отсюда следует, что пара $(G/R, H/R)$ удовлетворяет условию теоремы. Из выбора пары (G, H) следует, что $G/R \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G/\Phi(G) \simeq (G/R)/(\Phi(G)/R) \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, получаем, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Таким образом, (1) выполнено.

(2) $P = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \cdots \times \langle x_m \rangle$, *где каждая группа* $\langle x_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, m)$ — *нормальная подгруппа группы G порядка p.*

По (1) и лемме 2.4 имеем $P = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_m$, где R_i $(i = 1, \ldots, m)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Теперь покажем, что порядок группы R_i равен p для всех $i = 1, \ldots, m$.

Предположим, что $|R_i| > p$ для некоторого i. Без потери общности можно считать, что $|R_1| > p$. Пусть R_1^* — максимальная подгруппа в R_1. Очевидно, $R_1^* \neq 1$. Тогда $R_1^* \times R_2 \times \cdots \times R_m = P_1$ — максимальная подгруппа в P. Положим $T = R_2 \times \cdots \times R_m$. Ясно, что $(P_1)_G = T$. Если у P_1 есть сверхразрешимое добавление K в G, то $G = R_1^* R_2 \ldots R_m K = R_1^* TK$. Поскольку $T \trianglelefteq G$, TK — подгруппа в G и, значит, $|G : TK| \leq |R_1^*| < |R_1|$. В силу равенств $(R_1 \cap TK)^G = (R_1 \cap TK)^{R_1 TK} = (R_1 \cap TK)^{TK} = (R_1 \cap TK)$ получаем, что $R_1 \cap TK \trianglelefteq G$. Следовательно, $R_1 \cap TK = 1$ или $R_1 \cap TK = R_1$. Если $R_1 \cap TK = R_1$, то $R_1 \leq TK$ и, значит, $G = TK$. Группа $G/T = TK/T \simeq K/K \cap T$ сверхразрешима, и $R_1T/T \simeq R_1$ — главный фактор группы G/T, поэтому $|R_1| = |R_1T/T| = p$; противоречие. Если $R_1 \cap TK = 1$, то $|G : TK| = |R_1|$; противоречие. Таким образом, у P_1 нет сверхразрешимого добавления в G. Тогда по условию P_1 является $\mathfrak{U}_\mathfrak{n}$-нормальной в G. Следовательно, по лемме 2.8(1) в G существует нормальная подгруппа N такая, что $(P_1)_G \leq N$, P_1N — нормальная подгруппа в G и $P_1/(P_1)_G \cap N/(P_1)_G \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G/(P_1)_G)$. Допустим, что $P_1/(P_1)_G \cap N/(P_1)_G \neq 1$. Пусть $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G/(P_1)_G) = V/(P_1)_G = V/T$. Тогда $P/T \cap V/T \trianglelefteq G/T$. Поскольку $P \cap V \geq P_1 \cap N \cap V \geq P_1 \cap N > (P_1)_G = T$, выполнено $P/T \cap V/T \neq 1$. Так как $P/T \simeq R_1$ и R_1 — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $P/T \subseteq V/T$. Отсюда следует, что $|R_1| = |P/T| = p$. Это противоречие показывает, что $P_1 \cap N = (P_1)_G = T$. Следовательно, $P_1 N = R_1^* T N = R_1^* N \trianglelefteq G$ и $R_1^* \cap N = 1$. Поскольку $R_1 \cap N \trianglelefteq G$, либо $R_1 \cap N = 1$, либо $R_1 \cap N = R_1$. Если $R_1 \cap N = R_1$, то $R_1^* \subseteq R_1 \subseteq N$, что противоречит условию $R_1^* \cap N = 1$. Значит, $R_1 \cap N = 1$. Тогда $R_1^* = R_1^*(R_1 \cap N) = R_1 \cap R_1^* N \trianglelefteq G$. Это противоречие означает, что (2) выполнено.

(3) $G/F(H) \in \mathfrak{F}$.

По (2) имеем $F(H) = \langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle \times \dots \times \langle y_n \rangle$, где $\langle y_i \rangle$ $(i = 1, \dots, n)$ — нормальная подгруппа группы G простого порядка. Поскольку $G/C_G(\langle y_i \rangle)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(\langle y_i \rangle)$, группа $G/C_G(\langle y_i \rangle)$ циклическая. Следовательно, $G/\bigcap_{i=1}^{n} C_G(\langle y_i \rangle) \in \mathfrak{U}$. Ясно, что $C_G(F(G)) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(\langle y_i \rangle)$. Значит, $G/C_G(F(G)) \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $G/(H \cap C_G(F(G))) = G/C_H(F(H)) \in \mathfrak{F}$. Группа $F(H)$ абелева, поэтому $F(H) \leq C_H(F(H))$. С другой стороны, $C_H(F(H)) \leq F(H)$, так как H разрешима. Таким образом, $F(H) = C_H(F(H))$, и, значит, $G/F(H) \in \mathfrak{F}$.

(4) *Если K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, то $K \subseteq F(H)$ и $G/K \in \mathfrak{F}$.*

Пусть K — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H. Тогда K — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p. Значит, $K \leq F(H)$. По леммам 2.5 и 2.8(2),(3) группа G/K (вместе с H/K) удовлетворяет условию теоремы. Из выбора пары (G, H) следует, что $G/K \in \mathfrak{F}$.

(5) *Заключительное противоречие.*

Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, из (2) и (4) следует, что $F(H)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, и $F(H) = \langle x \rangle$ — циклическая группа простого порядка. Положим $K = F(H)$. Покажем, что K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что в G есть другая минимальная нормальная подгруппа $L \neq K$. Тогда KL/L — нормальная подгруппа группы G/L и $(G/L)/(KL/L) \simeq G/KL \simeq (G/K)/(KL/K) \in \mathfrak{F}$ по (4). Поскольку $KL/L \simeq K$ — циклическая группа простого порядка, по лемме 2.2 получаем, что $G/L \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \simeq G/K \cap L \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $K = F(H) = \langle x \rangle$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда из (4) и леммы 2.2 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

4. Новая характеризация p-нильпотентных групп

Теорема 4.1. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $p \in \pi(G)$ и любой силовской p-подгруппы P группы G выполнены следующие условия:*

(i) *$N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа;*

(ii) *любая максимальная подгруппа группы P $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна, поэтому доказывать нужно только достаточность.

Во-первых, по теореме 3.1 группа G сверхразрешима. Пусть q — наибольший простой делитель числа $|G|$ и Q — силовская q-подгруппа в G. Тогда $Q \trianglelefteq G$. Дальнейшее доказательство разбито на несколько шагов.

(1) *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в Q, то G/N нильпотентна.*

Пусть $p \in \pi(G/N)$ и PN/N — силовская p-подгруппа группы G/N, где P — силовская p-подгруппа в G. Очевидно, $N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$ и $C_{G/N}(PN/N) \geq C_G(P)N/N$. Следовательно, $N_{G/N}(PN/N)/C_{G/N}(PN/N)$ — p-подгруппа в силу (i). Предположим, что P_1/N — максимальная подгруппа в PN/N. Если $p = q$, то $N \leq P$ и P_1 — максимальная подгруппа в P. В силу (ii) группа P_1 $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G. Из леммы 2.8(2) следует, что P_1/N $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G/N. Если $p \neq q$, то $P_1 = P_1 \cap PN = (P_1 \cap P)N$. Легко видеть, что $P_1 \cap P$ — максимальная подгруппа группы P. По условию $P_1 \cap P$ $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G. Значит, по лемме 2.8(3) группа $P_1/N = (P_1 \cap P)N/N$ $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G/N. Это показывает, что G/N удовлетворяет условиям. По индукции группа G/N нильпотентна.

(2) *N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в Q, и $\Phi(G) = 1$.*

Это легко следует из того, что класс всех нильпотентных групп — насыщенная формация.

(3) *Заключение.*

По (2) существует максимальная подгруппа M такая, что $G = [N]M$. Группа G разрешима, поэтому N — элементарная абелева группа. Следовательно, $N \cap M \trianglelefteq G$, и, значит, $N \cap M = 1$. Далее, $Q = Q \cap NM = N(Q \cap M)$ и $Q \cap M \subseteq Q \subseteq F(G) \subseteq C_G(N)$. Следовательно, $Q \cap M \trianglelefteq G$. Отсюда вытекает, что $Q \cap M = 1$. Таким образом, $N = Q$ и $Q \leq C_G(Q)$. В силу (i) получаем, что $Q \leq Z(G)$. Теперь G нильпотентна по (1).

Теорема 4.2. *Пусть p — простой делитель $|G|$ такой, что $(|G|, p-1) = 1$, и P — силовская p-подгруппа группы G. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, поэтому доказывать нужно только достаточность. Предположим, что оно не является достаточным, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

(1) *Любая максимальная подгруппа группы P является $\mathfrak{U}_n$-нормальной в G.*

Если это не так, то по условию в P есть максимальная подгруппа P_1, имеющая p-нильпотентное добавление T в G. Пусть H — подгруппа группы G, содержащая P, такая, что H не p-нильпотентна, а любая ее собственная подгруппа p-нильпотентна. Тогда H — минимальная не нильпотентная группа по [13, теорема IV.5.4]. Следовательно, по [1, теорема 3.4.11] группа H обладает следующими свойствами:

i) $|H| = p^\alpha q^\beta$, где p и q — различные простые числа;

ii) $H = [H_p]H_q$, где H_p — нормальная силовская p-подгруппа группы H и H_q — циклическая силовская q-подгруппа группы H;

iii) $H_p/\Phi(H_p)$ — главный фактор группы H.

Поскольку $G = P_1T$, имеем $H = H \cap P_1T = P_1(H \cap T) = P_1L$, где $L = H \cap T$. Покажем, что L — собственная подгруппа в H. Если это не так, H содержится в T и, значит, H — p-нильпотентная группа; противоречие. Таким образом, L нильпотентна. Пусть $L = L_p \times L_q$. Очевидно, что L_q — силовская q-подгруппа группы H. Поскольку $P \subseteq H$ и $H = P_1 L$, получаем, что $L_p \neq 1$ и L_p не содержится в $\Phi = \Phi(H_p)$. Рассмотрим фактор-группу H/Φ. Так как $L_q \leq N_H(L_p)$, то $L_q\Phi/\Phi \leq N_{H/\Phi}(L_p\Phi/\Phi)$. С другой стороны, H_p/Φ — элементарная абелева группа, поэтому $L_p\Phi/\Phi \trianglelefteq H_p/\Phi$. Таким образом, $L_p\Phi/\Phi \trianglelefteq H/\Phi$. Поскольку $L_p\Phi/\Phi \neq 1$ и H_p/Φ — главный фактор группы H, выполнено равенство $L_p\Phi/\Phi = H_p/\Phi$. Отсюда следует, что $L_p = H_p$. Значит, $L = H$. Это противоречие показывает, что выполнено (1).

(2) $O_{p'}(G) = 1$.

Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то можно выбрать минимальную нормальную подгруппу N группы G такую, что $N \leq O_{p'}(G)$. Ясно, что $(|G/N|, p-1) = 1$ и PN/N — силовская p-подгруппа в G/N. Предположим, что L/N — максимальная подгруппа группы PN/N. Тогда $L/N = P_1N/N$, где P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P. По (1) и лемме 2.8(3) получаем, что G/N (вместе с PN/N) удовлетворяет условию. Из минимальности группы G следует, что G/N p-нильпотентна и, значит, такова и G; противоречие. Стало быть, $O_{p'}(G) = 1$.

(3) G разрешима.

Допустим, что G не разрешима. Тогда $p = 2$ по хорошо известной теореме Фейта — Томпсона. Предположим, что $O_2(G) \neq 1$, и пусть $P_1/O_2(G)$ — максимальная подгруппа группы $P/O_2(G)$. По леммам 2.5 и 2.8(2) группа $G/O_2(G)$ удовлетворяет условию. Следовательно, $G/O_2(G)$ 2-нильпотентна. Тогда G разрешима; противоречие. Теперь предположим, что $O_2(G) = 1$, и пусть P_1 — максимальная подгруппа группы P. Тогда $(P_1)_G = 1$. Поскольку P_1 является $\mathfrak{U}_n$-нормальной в G по (1), существует $K \trianglelefteq G$ такая, что P_1K нормальна в G и $P_1 \cap K \leq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$. Если $K = 1$, то $P_1 = 1$ и, значит, силовская 2-подгруппа P группы G циклическая. Тогда по [2, (10.1.9)] группа G является p-нильпотентной; противоречие. Таким образом, $K \neq 1$. Если $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$, то существует минимальная нормальная подгруппа H группы G, содержащаяся в $Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно, H имеет простой порядок. Это невозможно, так как $O_{2'}(G) = 1$ и $O_2(G) = 1$. Значит, $P_1 \cap K = 1$ и $2^2 \nmid |K|$. По [2, (10.1.9)] в K есть нормальная холлова $2'$-подгруппа T. Поскольку $T \operatorname{char} K \trianglelefteq G$, выполнено $T \trianglelefteq G$. Из (2) следует, что $T = 1$. Значит, $K \leq O_2(G) = 1$; противоречие. Таким образом, (3) доказано.

(4) $O_p(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, и $\Phi(G) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из (2) и (3) следует, что N — элементарная абелева p-группа и $N \leq O_p(G)$. По (1) и лемме 2.8(2) группа G/N удовлетворяет условиям и, значит, G/N — p-нильпотентная группа. Класс всех p-нильпотентных групп является насыщенной формацией, поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. По лемме 2.6 получаем, что $O_p(G) = N$. Следовательно, (4) выполнено.

(5) $|O_p(G)| = p$.

Пусть $N = O_p(G)$. По (4) имеем $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Пусть $P = NM_p$ — силовская p-подгруппы группы G, где M_p — некоторая силовская p-подгруппа в M, и P_1 — максимальная подгруппа группы P, содержащая M_p. По (1) в G существует нормальная подгруппа K

такая, что P_1K нормальна в G и $(P_1 \cap K)(P_1)_G/(P_1)_G \leq Z^{\mathfrak{U}}_{\infty}(G/(P_1)_G)$. Поскольку $N \nsubseteq P_1$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, выполнено равенство $(P_1)_G = 1$. Следовательно, $P_1 \cap K \leq Z^{\mathfrak{U}}_{\infty}(G)$. Если $K = 1$, то $P_1K = P_1 = 1$ и, значит, $|N| = |P| = p$. Допустим, что $K \neq 1$. Тогда $N \leq K$ по (4). Таким образом, $P_1 \cap N \leq P_1 \cap K \leq Z^{\mathfrak{U}}_{\infty}(G)$. Если $P_1 \cap N = 1$, то $|N| = |P : P_1| = p$. Если $P_1 \cap N \neq 1$, то $Z^{\mathfrak{U}}_{\infty}(G) \neq 1$ и, значит, $N \leqslant Z^{\mathfrak{U}}_{\infty}(G)$. Следовательно, $|N| = |O_p(G)| = p$.

(6) *Заключительное противоречие.*

Пусть $N = O_p(G)$. В силу (3) и (4) по лемме 2.6 получаем, что $N = C_G(N)$. Значит, $G/N \cong G/C_G(N)$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{Aut}(N)$, имеющей порядок $p-1$. Поскольку $(|G|, p-1) = 1$, имеем $G/N = 1$. Следовательно, $G = N$ — элементарная абелева p-группа. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть p — простой делитель числа $|G|$ и P — силовская p-подгруппа группы G. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда группа $N_G(P)$ является p-нильпотентной и каждая максимальная подгруппа группы P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, $\mathfrak{U}_n$-нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, поэтому доказывать нужно только достаточность. Если $p = 2$, то G — p-нильпотентная группа по теореме 4.2. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда p — нечетное простое число. Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример наименьшего порядка.

(1) *Каждая максимальная подгруппа группы P является $\mathfrak{U}_n$-нормальной в G (см. (1) в доказательстве теоремы 4.2).*

(2) $O_{p'}(G) = 1$.

Допустим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. По (1) и лемме 2.8(3) группа $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условию теоремы. Из выбора группы G следует, что $G/O_{p'}(G)$ является p-нильпотентной. Тогда G является p-нильпотентной; противоречие.

(3) *Если M — собственная подгруппа группы G, содержащая P, то M p-нильпотентна.*

Поскольку $N_M(P) \leq N_G(P)$, группа $N_M(P)$ является p-нильпотентной. По лемме 2.8(4) получаем, что M удовлетворяет условиям теоремы. Значит, M — p-нильпотентная группа в силу выбора группы G.

(4) *$G = PQ$, где Q — некоторая силовская q-подгруппа группы G для $q \neq p$.*

Поскольку G не p-нильпотентна, по теореме Томпсона [2, (10.4.1)] существует характеристическая подгруппа H группы P такая, что $N_G(H)$ не p-нильпотентна. Так как $N_G(P)$ p-нильпотентна, можно выбрать характеристическую подгруппу H группы P такую, что $N_G(H)$ не p-нильпотентна, но $N_G(K)$ p-нильпотентна для любой характеристической подгруппы K группы P, удовлетворяющей условию $H < K \leq P$. Ясно, что $N_G(P) < N_G(H)$. Значит, $N_G(H) = G$ по (3). Отсюда вытекает, что $H \subseteq O_p(G)$ и $N_G(K)$ — p-нильпотентная группа для любой характеристической подгруппы K группы P, удовлетворяющей условию $O_p(G) < K \leq P$. Снова применяя теорему Томпсона [2, (10.4.1)], получаем, что $G/O_p(G)$ является p-нильпотентной. Стало быть, G обладает следующим $p'p$-рядом:

$$1 < O_p(G) < O_{pp'}(G) < O_{pp'p}(G) = G.$$

По [14, теорема 6.3.5] существует силовская q-подгруппа Q группы G такая, что $G_1 = PQ$ — подгруппа в G. Если $G_1 < G$, то G_1 — p-нильпотентная группа по (3). Отсюда следует, что $Q \leq C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ по [2, (9.3.1)]. Это противоречие показывает, что $G = G_1 = PQ$.

(5) $O_p(G)$ — *единственная минимальная нормальная подгруппа группы* G, $|O_p(G)| = p$ *и* $\Phi(G) = 1$ (*см.* (4) *и* (5) *в доказательстве теоремы* 4.2).

(6) *Заключительное противоречие.*

Положим $N = O_p(G)$. Ясно, что $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G, содержащей Q. По (5) имеем $|N| = p$. Значит, $\mathrm{Aut}(N)$ — циклическая группа порядка $p-1$. Если $p < q$, то по [2, (10.1.9)] группа NQ p-нильпотентна и, следовательно, $Q \leq C_G(N) = C_G(O_p(G))$, что противоречит включению $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$. Значит, можно считать, что $q < p$. Поскольку $C_G(N) = N$ по лемме 2.6, группа $M \simeq G/N = N_G(N)/C_G(N)$ изоморфна некоторой подгруппе в $\mathrm{Aut}(N)$. Следовательно, Q — циклическая группа. Снова применяя [2, (10.1.9)], получаем, что G q-нильпотентна. Отсюда следует, что $N_G(P) = G$ — p-нильпотентная группа. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

5. Приложения

В литературе можно найти следующие частные случаи наших теорем.

Следствие 5.1 [15]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — S-*замкнутая насыщенная формация, содержащая* $\mathfrak{U}$. *Предположим, что* G — *группа, обладающая нормальной подгруппой* E *такой, что* $G/E \in \mathfrak{F}$. *Если любая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы* E *c-нормальна в* G, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Следствие 5.2 [13, VI, теорема 10.3]. *Группа* G *сверхразрешима, если любая ее силовская подгруппа является циклической.*

Следствие 5.3 [4]. *Пусть* G — *группа, обладающая нормальной подгруппой* E *такой, что* G/E *сверхразрешима. Если любая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы* E *нормальна в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 5.4 [6]. *Пусть* G — *группа, обладающая нормальной подгруппой* E *такой, что* G/E *сверхразрешима. Если любая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы* E *c-нормальна в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 5.5 [16]. *Пусть* G — *группа и* E — *ее нормальная подгруппа такая, что* G/E *сверхразрешима. Если любая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы* E, *не имеющая сверхразрешимого добавления в* G, *c-нормальна в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 5.6 [4]. *Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы* G *нормальны в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 5.7 [17]. *Пусть* G — *группа и* E — *ее нормальная подгруппа такая, что* G/E *сверхразрешима. Если любая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы* E, *не имеющая сверхразрешимого добавления в* G, *нормальна в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 5.8 [5]. *Если* G — *разрешимая группа и любая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы* $F(G)$ *нормальна в* G, *то* G *сверхразрешима.*

Следствие 5.9 [18]. *Пусть G — разрешимая группа и E — ее нормальная подгруппа такая, что G/E сверхразрешима. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы $F(E)$ нормальны в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 5.10 [15]. *Пусть G — группа. Если H — разрешимая нормальная подгруппа в G, фактор-группа G/H сверхразрешима и все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы $F(H)$ c-нормальны в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 5.11 [19]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Предположим, что G — группа, обладающая разрешимой нормальной подгруппой H такой, что $G/H \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы $F(H)$ c-нормальны в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 5.12 [17]. *Пусть G — разрешимая группа, обладающая нормальной подгруппой H такой, что G/H сверхразрешима. Если любая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы группы $F(H)$ нормальна в G или имеет сверхразрешимое добавление в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 5.13 [20]. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа группы G. Если любая максимальная подгруппа группы P c-нормальна в G, то G — p-нильпотентная группа.*

Следствие 5.14 [20]. *Пусть p — нечетный простой делитель порядка группы G и P — силовская p-подгруппа группы G. Если $N_G(P)$ — p-нильпотентная группа и любая максимальная подгруппа группы P c-нормальна в G, то G — p-нильпотентная группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press; Kluwer Acad. Publ., 2000.
2. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1982.
3. *Buckley J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. 1970. Bd 15. S. 15–17.
4. *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35, N 3. P. 210–214.
5. *Ramadan M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroup of finite groups // Acta Math. Hungar. 1992. V. 59. P. 107–110.
6. *Wang Y.* C-normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180. P. 954–965.
7. *Yang N., Guo W.* On $\mathfrak{F}_n$-supplemented subgroups of finite groups // Asian-European J. Math. 2008. V. 4, N 1. P. 619–629.
8. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
9. *Guo W.* On $\mathfrak{F}$-supplemented subgroups of finite groups // Manuscripta Math. 2008. V. 127. P. 139–150.
10. *Skiba A. N.* On weakly S-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 192–209.
11. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
12. *Guo W., Wang Y., Shi L.* Nearly S-normal subgroup of a finite group // J. Algebra Discrete Structure. 2008. V. 6. P. 95–106.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
14. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Chelsea Publ. Comp., 1980.
15. *Li D., Guo X.* The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups. II // Comm. Algebra. 1998. V. 26. P. 1913–1922.
16. *Ahmad Alsheik A.* Finite groups with given c-permutable subgroups // Algebra Discrete Math. 2004. V. 2. P. 74–85.
17. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* G-covering subgroups systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138. P. 125–138.

18. *Ramdan M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroup of finite groups // Acta Math. Hungar. 1996. V. 73. P. 335–342.

19. *Wei H.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2001. V. 29. P. 2193–2200.

20. *Guo X.*, *Shum K. P.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups of finite groups // Arch. Math. 2003. V. 80. P. 561–569.

Статья поступила 10 февраля 2010 г.

Wenbin Guo (Го Вэньбинь)
Department of Mathematics, University of Science and Technology of China
Hefei 230026, P. R.China
wbguo@xznu.edu.cn

Xiaolong Yu (Юй Сяолун)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University
Xuzhou 221116, P. R. China
yuxiaolong0710@sina.com