Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 517.544

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ–ФУНКЦИЙ

А. Ф. Воронин

Аннотация. Предложен метод определения частных индексов матрицы-функции, обладающей определенными свойствами симметрии. Основу метода составляют критерии канонической факторизации, сформулированные ранее в работах автора. Показано, что метод эффективен на симметричных классах матриц-функций: унитарных, эрмитовых, ортогональных, круговых, симметрических и др. В качестве примера применения одного из полученных результатов о частных индексах эрмитовой матрицы-функции найдены новые эффективные условия корректной разрешимости обобщенной скалярной задачи Римана (задачи Маркушевича).

Ключевые слова: факторизация, задача Римана, симметричная матрица-функция, частные индексы.

Введение. Для формулировки проблемы введем необходимые обозначения и проведем соответствующие построения. Пусть $L_{n\times m}$ — пространство $n\times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, где R — расширенная вещественная прямая $R=(-\infty,\infty)\cup\{\pm\infty\}$; $\mathscr{F}f$ — Фурье-образ матрицы-функции $f\in L_{n\times m}$:

$$\mathscr{F}f(p)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ipt}\,dt,\quad p\in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c+\mathscr{F}f$, где c — постоянная матрица порядка n и $f\in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c+\mathscr{F}f$ таких, что $f(t)=0$ при $t<0$ (при $t>0$).

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathscr{G}A$ обозначим группу обратимых элементов в A.

Будем говорить, что матрица $G\in\mathscr{G}W^{n\times n}$ *допускает стандартную факторизацию*, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x)=G_+(x)D(x)G_-(x),\quad x\in R,\tag{0.1}$$

где $G_\pm\in\mathscr{G}W_\pm^{n\times n}$ ($G_\pm$ — факторы), $D(x)$ — диагональная матрица-функция,

$$D(x)=\operatorname{diag}\left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_1},\dots,\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa_n}\right),$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00384), а также Интеграционного проекта СО РАН № 2009–93.

$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_n$ — частные индексы матрицы G (целые числа), $\kappa := \operatorname{Ind}\det G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\Delta_R \arg\det G(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G.

В данной работе для простоты рассматривается лишь случай, в котором суммарный индекс матрицы-функции G равен нулю ($\kappa = 0$). Более общий случай, когда суммарный индекс кратен порядку матрицы G, можно рассмотреть аналогичным образом.

Если $\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_n = 0$ ($D = I$ — единичная матрица), то $G = G_+G_-$ — каноническая факторизация матрицы-функции G.

Под *задачей Римана* (*задачей факторизации*) будем понимать проблему разложения матрицы $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$ в виде произведения матриц (0.1).

Задача Римана ввиду широких приложений является одной из наиболее востребованных задач комплексного анализа. Системы уравнений Винера — Хопфа [1, 2], характеристические системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [3], уравнения и системы уравнений в свертках на конечном интервале [4, 5] непосредственно связаны с задачей Римана. Задача Римана используется в обратных задачах квантовой теории рассеяния [6, 7] и является одним из основных инструментов метода обратной задачи рассеяния [8–10]. Кроме того, она нашла применение в задачах фильтрации [11, с. 361, 362], теории вероятностей [12] и некоторых разделах теории дифференциальных уравнений с частными производными [13].

Важной нерешенной проблемой в теории задачи Римана является проблема вычисления инвариантов задачи — частных индексов матричного коэффициента $G(x)$. Последней проблеме и посвящена данная работа. Здесь будет предложен эффективный метод определения частных индексов матрицы-функции $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$ при условии, что последняя обладает определенным свойством симметрии.

Известно, что частные индексы вычисляются для треугольных и рациональных матриц-функций (теория факторизации этих матриц-функций хорошо изучена), а также в случае, когда один из ее факторов — рациональная матрица-функция [14]. Кроме того, в [15] показано, что эрмитова положительно определенная матрица-функция допускает каноническую факторизацию (все ее частные индексы равны нулю).

В настоящей работе найдены достаточные условия существования канонической факторизации симметричных классов матриц-функций: унитарных, эрмитовых, ортогональных, круговых, симметрических и др. Изучаемые матрицы-функции в основном имели порядок 2. В качестве примера применения одного из полученных результатов (о частных индексах эрмитовой матрицы-функции) найдены новые эффективные условия корректной разрешимости обобщенной скалярной задачи Римана (задачи Маркушевича).

Доказательства теорем в пп. 2–6 проводились по одной и той же схеме, методом от противного. В п. 7 данная схема обобщена и предложена уже в новом качестве как метод определения частных индексов симметричных матриц-функций произвольного порядка.

1. Предварительные сведения. Хорошо известна (см., например, [2, теоремы 7.2, 7.3; 16, гл. 1, § 5]) следующая

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$. Тогда матрица $G(x)$ допускает стандартную факторизацию* (0.1).

Любая другая стандартная факторизация матрицы $G(x)$ имеет следующий вид:

$$G(x) = \widetilde{G}_+(x)\,D(x)\,\widetilde{G}_-(x), \quad x \in R, \tag{1.1}$$

где

$$\widetilde{G}_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{n\times n}, \quad \widetilde{G}_+(x) = G_+(x)\,\Omega_+(x), \quad \widetilde{G}_-(x) = \Omega_-(x)\,G_-(x). \tag{1.2}$$

При этом если все частные индексы равны между собой, т. е.

$$\kappa_1 = \kappa_j, \quad j = 2, \dots, n, \tag{1.3}$$

то $\Omega_- = \Omega_+^{-1}$ *— произвольная невырожденная постоянная матрица.*

Если условие (1.3) *не выполнено, то* $\Omega_\pm$ *— рациональные матрицы-функции из* $\mathscr{G}W_\pm^{n\times n}$ *соответственно и выполняются следующие соотношения:*

1) $\omega_{jk}^+(x) \equiv 0$ *при* $\kappa_k > \kappa_j$,

2) $\omega_{jk}^+(x) = \mathrm{const}_j$ *при* $\kappa_k = \kappa_j$,

3) $\omega_{jk}^+(x)$ *— произвольный полином от* $(x-i)/(x+i)$ *степени* $\le \kappa_j - \kappa_k$ *при* $\kappa_k < \kappa_j$,

где $\omega_{jk}^+(x)$ $(j,k = 1,\dots,n)$ *— элементы матрицы* $\Omega_+(x)$,

$$\Omega_-(x) = D^{-1}(x)\Omega_+^{-1}(x)D(x), \quad x \in R.$$

Из теоремы 1 вытекает, что если условие (1.3) не выполнено, то матрица $\Omega_+(x)$ имеет следующий общий вид:

$$\Omega_+(x) = \begin{pmatrix} Q_1 & * & \dots & * \\ 0 & Q_2 & \dots & * \\ 0 & \dots & Q_j & * \\ 0 & 0 & \dots & Q_m \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где Q_j — произвольная невырожденная постоянная квадратная матрица, порядок которой равен кратности m_j индекса κ_j $(j = 1,\dots,m \le n)$. Звездочками помечены места, на которых находятся матрицы с элементами, являющимися произвольными многочленами от $(x-i)/(x+i)$ соответствующих степеней.

Пусть

$$G \in \mathscr{G}W^{n\times n}, \quad \kappa \equiv \sum_{j=1}^n \kappa_j = 0. \tag{1.5}$$

Предположим, что среди частных индексов матрицы $G(x)$ существует хотя бы один отличный от нуля. Для такой матрицы через $\mathscr{K}_n$ будем обозначать множество (набор) ее частных индексов. Таким образом, $\mathscr{K}_n = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n\}$, где $\kappa_1 \ge \kappa_2 \ge \dots \ge \kappa_n$,

$$\sum_{j=1}^n |\kappa_j| \ne 0. \tag{$*$}$$

Через $\mathscr{P}^+(R;\mathscr{K}_n)$ обозначим класс рациональных матриц-функций вида (1.4), отвечающих набору $\mathscr{K}_n$. Для фиксированного $x_0 \in R$ положим

$$\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n) := \{\Omega_+(x_0) : \Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R;\mathscr{K}_n)\}.$$

Из (1.4) следует, что класс постоянных матриц $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$ не зависит от x_0. В самом деле, по построению матрицы Q_j, $j = 1,\dots,m$, не зависят от x_0, а матрицы, стоящие на месте $*$, — произвольные постоянные матрицы (соответствующего размера) при каждом $x_0 \in R$. Следовательно, каждому набору $\mathscr{K}_n$ соответствует класс постоянных матриц $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$.

Из (1.4) вытекает, что

$$I, V \in \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n), \quad I_1 \notin \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$$

для любого набора $\mathscr{K}_n$, где $V \in T_n$ — класс всех верхних треугольных невырожденных постоянных матриц порядка n, I_1 — матрица порядка n, состоящая из нулей, за исключением неглавной диагонали, которую заполняют единицы. При $n = 2$

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из второй части теоремы 1 и равенства (1.4) следует

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и* $(*)$. *Тогда*

(i) $\widetilde{G}_+(x) := G_+(x)\Omega_+(x)$ *— фактор, где* $\Omega_+ \equiv \left(\omega^+_{kj}\right)$ *— произвольная матрица-функция из* $\mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)$, *при этом* $\omega^+_{n1} = 0$;

(ii) $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n) \supseteq T_n$ *для любого* $\mathscr{K}_n$.

Если, кроме того, $\kappa_k \neq \kappa_j$, $j \neq k$ $(j, k = 1, \ldots, n)$, *то* $\Omega_\pm(x) \in T_n$ *для любого фиксированного* $x \in R$. *В частности, для* $n = 2$ *матрица* $\Omega_+(x)$ *имеет следующий общий вид:*

$$\Omega_+(x) = \begin{pmatrix} c_1 & P(x) \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 *— произвольные постоянные* $(c_1 c_2 \neq 0)$, $P(x)$ *— произвольный полином от* $(x - i)/(x + i)$ *степени не выше* $\kappa_1 - \kappa_2$.

Отметим важное свойство классов $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$. Для каждого $n > 1$ в общем случае число различных наборов частных индексов $\mathscr{K}_n$ и число различных классов рациональных матриц $\mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)$ не ограничены. Однако число различных классов постоянных матриц $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$, отвечающих различным наборам $\mathscr{K}_n$, уже ограничено для каждого $n > 1$, что следует из второй части теоремы 1 (и равенства (1.4)). Например, при $n = 2$ любому набору $\mathscr{K}_2$ соответствует лишь один класс постоянных матриц $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_2)$, который совпадает с классом верхних треугольных матриц T_2, при $n = 3$ любому набору $\mathscr{K}_3$ соответствует лишь один из трех различных классов $\mathscr{P}^+(\mathscr{K}_3)$.

Приведем два критерия канонической факторизации.

Критерий 1. *Пусть выполнено условие* (1.5). *Положим*

$$\left(\omega^+_{kj}(x)\right) := G_+^{-1}(x)\widetilde{G}_+(x), \tag{1.6}$$

где $\widetilde{G}_+$ *и* G_+ *— факторы в факторизациях* (1.1) *и* (0.1) *соответственно. Тогда* $\omega^+_{n1} \equiv \mathrm{const}$. *Кроме того, если* $\omega^+_{n1} \neq 0$, *то факторизации* (1.1) *и* (0.1) *канонические.*

Верно и обратное утверждение. Если матрица $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию* (0.1), *то существует другая каноническая факторизация* (1.1) *такая, что в* (1.6) $\omega^+_{n1} = \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство критерия 1. Из вида матрицы Ω_+ в (1.4) следует, что элемент $\omega^+_{n1}(x)$ не зависит от x при любой факторизации (канонической или не канонической). Далее доказательство повторяет доказательство критерия 1 в [17] методом от противного.

Следующий критерий непосредственно вытекает из второй части теоремы 1.

Критерий 2. *Пусть справедливы условие* (1.5) *и соотношение* (1.6). *Кроме того, предполагаем, что выполнено условие* $(*)$. *Тогда если существует точка* $x_0 \in R$ *такая, что* $\left(\omega^+_{kj}(x_0)\right) \notin \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$ *для любого набора* $\mathscr{K}_n$, *то предположение о справедливости условия* $(*)$ *не выполняется и факторизации* (1.1) *и* (0.1) *канонические.*

Можно видеть, что для применения критериев необходимо иметь априорную информацию о произведении факторов $G_+^{-1}(x), \widetilde{G}_+(x)$ в какой-либо точке $x_0 \in R$, что в общем случае является проблемой ввиду того, что факторы $G_+, \widetilde{G}_+$ — неизвестные матрицы-функции. Однако некоторые свойства этих факторов можно получить. Имеет место

Утверждение 2. *Пусть выполнено условие* (1.5). *Тогда если при некотором* $x_0 \in R$ *постоянная матрица* $G(x_0)$ *унитарная, то можно считать, что в факторизации* (0.1) *факторы* $G_\pm(x_0)$ *также унитарные матрицы. В противном случае если матрица* $G(x_0)$ *не является унитарной, то можно считать, что в факторизации* (0.1) *лишь фактор* $G_+(x_0)$ *и матрица* $D(x_0)$ — *унитарные матрицы.*

Доказательство утверждения 2. Предположим, что матрица-функция G не допускает канонической факторизации (в противном случае утверждение 2 непосредственно следует из второй части теоремы 1). Тогда из теоремы 1 получим, что $\widetilde{G}_+(x) := G_+(x)\Omega_+(x)$ — фактор в факторизации (1.1), где Ω_+ — произвольная матрица из $\mathscr{P}^+(R;\mathscr{K}_n)$. По известной теореме алгебры [18, гл. 2, § 6] матрица $G_+(x_0)$ представляется в виде произведения $G_+(x_0) = UV$, где U — унитарная матрица, $V \in T_n$. Согласно утверждению 1(ii) можно положить $\Omega_+(x_0) = V^{-1}$. Тогда $\widetilde{G}_+(x_0) = U$.

Из (0.1) непосредственно имеем

$$G_-(x_0) = D^{-1}(x_0)G_+^{-1}(x_0)G(x_0).$$

Тогда матрицы $G(x_0)$ и $G_-(x_0)$ унитарные либо неунитарные одновременно, поскольку матрицы $D(x_0), G_+(x_0)$ унитарные по построению. Утверждение 2 доказано.

Следующее очевидное утверждение обобщает результаты, полученные ниже для симметричных матриц-функций, на произвольные матрицы-функции с нулевым суммарным индексом.

Утверждение 3. *Пусть* $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$, $n > 1$. *Если матрица* $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию, то и матрица*

$$M(x) := A_+(x)G(x)A_-(x),$$

где $A_\pm \in \mathscr{G}W^{n\times n}_\pm$, *также допускает каноническую факторизацию.*

2. Класс матриц-функций $KL_1 := \left\{(m_{jk}) \equiv M \in \mathscr{G}W^{2\times 2} : M(x) = -A_+(x)\overline{M^{-1}(x)A_+(x)},\ x \in R, \text{ где } A_+ \in \mathscr{G}W^{2\times 2}_+\right\}$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $M \in KL_1$ *и* $\operatorname{Ind}\det M(x) = 0$. *Если существует точка* $x_0 \in R$ *такая, что*

$$A_+(x_0)\overline{M^{-1}(x_0)} = D_2 I_1, \quad \text{где } D_2 = \operatorname{diag}(c_1, -c_2),\ c_1, c_2 > 0, \tag{2.1}$$

то матрица $M(x)$ допускает каноническую факторизацию.

Доказательство теоремы 2 проведем методом от противного. Предположим, что матрица-функция M не допускает канонической факторизации. Тогда по теореме 1 для матрицы $M(x)$ справедлива правильная факторизация

$$M(x) = M_+(x)D(x)M_-(x), \quad x \in R, \tag{2.2}$$

где

$$M_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{2\times 2}, \quad D(x) = \operatorname{diag}(p^{\kappa_1}, p^{-\kappa_1}), \quad p = \frac{x-i}{x+i}, \quad \kappa_1 > 0.$$

Применив к обеим частям равенства (2.2) операцию обращения с сопряжением, получим

$$\overline{M^{-1}(x)} = \overline{M_-^{-1}(x)}D(x)\overline{M_+^{-1}(x)} \tag{2.3}$$

ввиду того, что $D(x) = \overline{D^{-1}(x)}$. Подставив выражения для $M(x)$ и $\overline{M^{-1}(x)}$ из (2.2) и (2.3) соответственно в равенство из KL_1, имеем

$$M_+(x)D(x)M_-(x) = -A_+(x)\overline{M_-^{-1}(x)}D(x)\overline{M_+^{-1}(x)}\overline{A_+(x)}, \quad x \in R. \tag{2.4}$$

Из равенства двух правильных факторизаций матрицы $M(x)$ в (2.4) по теореме 1 следует существование матрицы $\Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_2)$ такой, что

$$M_+(x)\Omega_+(x) = A_+(x)\overline{M_-^{-1}(x)}, \quad x \in R. \tag{2.5}$$

Из (2.5) с учетом равенства

$$\overline{M_-^{-1}(x)} = \overline{M^{-1}(x)M_+(x)D(x)},$$

которое следует из (2.2), получим

$$M_+(x)\Omega_+(x) = A_+(x)\overline{M^{-1}(x)M_+(x)D(x)}. \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) при $x = x_0$ умножим справа на матрицу $D(x_0)$, положив $(t_{kj}) := \Omega_+(x_0)D(x_0)$, и с учетом (2.1) получим

$$(b_{kj}) \equiv M_+(x_0)(t_{kj}) = D_2 I_1 \overline{M_+(x_0)}. \tag{2.7}$$

Из (2.7) непосредственно следуют равенства

$$b_{11} \equiv m_{11}^+ t_{11} = c_1\overline{m_{21}^+}, \quad b_{21} \equiv m_{21}^+ t_{11} = -c_2\overline{m_{11}^+} \tag{2.8}$$

ввиду того, что (t_{kj}) — верхняя треугольная невырожденная матрица по построению, $M_+(x_0) \equiv \left(m_{kj}^+\right)$. Тогда из (2.8) и условия невырожденности матрицы $M_+(x_0)$ получим $m_{21}^+ \neq 0$, $m_{11}^+ \neq 0$. Разделив первое равенство в (2.8) на второе, имеем

$$\frac{m_{11}^+}{m_{21}^+} = -\frac{c_1\overline{m_{21}^+}}{c_2\overline{m_{11}^+}}.$$

После элементарного преобразования получим невозможную цепочку соотношений

$$c_2\left|m_{11}^+\right|^2 = -c_1\left|m_{21}^+\right|^2 \neq 0$$

ввиду того, что $c_j > 0$, $j = 1, 2$. Значит, предположение, что матрица $M(x)$ не допускает канонической факторизации, неверно. Теорема 2 доказана.

В качестве интересного примера применения теоремы 2 рассмотрим одно из очевидных ее следствий.

Следствие 1. *Пусть* $G \in \mathscr{G}W^{2\times 2}$, $\operatorname{Ind}\det G(x) = 0$ *и* $G(x)$ *— круговая матрица вида*

$$G(x) = -\overline{G^{-1}(x)}, \quad x \in R.$$

Тогда если существует точка $x_0 \in R$ *такая, что* $G(x_0) = I_1 \operatorname{diag}(1, -1)$, *то круговая матрица* $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

Доказательство. Положим $A_+ := I$, $M(x) := G(x)$. Тогда непосредственно устанавливается, что для матрицы $M(x)$ выполняются условия теоремы 2.

3. Класс матриц-функций $KL_2 := \{M \in \mathscr{G}W^{2\times 2} : M(x) = M^{-1}(-x), x \in R\}$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть* $M \in KL_2$ *и*

$$\operatorname{Ind}\det M(x) = 0, \quad M(\infty) \neq c_1 I, \quad \text{где } c_1 = \pm 1. \tag{3.1}$$

Тогда матрица $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

Доказательство теоремы 3 проведем методом от противного аналогично доказательству теоремы 2. Предположим, что матрица-функция M не допускает канонической факторизации. Тогда по теореме 1 для матрицы $M(x)$ справедлива правильная факторизация (2.2). Применив к обеим частям равенства (2.2) операцию обращения с отражением, с учетом инвариантности матрицы $M(x)$ относительно этой операции ($M \in KL_2$) непосредственно получим

$$M(x) = M_-^{-1}(-x)D(x)M_+^{-1}(-x) \tag{3.2}$$

ввиду того, что $D(x) = D^{-1}(-x)$. Из (2.2) и (3.2) имеем

$$M_+(x)D(x)M_-(x) = M_-^{-1}(-x)D(x)M_+^{-1}(-x), \quad x \in R. \tag{3.3}$$

Из равенства двух правильных факторизаций матрицы $M(x)$ в (3.3) по теореме 1 следует существование матрицы $\Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_2)$ такой, что

$$M_+(x)\Omega_+(x) = M_-^{-1}(-x), \quad x \in R. \tag{3.4}$$

Из (3.4) с учетом очевидного равенства

$$M_-^{-1}(-x) = M(x)M_+(-x)D(-x)$$

получим

$$M_+(x)\Omega_+(x) = M(x)M_+(-x)D(-x). \tag{3.5}$$

Из (3.5) при $x = \infty$ имеем

$$\Omega_+(\infty) = M_+^{-1}(\infty)M(\infty)M_+(\infty),$$

так как

$$M_\pm(\infty) = M_\pm(-\infty), \quad D(\pm\infty) = I. \tag{3.6}$$

Следовательно, $\Omega_+(\infty) = \Omega_+^{-1}(\infty)$. Значит, диагональные элементы треугольной матрицы Ω_+ равны ± 1.

Покажем теперь, что существует решение $M_+ \in \mathscr{G}W_+^{2\times 2}$ матричного уравнения

$$c_1 M_+(x) = M(x)M_+(-x)D(-x) \tag{3.7}$$

относительно $M_+ \in \mathscr{G}W_+^{2\times 2}$ (уравнение (3.7) формально получается из (3.5) при $\Omega_+(x) = c_1 I$). Матричное уравнение (3.7) распадается на две специальные краевые задачи Римана относительно вектор-функций $V_1^+(\pm x)$ и $V_2^+(\pm x)$ соответственно:

$$c_1 V_1^+(x) = p^{-\kappa_1} M(x) V_1^+(-x), \quad x \in R, \tag{3.8}$$

$$c_1 V_2^+(x) = p^{\kappa_1} M(x) V_2^+(-x), \quad x \in R, \tag{3.9}$$

где $V_j^+(x) = \big(m_{1j}^+(x), m_{2j}^+(x)\big)^T$ $(j = 1, 2)$ — векторы-столбцы, T — знак транспонирования, $M_+ \equiv \big(m_{ik}^+\big)$.

В силу предположения о существовании правильной факторизации (2.2) при $D \neq I$ существует нетривиальное решение матричного уравнения (3.5) (с некоторой матрицей $\Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_2)$, диагональные элементы которой равны ± 1). Следовательно, существует нетривиальное решение задачи Римана (3.8) ввиду того, что $\Omega_+(x)$ — верхняя треугольная матрица.

Для доказательства разрешимости специальной задачи Римана (3.9) рассмотрим следующую задачу Римана:

$$U^+(x) = c_1 p^{\kappa_1} M(x) U^-(x), \quad U^\pm = \big(u_1^\pm, u_2^\pm\big)^T, \quad u_1^\pm, u_2^\pm \in W_\pm^{1\times 1}. \tag{3.10}$$

Задача Римана (3.10) имеет нетривиальное решение [16, теорема 5.6] ввиду того, что частные индексы матрицы $c_1 p^{\kappa_1} M(x)$ неотрицательны по построению. Тогда из первого равенства в (3.10), получим

$$U^-(-x) = c_1 p^{\kappa_1} M(x) U^+(-x), \tag{3.11}$$

так как $M(x) = M^{-1}(-x)$, $c_1 = \pm 1$. Положим $V_2^+(x) := U^+(x) + U^-(-x)$. Складывая первое равенство в (3.10) с равенством (3.11), получим (3.9).

Таким образом, из (3.8), (3.9) имеем равенство

$$c_1 Q_+(x) D(x) = M(x) Q_+(-x),$$

где матрица $Q_+(x)$ состоит из векторов-столбцов $V_1^+(x)$, $V_2^+(x)$. Значит, $Q_+ \in W_+^{2\times 2}$. Осталось показать, что $Q_+ \in \mathscr{G}W_+^{2\times 2}$, т. е. последнее равенство является правильной факторизацией матрицы $M(x)$.

Подставив в последнее матричное равенство выражение для $M(x)$ из факторизации (2.2), имеем

$$c_1 Q_+(x) D(x) = M_+(x) D(x) M_-(x) Q_+(-x).$$

После элементарных преобразований получим

$$D(x) M_-(x) Q_+(-x) = c_1 M_+^{-1}(x) Q_+(x) D(x).$$

Отсюда по теореме об аналитическом продолжении и обобщенной теореме Лиувилля [1, гл. 1, § 3.1] точно так же, как при доказательстве теоремы 7.3 в [2], имеем $M_+^{-1}(x) Q_+(x) = \omega^+(x) \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_2)$. Следовательно, $Q_+ = M_+ \omega^+ \in \mathscr{G}W_+^{2\times 2}$.

Из (3.7) при $x = \infty$ с учетом (3.6) и (3.1) получим противоречивую цепочку соотношений $c_1 I = M(\infty) \neq c_1 I$. Значит, предположение, что матрица $M(x)$ не допускает канонической факторизации, неверно. Теорема 3 доказана.

Приведем пример матрицы-функции, также обладающей определенной симметрией, для которой с помощью теоремы 3 будет установлено существование канонической факторизации.

Предложение 1. *Пусть*

$$M \in \mathscr{G}W^{2\times 2}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} m_{11}(x) & -m_{12}(x) \\ m_{12}(-x) & m_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad M(\infty) \neq \pm\sqrt{m(\infty)}I_1, \tag{3.12}$$

где $m_{jj}(x) = m_{jj}(-x)$, $j = 1, 2$, $m(x) = \det M(x)$, $\sqrt{m(x)}$ *— главное значение квадратного корня из функции* m. *Тогда матрица* $M(x)$ *допускает каноническую факторизацию*

$$M(x) = M_+(x)AM_+^{\mathscr{T}}(-x), \quad x \in R, \tag{3.13}$$

где

$$M_+ \in \mathscr{G}W_+^{2\times 2}, \quad M_+^{\mathscr{T}}(x) \equiv I_2 M_+^T(x) I_2, \quad I_2 = \mathrm{diag}(1, -1),$$

$A = A^{\mathscr{T}}$ *— некоторая постоянная невырожденная матрица порядка* 2.

Доказательство. Положим

$$G(x) := \frac{1}{\sqrt{m(x)}} I_1 M(x). \tag{3.14}$$

По условию $m(x) \neq 0$, $x \in R$. Тогда из четности функции m следует, что $\mathrm{Ind}\, m(x) = 0$. По теореме Винера — Леви (см., например, [19, теоремы W, L, гл. 1, § 1]) получим существование функции $l \in L_1(R)$ такой, что $\sqrt{m(x)} = 1 + \mathscr{F}l(x)$ ($\sqrt{m(x)} \in \mathscr{G}W^{1\times 1}$). Следовательно, функция $\sqrt{m(x)}$ допускает каноническую факторизацию [2]:

$$\sqrt{m(x)} = m_+(x)m_+(-x), \quad x \in R, \ m_+ \in \mathscr{G}W_+^{1\times 1}. \tag{3.15}$$

Из условия теоремы и равенств (3.14), (3.15) следует, что матрица $G(x)$ удовлетворяет теореме 3. В самом деле, непосредственным вычислением устанавливаем, что

$$G^{-1}(-x) = \sqrt{m(x)}M^{-1}(-x)I_1 = \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \begin{pmatrix} m_{22}(x) & m_{12}(-x) \\ -m_{12}(x) & m_{11}(x) \end{pmatrix} I_1 = G(x),$$

$$\sqrt{m(\infty)}G(\infty) = I_1 M(\infty) \neq \pm\sqrt{m(\infty)}I \quad (G(\infty) \neq \pm I).$$

Значит, по теореме 3 матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию. Тогда матрица $M(x)$ также допускает каноническую факторизацию ввиду равенств (3.14), (3.15). Имеем

$$M(x) = M_+(x)M_-(x), \quad x \in R,$$

где $M_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{2\times 2}$.

Можно видеть, что матрицы вида (3.12) образуют класс матриц-функций $KL_3 := \{M \in \mathscr{G}W^{2\times 2} : M(x) = M^{\mathscr{T}}(-x), \ x \in R\}$, который замкнут относительно последовательного выполнения операций $\mathscr{T}$ и отражения. Значит, для матрицы $M(x)$ из класса KL_3 будет справедливо следующее равенство для двух ее канонических факторизаций:

$$M_+(x)M_-(x) = M_-^{\mathscr{T}}(-x)M_+^{\mathscr{T}}(-x), \quad x \in R.$$

Тогда из второй части теоремы 1 следует существование постоянной невырожденной матрицы A такой, что

$$M_+(x)A = M_-^{\mathscr{T}}(-x), \quad A^{-1}M_-(x) = M_+^{\mathscr{T}}(-x), \quad x \in R.$$

Из последних двух равенств вытекает формула (3.13). Предложение 1 доказано.

Положим $KL_4 := \{G \in \mathscr{G}W^{2\times 2} : G(x) = M(-x)I_2, \, x \in R$, где $M \in LK_3$, $I_2 = \mathrm{diag}(1, -1)\}$. Легко видеть, что класс KL_4 замкнут относительно преобразования транспонирования с отражением.

Из предложения 1 и определения классов KL_3, KL_4 вытекает

Следствие 2. *Пусть* $M \in KL_3$ *(либо* $M \in KL_4$*) и* $m(x) = \det M(x)$*. Тогда если* $M(\infty) \neq \pm\sqrt{m(\infty)}\, I_1$ *(либо* $M(\infty) \neq \pm i\sqrt{m(\infty)}\, I_1 I_2$*), то матрица* $M(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода в свертках на конечном интервале. Известно [4], что оно эквивалентно задаче Римана с матричным коэффициентом

$$G(x) = -\frac{1}{\Lambda^-(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ixb}\mathscr{F}k_-(x) \\ e^{-ixb}\mathscr{F}k_+(x) & 1-\mathscr{F}k(x) \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

где $k(t) = 0,\ t \notin (-b, b),\ k \in L_1(-b, b),\ k_\pm(t) = \theta(\pm t)k(t),\ t \in R,\ \Lambda^-(x) = 1 - \mathscr{F}k_-(x)$. Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $k(t) = k(-t),\ t \in R$, *и* $\Lambda^-(x) \neq 0,\ x \in R$*. Тогда все частные индексы матрицы* $G(x)$ *в* (3.16) *равны* $\kappa_1 = \operatorname{Ind}\Lambda^-(-x) \geq 0$.

Доказательство. Положим $d(x) := \det G(x)$. Тогда

$$d(x) = \frac{\Lambda^-(-x)}{\Lambda^-(x)}, \quad \operatorname{Ind} d(x) = 2\kappa_1 \geq 0$$

ввиду того, что $\mathscr{F}k_\mp(-x) = \mathscr{F}k_\pm(x) \in W_\pm^{1\times 1}$.

Положим $G_1(x) := -\Lambda^-(-x)G(x)$. Суммарный индекс матрицы $G_1(x)$ равен нулю ввиду того, что $\det G_1(x) = \Lambda^-(-x)\Lambda^-(x)$. Легко видеть, что $G_1 \in KL_3$. Из следствия 2 вытекает, что все частные индексы матрицы $G_1(x)$ равны нулю. Значит, частные индексы матрицы $G(x)$ равны κ_1 по построению. Лемма доказана.

Заметим, что лемма 1 приведена также в [20].

4. Класс эрмитовых матриц-функций. Рассмотрим сначала матрицы-функции порядка 2. Легко показать, что эрмитова матрица-функция из класса $\mathscr{G}W^{2\times 2}$ имеет следующий общий вид:

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ \overline{g_{12}(x)} & g_{22}(x) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $g_{kj} \in W^{1\times 1}$, $\operatorname{Im} g_{jj}(x) = 0,\ k, j = 1, 2,\ d(x) := \det G(x) \neq 0,\ x \in R$.

Покажем, что из предложения 1 вытекает

Теорема 4. *Пусть элементы матрицы* (4.1) *подчинены дополнительно следующим ограничениям:*

$$g_{jj}(x) = g_{jj}(-x), \quad \overline{g_{12}(x)} = -g_{12}(-x), \quad x \in R. \tag{4.2}$$

Если

$$G(\infty) \neq \pm\sqrt{d(\infty)} I_1, \tag{4.3}$$

то все частные индексы матрицы-функции G *в* (4.1) *равны нулю.*

В самом деле, положим

$$m_{jj}(x) := g_{jj}(x),\ j = 1, 2, \quad m_{12}(x) := -g_{12}(x).$$

Тогда с учетом условий (4.2), (4.3) легко видеть, что полученная из матрицы G матрица $M \equiv (m_{kj})$ удовлетворяет условиям предложения 1. Значит, по предложению 1 матрица $M(x)$ и, следовательно, матрица $G(x)$ допускают каноническую факторизацию.

Теорема 4 дополняет следующую известную теорему 5 [15] в случае $n = 2$, $\det M(\infty) < 0$.

Теорема 5. *Пусть*

$$M \in \mathscr{G}W^{n\times n},\ n > 1, \quad M(x) = M^*(x) \equiv \overline{M^T(x)},\ x \in R.$$

Если существует такая точка $x_0 \in R$, что все собственные значения матрицы $M(x_0)$ одного знака, то матрица $M(x)$ допускает каноническую факторизацию.

Доказательство теоремы 5 методом, основанным на критерии канонической факторизации, приведем в конце данного пункта. Отметим, что доказательство теоремы 5 в [15] иное и не переносится на не эрмитовы матрицы-функции.

Пусть W_0 — алгебра Винера непрерывных функций вида $\mathscr{F}f$, где $f \in L_1(R)$; W_{0+} (W_{0-}) — подалгебра в W_0, состоящая из функций вида $\mathscr{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$).

В качестве примера применения теоремы 4 найдем новые эффективные условия разрешимости следующей обобщенной скалярной задачи Римана (задачи Маркушевича). Для простоты изложения задачу будем рассматривать на контуре, совпадающем с R.

Исследуется краевая задача о нахождении кусочно аналитической функции $\varphi \in W_0$ по краевому условию на вещественной прямой R:

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x), \quad x \in R, \tag{4.4}$$

где

$$a, b \in W^{1\times1}, \quad c \in W_0, \quad a(x) \neq 0, \quad x \in R. \tag{4.5}$$

В статье [21] и монографии [22, гл. 5, § 39.3] приведена библиография задачи. На настоящий момент основные результаты исследования задачи, условия устойчивости и числа линейно независимых решений и условий разрешимости задачи получены для следующего случая (или сводятся к нему):

$$|a(x)| \geq |b(x)|, \quad x \in R. \tag{4.6}$$

В [21] задача (4.4), (4.5) сведена (эквивалентным образом) к задаче Римана для кусочно аналитического вектора $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))^T$, где $\Phi_1, \Phi_2 \in W_0$,

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x),\ x \in R, \quad \Phi_j^\pm \in W_{0\pm},\ j = 1, 2. \tag{4.7}$$

Здесь

$$G \in \mathscr{G}W^{2\times2}, \quad g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T, \quad g_j \in W_0, \quad j = 1, 2, \tag{4.8}$$
$$\Phi_1^\pm(x) = \varphi^\pm(x), \quad \Phi_2^\pm(x) = \overline{\varphi^\mp(x)}.$$

Матрица $G(x)$ и вектор $g(x)$ определяются по следующим формулам:

$$G(x) = \frac{1}{\overline{a(x)}} I_2 \begin{pmatrix} |a(x)|^2 - |b(x)|^2 & b(x) \\ \overline{b(x)} & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\overline{a(x)}} I_2 G_1(x), \tag{4.9}$$

где

$$I_2 = \operatorname{diag}(1, -1), \quad g_1(x) = \frac{\overline{a(x)}c(x) - b(x)\overline{c(x)}}{\overline{a(x)}}, \quad g_2(x) = -\frac{\overline{c(x)}}{\overline{a(x)}},$$
$$G_1(x) = \begin{pmatrix} |a(x)|^2 - |b(x)|^2 & b(x) \\ \overline{b(x)} & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) и (4.5) видно, что

$$G_1 \in \mathscr{G}W^{2\times2}, \quad G_1(x) = G_1^*, \quad \det G_1(x) = -|a(x)|^2 \neq 0, \quad x \in R.$$

Если

$$a(-x) = a(x), \quad b(-x) = -\overline{b(x)}, \tag{4.11}$$

то для матрицы-функции G_1 справедлива теорема 4. Значит, частные индексы матрицы $G_1(x)$ равны нулю. Следовательно, частные индексы матрицы-функции G также равны нулю ввиду того, что индекс Коши четной функции $a(x)$, $x \in R$, равен нулю. Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (4.11). *Тогда обобщенная задача Римана* (4.4), (4.5) (*задача Маркушевича*) *корректно разрешима* (*решение существует, единственно и устойчиво в норме пространства* W_0 *относительно коэффициентов* a, b *и* c).

Замечание. Нетрудно сформулировать теорему, аналогичную теореме 6, для краевой задачи

$$a(x)\varphi^+(x) + b(x)\overline{\varphi^+(x)} = c(x)\varphi^-(x) + d(x)\overline{\varphi^-(x)} + f(x), \quad x \in R, \tag{4.12}$$

естественно обобщающей задачу (4.4). Задача (4.12) равносильна краевой задаче Римана с эрмитовой матрицей второго порядка [21], значит, для исследования задачи (4.12) применима теорема 4.

Доказательство теоремы 5. Можно считать $M(x_0) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения постоянной матрицы $M(x_0)$. В самом деле, хорошо известно, что эрмитова матрица унитарно подобна диагональной матрице из своих собственных значений. Следовательно,

$$M(x_0) = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^*.$$

Значит, теорему достаточно доказать для эрмитовой матрицы $U^{-1}M(x)(U^{-1})^*$.

Дальнейшее доказательство проведем методом от противного. Предположим, что матрица-функция M не допускает канонической факторизации. Тогда по теореме 1 для матрицы $M(x)$ справедлива правильная факторизация

$$M(x) = M_+(x)D(x)M_-(x), \quad x \in R, \tag{4.13}$$

где

$$M_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{n\times n}, \quad D(x) = \operatorname{diag}(p^{\kappa_1}, \dots, p^{\kappa_n}), \quad p = \frac{x-i}{x+i}, \quad \kappa_1 \ge \kappa_2 \ge \dots \ge \kappa_n. \tag{4.14}$$

Из условия теоремы следует, что определитель матрицы $M(x)$ является вещественной функцией. Значит, суммарный индекс матрицы $M(x)$ равен нулю, $\kappa = 0$.

Из (4.13) и свойства эрмитовости матрицы M непосредственно получим

$$M(x) = M^*(x) = M_-^*(x) I_1 D_1(x) I_1 M_+^*(x), \tag{4.15}$$

где $D_1(x) = \operatorname{diag}(p^{-\kappa_n}, \dots, p^{-\kappa_1})$, ввиду того, что $D^*(x) = I_1 D_1(x) I_1$. Правые части равенств (4.13) и (4.15) являются правильными факторизациями матрицы $M(x)$ по построению. Тогда по теореме единственности для частных индексов (см., например, [2, теорема 7.1]) получим $D(x) = D_1(x)$, т. е.

$$\kappa_1 = -\kappa_n, \dots, \kappa_n = -\kappa_1.$$

Таким образом,

$$M(x) = M_+(x)D(x)M_-(x) = M_-^*(x) I_1 D(x) I_1 M_+^*(x). \tag{4.16}$$

Из равенства двух правильных факторизаций матрицы $M(x)$ в (4.16) по теореме 1 следует существование матрицы-функции $\Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_n)$ такой, что

$$M_+(x)\Omega_+(x) = M_-^*(x) I_1. \tag{4.17}$$

Из (4.17) при $x = x_0$ с учетом очевидных равенств

$$I_1 = I_1^{-1}, \quad M_-^*(x) = M(x)(M_+^*)^{-1}(x)(D^*)^{-1}(x), \quad (D^*)^{-1}(x) = D(x)$$

получим

$$(a_{kj}) := \Omega_+(x_0)I_1D^{-1}(x_0) = M_+^{-1}(x_0)M(x_0)\big(M_+^{-1}\big)^*(x_0) =: (b_{kj}). \qquad (4.18)$$

Вычислим a_{nn} и b_{nn}. Из левой части (4.18) имеем $a_{nn} = 0$ ввиду того, что $\omega_{n1}^+ = 0$ (см. утверждение 1(i)). С другой стороны, из правой части (4.18) следует, что

$$b_{nn} = \sum_{j=1}^{n} \big|m_{nj}^+\big|^2 \lambda_j \neq 0,$$

где $\big(m_{kj}^+\big) = M_+^{-1}(x_0)$. Таким образом, имеем противоречивую цепочку $0 = a_{nn} = b_{nn} \neq 0$, что и завершает доказательство.

5. Класс унитарных матриц-функций.

Теорема 7. *Пусть $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$, $n > 1$. Если*

$$G(x) = \overline{G^{\perp}(-x)}, \quad x \in R \quad (G^{\perp} \equiv (G^T)^{-1}), \qquad (5.1)$$

то матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию.

Отметим, что для четной унитарной матрицы-функции условие (5.1) выполняется. Теорема 7 анонсирована в [23] и доказана в [17] тем же методом, что и теоремы 2, 3 и 5 в настоящей работе.

Для ортогональных матриц-функций из теоремы 7 непосредственно вытекает

Теорема 8. *Пусть $G \in \mathscr{G}W^{n\times n}$, $n > 1$, и $\operatorname{Im} G = 0$. Если*

$$G(x) = G^{\perp}(-x), \quad x \in R,$$

то матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию.

6. Класс матриц-функций $KL_5 := \big\{M \in \mathscr{G}W^{2\times 2} : M(x) = -A_+(x) \times \overline{M(-x)}A_-(x),\ x \in R$, где $A_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{2\times 2},\ A_\pm^{-1}(-x) = -\overline{A_\pm(x)}\big\}$. Справедлива

Теорема 9. *Пусть $M \in KL_5$ и $\operatorname{Ind}\det M(x) = 0$. Тогда если*

$$A_+(\infty) = I_2I_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.1)$$

то матрица $G(x)$ допускает каноническую факторизацию.

Доказательство проведем по отработанной схеме, поэтому не будем останавливаться на деталях. Из условия теоремы в предположении, что матрица $M(x)$ не допускает канонической факторизации, следует равенство

$$M_+(x)\Omega_+(x) = A_+(x)\overline{M_+(-x)}, \quad x \in R, \qquad (6.2)$$

где $\Omega_+ \in \mathscr{P}^+(R; \mathscr{K}_2)$, ввиду того, что

$$M(x) = M_+(x)D(x)M_-(x) = -A_+(x)\overline{M_+(-x)}D(x)\overline{M_-(-x)}A_-(x).$$

С учетом очевидного равенства $M_+(\infty) = M_+(-\infty)$ и условия (6.1) из (6.2) при $x = \infty$ получим

$$(b_{kj}) := M_+(\infty)\Omega_+(\infty) = I_2I_1\overline{M_+(\infty)}. \qquad (6.3)$$

Матрица Ω_+ верхняя треугольная (см. утверждение 1), тогда из покомпонентной записи матричного равенства (6.3) непосредственно имеем

$$b_{11} \equiv c_1 m_{11}^+ = \overline{m_{21}^+}, \quad b_{21} \equiv c_1 m_{21}^+ = -\overline{m_{11}^+}, \tag{6.4}$$

где $\left(m_{kj}^+\right) = M_+(\infty)$. Легко видеть, что равенства в (6.4) противоречат друг другу ввиду того, что $c_1 \neq 0$ и $\det M_+(\infty) \neq 0$. Следовательно, предположение, что матрица $M(x)$ не допускает канонической факторизации, неверно. Теорема 9 доказана.

7. Заключение. Можно видеть, что все непосредственно доказанные теоремы о существовании канонической факторизации (это теоремы 2, 3, 5, 7 и 9) доказаны по одной и той же схеме. Из этой схемы, после ее естественного обобщения и формализации, выделим метод определения частных индексов симметричных матриц-функций. Перейдем к описанию полученного метода.

Возможности метода. Данный метод либо устанавливает, что рассматриваемая матрица-функция, обладающая некоторым свойством симметрии, допускает каноническую факторизацию и тогда все ее частные индексы равны нулю, либо оставляет вопрос о существовании канонической факторизации открытым.

В работе было показано, что метод эффективен на симметричных классах матриц-функций: унитарных, эрмитовых, симметрических, круговых, ортогональных и др. Во всех этих классах выделены подклассы матриц-функций, допускающих каноническую факторизацию. Для простоты рассмотрений в большей части исследуемых классов порядок матриц был взят равным двум.

Область применения метода. Пусть матрица-функция $G(x)$ подчинена ограничению (1.5) и обладает следующим свойством симметрии: существует оператор $F : \mathscr{G}W^{n\times n} \to \mathscr{G}W^{n\times n}$ такой, что

$$FG(x) = G(x), \quad x \in R. \tag{7.1}$$

Оператор F действует на факторизацию матрицы $G(x)$ (на правую часть равенства (0.1)) по одной из следующих двух формул: либо

$$FG(x) = F_1^+ G_-(x) D(x) F_1^- G_+(x), \tag{7.2}$$

где $F_1^\pm G_\mp \in \mathscr{G}W_\pm^{n\times n}$, либо

$$FG(x) = F_1^+ G_+(x) D(x) F_1^- G_-(x), \tag{7.2$_1$}$$

где $F_1^\pm G_\pm \in \mathscr{G}W_\pm^{n\times n}$. В формулах (7.2) и (7.2$_1$) $F_1^\pm$ — некоторые операторы, $F_1^\pm : W^{n\times n} \to W^{n\times n}$. При этом естественно считать, что матрица G и операторы $F, F_1^\pm$ известны, а матрицы $G_\pm, D$ неизвестны. Требуется установить справедливость тождества $D \equiv I$.

Схема алгоритма метода. Положим сначала, что выполняется формула (7.2$_1$). Обозначим

$$\widetilde{G}_\pm(x) := F_1^\pm G_\pm(x).$$

Тогда формула (7.2$_1$) принимает вид

$$FG(x) = \widetilde{G}_+(x) D(x) \widetilde{G}_-(x). \tag{7.3}$$

Из (7.1) и (7.3) получим равенство для двух правильных факторизаций матрицы $G(x)$:

$$G_+(x)D(x)G_-(x) = \widetilde{G}_+(x)D(x)\widetilde{G}_-(x). \tag{7.4}$$

Составим матрицу

$$\big(\omega^+_{kj}(x)\big) := G^{-1}_+(x)\widetilde{G}_+(x),$$

как в критериях канонической факторизации. Имеем окончательную формулу для $\big(\omega^+_{kj}(x)\big)$:

$$\big(\omega^+_{kj}(x)\big) = G^{-1}_+(x)F^+_1 G_+(x) =: \big(b^+_{kj}(x)\big), \quad x \in R. \tag{7.5}$$

Переходим к анализу правой части формулы (7.5) с целью установления существования точки $x_0 \in R$ такой, что $b^+_{n1}(x_0) \neq 0$ либо $\big(b^+_{kj}(x_0)\big) \notin \mathscr{P}^+(\mathscr{K}_n)$ для любого набора индексов $\mathscr{K}_n$ (удовлетворяющих условию $(*)$). Если такая точка $x_0 \in R$ найдена, то согласно критериям 1, 2 все частные индексы матрицы $G(x)$ равны нулю. В противном случае, когда такая точка $x_0 \in R$ не найдена, вопрос о существовании канонической факторизации остается открытым.

Пусть теперь выполняется формула (7.2). Обозначим

$$\widetilde{G}_\pm(x) := F^\pm_1 G_\mp(x).$$

Тогда формула (7.2) принимает вид (7.3). Из (7.1) и (7.3) получим (7.4). Составим матрицу

$$\big(\omega^+_{kj}(x)\big) := G^{-1}_+(x)\widetilde{G}_+(x).$$

Окончательно имеем формулу, аналогичную (7.5):

$$\big(\omega^+_{kj}(x)\big) = G^{-1}_+(x)F^+_1 G_-(x) := \big(b^+_{kj}(x)\big), \quad x \in R, \tag{7.6}$$

где $G_-(x) = D^{-1}(x)G^{-1}_+(x)G(x)$. Анализ формулы (7.6) аналогичен анализу формулы (7.5).

Необходимо отметить, что анализ правой части формул (7.5) и (7.6) может упроститься, если устанавливается какая-нибудь информация о постоянной матрице $G_+(x_0)$, где x_0 — некоторая фиксированная точка на R. Например, если $G_+(x_0) \in T_n$, то постоянная $b^+_{n1}(x_0)$ вычисляется ввиду того, что в этом случае можно считать $G_+(x_0) = I$ (последнее равенство вытекает из утверждения 1(i),(ii)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2. С. 3–72.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера — Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1153–1160.
5. *Feldman I., Gohberg I., Krupnik N.* Convolution equations on finite intervals and factorization of matrix functions // Integral Equat. Oper. Theory. 2000. V. 36. P. 201–211.
6. *Крейн М. Г.* К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем // Докл. АН СССР. 1956. № 6. С. 1167–1170.
7. *Newton R. G., Jost P.* The construction of potentials from the S-matrix for systems of differential equations // JE Nuovo Cimento. 1956. V. 1, N 4. P. 590–622.
8. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

9. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

10. *Шабат А. Б.* Обратная задача рассеяния // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1824–1834.

11. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: ГИТТЛ, 1952.

12. *Пресман Э. Л.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 4. С. 70–81.

13. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высш. шк., 1991.

14. *Адуков В. М.* Факторизация Винера — Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 1. С. 54–74.

15. *Шмульян Ю. Л.* Задача Римана с положительно определенной матрицей // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 2. С. 143–145.

16. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1986.

17. *Воронин А. Ф.* Частные индексы унитарной и эрмитовой матриц-функций // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1010–1016.

18. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

19. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.

20. *Воронин А. Ф.* Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 756–767.

21. *Литвинчук Г. С.* Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // Изв. вузов. Математика. 1967. Т. 67, № 12. С. 47–57.

22. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

23. *Воронин А. Ф.* О корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 156–158.

Статья поступила 25 марта 2010 г.

Воронин Анатолий Федорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
voronin@math.nsc.ru