Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 517.956+517.968.2

ОБ ОСОБОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Д. М. Ахманова, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

Аннотация. Исследованы вопросы разрешимости особого интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со спектральным параметром λ, возникающего в теории граничных задач для спектрально-нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом совпадает с порядком дифференциальной части уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, особое ядро, задача Римана, индекс.

Введение. Хотя изучаемая в данной работе пара сопряженных интегральных уравнений является парой уравнений Вольтерра 2-го рода со спектральным параметром λ, метод последовательных приближений [1] для их решения неприменим в силу того, что ядра интегральных операторов имеют особенности. Здесь показано, что индекс изучаемого оператора неположителен, и установлена его зависимость от значения спектрального параметра. Подобные интегральные уравнения (но с другим ядром), рассмотренные ранее в [2, 3], возникают в теории обратных задач и нагруженных дифференциальных уравнений [4–6].

1. Постановки задач. Рассматриваются вопросы разрешимости следующей пары сопряженных интегральных уравнений ($\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$):

$$k_\lambda \varphi \equiv (I - \lambda k)\varphi \equiv \varphi(t) - \lambda \int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad 0 < \tau < t < \infty, \tag{1}$$

$$k_\lambda^* \psi \equiv (I - \bar{\lambda} k^*)\psi \equiv \psi(t) - \bar{\lambda} \int_t^\infty k(\tau - t)\psi(\tau)\,d\tau = g(t), \quad 0 < t < \tau < \infty, \tag{1*}$$

где

$$k(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right), \quad t > 0.$$

Отметим, что особенностями уравнений (1) и (1*) является то, что ядра интегральных операторов k и k^* обладают свойствами

$$\lim_{t \to +0} \int_0^t k(t-\tau)\,d\tau = 0; \quad \int_t^\infty k(\tau - t)\,d\tau = 1 \quad \forall t > 0.$$

Отсюда следует, что норма оператора k^* равна 1, поэтому метод последовательных приближений для уравнения (1*) неприменим.

Данные и решения уравнений (1) и (1*) удовлетворяют условиям:

$$\lambda \in \mathbb{C}; \quad f(t), \varphi(t) \in L_1(\mathbb{R}_+); \quad g(t), \psi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \tag{2}$$

где f и g — заданные функции.

Преобразуем уравнения (1) и (1*). Для этого определим соответствующие односторонние функции для функций φ, f, ψ и g выражениями

$$l_+(\theta) = \begin{cases} l(\theta), & \text{если} \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \theta \leq 0, \end{cases} \quad l_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \theta \geq 0, \\ -l(\theta), & \text{если} \quad \theta < 0, \end{cases}$$

$$l(\theta) = l_+(\theta) - l_-(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

и для функции k — выражениями

$$k_+(\theta) = \begin{cases} k(\theta), & \text{если} \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \theta \leq 0, \end{cases} \quad k_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \theta \geq 0, \\ k(-\theta), & \text{если} \quad \theta < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда из (1) и (1*) соответственно получаем

$$(I - \lambda \mathbf{k}_+)\varphi_+ \equiv \varphi_+(t) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_+(t-\tau)\varphi_+(\tau)\, d\tau = f_{2+}(t) + \varphi_-(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$(I - \lambda \mathbf{k}_-)\psi_+ \equiv \psi_+(t) - \bar{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_-(t-\tau)\psi_+(\tau)\, d\tau = g_{2+}(t) + \psi_-(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4*}$$

Уравнения (4) и (4*) совпадают с (1) и (1*) соответственно, если $t > 0$, и, как показано ниже, решения уравнений (1) и (1*) не зависят от их продолжений на отрицательную полуось, т. е. от функций $\varphi_-(t)$ и $\psi_-(t)$.

2. Решение интегрального уравнения (4*). Применяя преобразование Фурье для (4*), получаем

$$\mathbf{\Psi}^+(s) - \bar{\lambda}\mathbf{K}^-(s)\mathbf{\Psi}^+(s) = \mathbf{G}_2^+(s) + \mathbf{\Psi}^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье; более того,

$$\mathbf{K}^-(s) = \exp[-(1 + i\,\mathrm{sign}(s))\sqrt{|s|/2}].$$

Эта функция допускает аналитическое продолжение $\mathbf{K}^-(z) = \exp\{-\sqrt{iz}\}$ на всю комплексную плоскость $z = s + i\sigma$ с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси. Более того, в этом случае существуют аналитическая функция $\mathbf{\Psi}^+(z)$ в верхней полуплоскости переменной $z = s + i\sigma$, $\sigma \geq 0$, и аналитическая функция $\mathbf{\Psi}^-(z)$ в нижней полуплоскости переменной $z = s + i\sigma$, $\sigma \leq 0$, следы которых на действительной оси $\sigma = 0$ равны соответственно $\mathbf{\Psi}^+(s)$ и $\mathbf{\Psi}^-(s)$.

Если выполнено условие

$$\mathbf{A}_\lambda^*(s) \equiv 1 - \bar{\lambda}\mathbf{K}^-(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

то из (5) получаем задачу Римана (см. [7–9])

$$\mathbf{\Psi}^+(s) = [\mathbf{A}_\lambda^*(s)]^{-1}\mathbf{\Psi}^-(s) + \bar{\lambda}\mathbf{R}_\lambda^-(s)\mathbf{G}_2^+(s) + \mathbf{G}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где $\mathbf{R}_\lambda^-(s) = \mathbf{K}^-(s)/\mathbf{A}_\lambda^*(s)$. Коэффициент $\mathbf{R}_\lambda^-(s)$ в задаче Римана (7) имеет аналитическое продолжение $\mathbf{R}_\lambda^-(z)$ на плоскость переменной $z = s+i\sigma$ с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси, и $\mathbf{R}_\lambda^-(z)$ имеет простые полюсы в точках

$$z_k = s_k + i\sigma_k = -2(\arg\lambda + 2k\pi)\ln|\lambda| - i[\ln^2|\lambda| - (\arg\lambda + 2k\pi)^2], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

которые являются нулями функции $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ и лежат на параболе

$$z = s + i\left(\frac{s^2}{4\ln^2|\lambda|} - \ln^2|\lambda|\right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Очевидно, вершина параболы (9) лежит на мнимой оси и в зависимости от значения $|\lambda|$ движется вверх или вниз вдоль мнимой оси плоскости переменной z, и ветви параболы направлены вверх.

Выясним некоторые свойства функции $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$. Функция $\exp\{-\sqrt{iz}\}$ многозначна. Выбираем однозначно определенную ветвь этой функции такую, что $\operatorname{Re}\sqrt{iz_k} > 0$. Для этой цели в плоскости комплексной переменной z мы делаем вырез вдоль положительной мнимой полуоси. Действительно,

$$\lambda\exp(-\sqrt{iz}) = |\lambda|\exp[i\arg\lambda - \sqrt{|z|\exp i(\pi/2 + \arg z + 2n\pi)}]$$
$$= |\lambda|\exp[i\arg\lambda - \sqrt{|z|}\exp i(\pi/4) + n\pi + (\arg z)/2]$$
$$= |\lambda|\exp[-\sqrt{|z|}\cos(\pi/4+n\pi+(\arg z)/2)+i\arg\lambda-\sqrt{|z|}\sin(\pi/4+n\pi+(\arg z)/2)],$$

где $n = 0, 1$. Для того чтобы неравенство $\operatorname{Re}\{iz_k\} > 0$ было верно, необходимо предположить $n = 1$, так как в этом случае $\cos[(5\pi)/4 + (\arg z)/2] > 0$ при $\pi/2 < \arg z < (5\pi)/2$. Отсюда следует, что функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ является однозначно определенной в комплексной плоскости с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси и имеет нули только при $|\lambda| > 1$. Однако если $|\lambda| < 1$, то функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ не имеет нулей.

Перепишем условие (6) в терминах комплексного параметра λ. Из формулы (8) для корней z_k находим, что критерий (6) выполнен тогда и только тогда, когда мнимые части этих корней не исчезают, т. е. если $\ln^2|\lambda| - (\arg\lambda + 2k\pi)^2 \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Последнее условие вместе с $|\lambda| > 1$ эквивалентно требованию

$$|\lambda| \neq \exp(|\arg\lambda + 2k\pi|) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Если $|\lambda| < 1$, то, очевидно, $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ не равна нулю на всей комплексной плоскости $z = s + i\sigma$ с вырезом вдоль положительной мнимой полуоси, так как

$$|\exp(\sqrt{iz})| > 1.$$

Действительно, для того чтобы функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ имела нули, необходимо, чтобы $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$. Последнее равенство невозможно при нашем предположении.

Однако если $|\lambda| = 1$, то уравнение $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$ для комплексной переменной λ имеет единственное решение $\lambda = 1$, которое соответствует значению $z = 0$.

Линии, описываемые уравнением $|\lambda| = \exp(|\arg\lambda + 2k\pi|)$, разбивают комплексную плоскость параметра λ на попарно не пересекающиеся области D_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\begin{gathered} D_{2n} = \left\{D_n^{(1)} \cap D_n^{(2)}\right\} \setminus \bigcup_{k=-1}^{2n-1} D_k, \quad D_{-1} = \phi, \\ D_{2n+1} = \left\{D_n^{(1)} \cup D_n^{(2)}\right\} \setminus \bigcup_{k=0}^{2n} D_k, \end{gathered} \quad (11)$$

где $D_n^{(1)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[(2n+1)\pi - \arg\lambda]\}$, $D_n^{(2)} = \{\lambda : |\lambda| < \exp[2n\pi + \arg\lambda]\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Внешние части границ ∂D_m областей D_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, обозначены через Γ_m, $m = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что кроме области D_0, имеющей только внешнюю границу $\Gamma_0 = \partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m, состоящую из внешней части Γ_m и внутренней части Γ_{m-1}: $\partial D_m = \Gamma_{m-1} \cup \Gamma_m$. Более того, $\Gamma_{m-1} \cap \Gamma_m = (-1)^m \exp\{m\pi\}$, т. е. внешняя часть Γ_m и внутренняя часть Γ_{m-1} границы ∂D_m области D_m имеют одну общую точку, лежащую на действительной оси комплексной плоскости параметра λ.

Кроме того, находим, что $\lambda \in \Gamma_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, если и только если существует по крайней мере одна точка $\tilde{s}$ такая, что $\mathbf{A}_\lambda^*(\tilde{s}) = 0$.

Пусть $|\lambda| > 1$. Тогда согласно соотношению (9) функция $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ может иметь только конечное число нулей вида (8) в нижней полуплоскости, где

$$-N_1 \le k \le N_2, \quad N_1 = [(\ln|\lambda| + \arg\lambda)/(2\pi)], \quad N_2 = [(\ln|\lambda| - \arg\lambda)/(2\pi)], \tag{12}$$

здесь $[a]$ — целая часть числа a; более того, целая часть отрицательного числа приравнена нулю. Действительно, неравенство (12) следует из условия того, что мнимая часть корней (8) должна быть отрицательной, т. е. $\mathrm{Re}\{-iz_k\} \le 0$ (согласно (2) для решения $\psi(t)$, принадлежащего классу существенно ограниченных функций). Поэтому неравенство $(2\pi k + \arg\lambda)^2 < \ln^2|\lambda|$ влечет утверждение (12).

Задача Римана (7) имеет положительный индекс $\varkappa^*(\lambda)$, равный числу нулей функции $\mathbf{A}_\lambda^*(z)$ в нижней полуплоскости (нули считаются с учетом их кратности):

$$\varkappa^*(\lambda) = \mathrm{Ind}\{[\mathbf{A}_\lambda^*(z)]^{-1}\} = -\,\mathrm{Ind}\{\mathbf{A}_\lambda^*(z)\} = N_1 + N_2 + 1 > 0. \tag{13}$$

Заметим, что согласно (8) и (9) индексом задачи Римана является $\varkappa^*(\lambda) = 0$ для $|\lambda| < 1$. Пусть $\sum\limits_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z - z_k}$ — главная часть разложения функции $[\mathbf{A}_\lambda^*(z)]^{-1}\mathbf{\Psi}^-(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_k$, $k = -N_1, \dots, 0, \dots, N_2$. Тогда

$$\chi(z) \equiv \frac{\mathbf{\Psi}^-(z)}{\mathbf{A}_\lambda^*(z)} - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z - z_k}$$

есть функция, прообраз Фурье которой исчезает для $t \in \mathbb{R}_+$. Теперь соотношение (7) может быть представлено в виде

$$\mathbf{\Psi}^+(s) = \mathbf{G}_2^+(s) + \bar{\lambda}\mathbf{R}_\lambda^-(s)\mathbf{G}_2^+(s) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{s - z_k} + \chi(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Проведя в (14) обратное преобразование Фурье для $t \in \mathbb{R}_+$, получаем общее решение интегрального уравнения (1*) в виде

$$\psi(t) = g(t) + \bar{\lambda}\int_t^\infty \mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$ является сужением прообраза Фурье от $\mathbf{R}_\lambda^-(s)$ для отрицательной полуоси и определена соотношением (см. [10])

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = 2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta) + 2\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^\infty \frac{m}{\bar{\lambda}^m}\exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \mathrm{Re}(iz_k) < 0, \quad |\lambda| > 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_-, \tag{16}$$

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m\bar{\lambda}^m \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \le 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_-, \tag{17}$$

где числа N_1, N_2 и z_k заданы согласно (12) и (8).

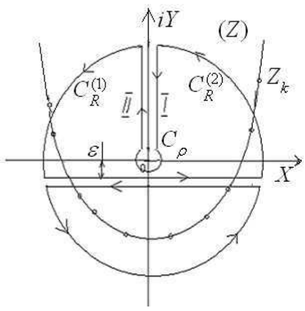

Рис. 1. Контуры интегрирования. Точки, обозначенные через z_k, принадлежат параболе, заданной формулой (9).

Покажем, что верны равенства (16) и (17). Рассмотрим область, ограниченную контуром интегрирования, т. е. замкнутой сверху полуокружностью (см. рис. 1). Используя теорему о вычетах и лемму Жордана (см. [10]), получаем

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^{(l)}} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\, dz = 0, \quad l = 1, 2,$$

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = \frac{\lambda \cdot 2\pi i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \operatorname{res}\left[z_k, \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\right]$$

$$+ \frac{\lambda \cdot 2\pi i}{2\pi} \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \operatorname{res}\left[z_k, \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\right] + \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{i\infty}^{i\rho} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\, dz$$

$$+ \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{i\rho}^{i\infty} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\, dz + \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{C_\rho} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} e^{-iz_k\theta} + \frac{1}{2} \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k} e^{-iz_k\theta} + J_1 + J_2 + J_\rho \quad (\operatorname{Re} iz_k < 0).$$

Интеграл J_ρ вдоль малой окружности C_ρ удовлетворяет условию $J_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. В самом деле, это следует из соотношения

$$J_\rho = \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_{c_\rho} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\, dz = \frac{i\lambda\rho}{2\pi} \int\limits_{\frac{5}{2}\pi}^{\pi/2} \frac{\exp[-\sqrt{i\rho e^{i\varphi}} - i\rho e^{i\varphi}\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{i\rho e^{i\varphi}}]} e^{i\varphi}\, d\varphi$$

для $|\lambda| > 1$ и из соотношения

$$J_\rho \approx \frac{i\lambda\rho}{2\pi} \int\limits_{\frac{5}{2}\pi}^{\pi/2} \frac{\exp[-\sqrt{i\rho e^{i\varphi}} - i\rho e^{i\varphi}\theta]}{\sqrt{i\rho e^{i\varphi}}} e^{i\varphi}\, d\varphi$$

для достаточно малого ρ и $|\lambda| = 1$. Для суммы интегралов J_1 и J_2 при $|\lambda| > 1$ получаем

$$J_1 + J_2 = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{i\infty}^{0} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\,dz + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{0}^{i\infty} \frac{\exp[-\sqrt{iz} - iz\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-\sqrt{iz}]}\,dz$$

$$= \frac{i\lambda}{2\pi}\int_{\infty}^{0} \frac{\exp[i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[i\sqrt{u}]}du + \frac{i\lambda}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\exp[-i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-i\sqrt{u}]}\,du$$

$$= \frac{i\lambda}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\exp[-i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[-i\sqrt{u}]} - \frac{\exp[i\sqrt{u} + u\theta]}{1 - \bar{\lambda}\exp[i\sqrt{u}]}\right) du.$$

В последнем интеграле преобразованием подынтегральной функции

$$\frac{\exp\{-i\sqrt{u}\}}{1 - \bar{\lambda}\exp\{-i\sqrt{u}\}} - \frac{\exp\{i\sqrt{u}\}}{1 - \bar{\lambda}\exp\{i\sqrt{u}\}}$$

$$= -\frac{1}{\bar{\lambda}\big(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}}\exp\{i\sqrt{u}\}\big)} + \frac{1}{\bar{\lambda}\big(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}}\exp\{-i\sqrt{u}\}\big)}$$

$$= -\frac{1}{\bar{\lambda}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}^m}(\exp\{im\sqrt{u}\} - \exp\{-im\sqrt{u}\}) = -\frac{2i}{\bar{\lambda}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}^m}\sin(m\sqrt{u})$$

получим

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}^m}\int_{0}^{\infty}\sin(m\sqrt{u})\exp\{u\theta\}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\lambda}^m}\int_{0}^{\infty} x\sin(mx)\exp\{x^2\theta\}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\bar{\lambda}^m}\exp\{m^2/(4\theta)\}.$$

Для того чтобы решение $\psi(t)$, заданное формулой (15), было существенно ограниченной функцией, достаточно, чтобы интеграл $\int_t^\infty \mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)\,d\tau$ был существенно ограниченным для любых $0 < t \le \tau < \infty$, ибо $g(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t)$ — ограниченная функция переменной t. Этот интеграл ограничен, поскольку функция $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$, заданная формулой (16), удовлетворяет оценке

$$|\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)| \le C_1|\theta|^{-1/2}\exp(-\delta_0|\theta|) + C_2|\theta|^{-3/2}\exp(-\delta_0|\theta|^{-1}) \quad \forall\theta\in\mathbb{R}_-, \tag{18}$$

где

$$\delta_0 = \min\{1/4;\ [2\pi(N_1+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda|;\ [2\pi(N_2+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda|\}. \tag{19}$$

Оценка (18) вытекает из следующих соотношений. Для второго слагаемого в (16) имеем

$$\left|\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{iz_k}\exp(-iz_k\theta)\right| \le |\ln\lambda|\sum_{k=N_2+1}^{\infty}|\exp(-iz_k\theta)|$$

$$\leq |\ln\lambda| \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \exp\{[(2k\pi+\arg\lambda)^2 - \ln^2|\lambda|]\theta\} \leq \left| \begin{matrix} y = 2k\pi + \arg\lambda \\ a = 2\pi(N_2+1) + \ln|\lambda| \end{matrix} \right|$$

$$\leq |\ln\lambda| \int_a^{\infty} \exp\{(y^2 - \ln^2|\lambda|)\theta\}\,dy = |\ln\lambda| \exp\{-\theta\ln^2|\lambda|\} \int_a^{\infty} \exp\{\theta y^2\}\,dy$$

$$= |z = y - a| = |\ln\lambda| \exp\{-\theta\ln^2|\lambda|\} \int_0^{\infty} \exp\{\theta(a^2 + z^2 + 2az)\}\,dz$$

$$= |\ln\lambda| \exp\{-\theta\ln^2|\lambda| + \theta a^2\} \int_0^{\infty} \exp\{\theta z^2 + \theta\cdot 2az\}\,dz$$

$$\leq |\ln\lambda|(-\theta)^{-1/2} \exp\{\theta(a^2 - \ln^2|\lambda|)\} \int_0^{\infty} \exp\{-(\sqrt{-\theta}z)^2\}\,d(\sqrt{-\theta}z)$$

$$= |\ln\lambda| \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}} \exp\{\delta_2\theta\},$$

где $\delta_2 = [2\pi(N_2+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda| > 0$.

Аналогично для первого слагаемого

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k} \exp(-iz_k\theta) \right| \leq |\ln\lambda| \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}} \exp\{\delta_1\theta\},$$

где $\delta_1 = [2\pi(N_1+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda| > 0$.

Третье слагаемое в (16) можно оценить так:

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\bar{\lambda}^m} \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right)$$
$$= |\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\bar{\lambda}^m} \exp\left(-\frac{m^2-1}{4|\theta|}\right) \leq C|\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right).$$

Для представления (17) получаем оценку

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{|\theta|}} \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) d\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) = \frac{2}{\sqrt{|\theta|}} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right),$$

если $|\lambda| = 1$, и оценку

$$|\theta|^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m\bar{\lambda}^m \exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \leq C|\theta|^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right),$$

если $|\lambda| < 1$.

Легко показать, что функция (15) является решением уравнения (1^*) для произвольных коэффициентов c_k. Так как число линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения для (1^*) равно индексу $\varkappa^*(\lambda)$, заданному (13), отсюда следует, что решение (15) является действительно общим решением неоднородного уравнения (1^*).

Вначале покажем, что функция

$$\psi_{hom}(t) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

есть решение соответствующего однородного уравнения для (1*) для каждого коэффициента c_k, $k = 1, 2, \dots, m$. Действительно,

$$\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \frac{\bar{\lambda}}{2\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(\tau - t)} - iz_k \tau\right) d\tau$$

$$= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau_1^2}{4} - iz_k\left(t + \frac{1}{\tau_1^2}\right)\right) d\tau_1$$

$$= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t) \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau_1^2}{4} - \frac{iz_k}{\tau_1^2}\right) d\tau_1$$

$$= \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t)\bar{\lambda} \cdot \exp(-\sqrt{iz_k}) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t).$$

Покажем, что функция, заданная формулой

$$\psi_{part}(t) = g(t) + \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(t - \tau) g(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

определяет частное решение неоднородного уравнения (1*). В самом деле, подставляя эту функцию в уравнение (1*), получаем

$$g(t) + \int_t^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(t - \tau) g(\tau)\, d\tau - \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau - t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(\tau - t)}\right\} g(\tau)\, d\tau$$

$$- \bar{\lambda} \int_t^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau - t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(\tau - t)}\right\} \left[\int_\tau^{\infty} \mathbf{r}_{\lambda-}(\tau - s) g(s) ds\right] d\tau = g(t).$$

Стало быть, функция $\psi_{part}(t)$ — частное решение уравнения (1*), если и только если функция $\mathbf{r}_{\lambda-}(-t)$ удовлетворяет равенству

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(-t) = \bar{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp\{-1/(4t)\} + \bar{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \exp\{-1/(4\tau)\} \mathbf{r}_{\lambda-}(\tau - t)\, d\tau.$$

Вычислим интеграл в этом равенстве:

$$J(t) = \bar{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \exp\{-1/(4\tau)\} \mathbf{r}_{\lambda-}(\tau - t)\, d\tau,$$

где функцию $\mathbf{r}_{\lambda-}(\tau - t)$ приведем к виду (см. рис. 1)

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\tau - t) = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty} \frac{\exp\{-\sqrt{iz}\}}{1 - \bar{\lambda} \exp\{-\sqrt{iz}\}} \exp\{-iz(\tau - t)\}\, dz, \quad \tau < t.$$

Для интеграла $J(t)$ получаем

$$J(t) = \frac{\bar{\lambda}^2}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}\tau^{3/2}}\exp\{-1/(4\tau)\}$$
$$\times\left[\int\limits_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty}\frac{\exp\{-\sqrt{iz}\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{-\sqrt{iz}\}}\exp\{-iz(\tau-t)\}\,dz\right]d\tau$$
$$= \frac{\bar{\lambda}^2}{2\pi}\int\limits_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty}\frac{\exp\{-\sqrt{iz}+izt\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{-\sqrt{iz}\}}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\tau^{3/2}}\exp\{-iz\tau-1/(4\tau)\}\,d\tau\right]dz,$$

так как $\operatorname{Im} z = -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (см. рис. 1). Внутренний интеграл равен

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\tau^{3/2}}\exp\{-iz\tau-1/(4\tau)\}\,d\tau$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\exp\{-x^2-iz/(4x^2)\}\,dx = \exp\{-\sqrt{iz}\},$$

стало быть,

$$J(t) = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\pi}\int\limits_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty}\frac{\exp\{-2\sqrt{iz}+izt\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{-\sqrt{iz}\}}\,dz.$$

Подынтегральную функцию этого интеграла аналитически продолжаем в область $\operatorname{Im} z > -\varepsilon$ комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной мнимой полуоси (см. рис. 1).

Используя теорему о вычетах и лемму Жордана (см. [10]), имеем

$$J(t) = 2\bar{\lambda}\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{iz_k}\exp\{-\sqrt{iz_k}+iz_kt\} + 2\bar{\lambda}\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{iz_k}\exp\{-\sqrt{iz_k}+iz_kt\}$$
$$+\frac{\bar{\lambda}^2 i}{2\pi}\int\limits_0^\infty\left[\frac{\exp\{-2i\sqrt{u}-ut\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{-i\sqrt{u}\}}-\frac{\exp\{2i\sqrt{u}-ut\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{i\sqrt{u}\}}\right]du.$$

В последнем интеграле, преобразуя подынтегральную функцию к виду

$$\frac{\exp\{-2i\sqrt{u}\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{-i\sqrt{u}\}}-\frac{\exp\{2i\sqrt{u}\}}{1-\bar{\lambda}\exp\{i\sqrt{u}\}}$$
$$= -\frac{\exp\{-i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda}\big(1-\frac{1}{\bar{\lambda}}\exp\{i\sqrt{u}\}\big)}+\frac{\exp\{i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda}\big(1-\frac{1}{\bar{\lambda}}\exp\{-i\sqrt{u}\}\big)}$$
$$= -\frac{1}{\bar{\lambda}}\sum_{m=0}^\infty\left[\frac{\exp\{-i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda}^m}\exp\{im\sqrt{u}\}-\frac{\exp\{i\sqrt{u}\}}{\bar{\lambda}^m}\exp\{-im\sqrt{u}\}\right]$$
$$= \frac{2i}{\bar{\lambda}}\sin\sqrt{u}-\frac{2i}{\bar{\lambda}^2}\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{\bar{\lambda}^m}\sin(m\sqrt{u}),$$

получим

$$J(t) = 2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{iz_k}\exp\{iz_k t\} + 2\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{iz_k}\exp\{iz_k t\}$$
$$+\int_0^\infty \left[-\frac{\bar\lambda}{\pi}\exp\{-ut\}\sin\sqrt{u} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(m\sqrt{u})}{\bar\lambda^m}\exp\{-ut\}\right] du$$
$$= \mathbf{r}_{\lambda-}(-y) - \frac{\bar\lambda}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}}\exp\{-1/(4t)\}.$$

Здесь считается, что верны равенства $\exp(-\sqrt{iz_k}) = 1/\bar\lambda$, $z_k = -i[\ln^2|\lambda| - (2k\pi - \arg\lambda)^2] - 2\ln^2|\lambda|(2k\pi - \arg\lambda)$, и используется разложение подынтегральной функции в ряд относительно $1/\bar\lambda$.

Таким образом, мы показали требуемое равенство, и, кроме того, функция $\psi_{part}(t)$ определяет частное решение неоднородного уравнения (1^*). Функция, заданная соотношением (15), является действительно общим решением неоднородного уравнения (1^*) для любых коэффициентов c_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Итак, установлены следующие леммы.

Лемма 1. *Значения $\lambda \in D_0$ в (11) являются регулярными числами оператора k_λ^* (см. уравнение (1^*)).*

Лемма 2. *Множество $\mathbb{C} \setminus D_0$ состоит из характеристических чисел оператора k_λ^* (см. (1^*)). Более того, если*

$$\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

то $\dim \mathrm{Ker}(k_\lambda^*) = \varkappa^*(\lambda) = m$ и соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_{\lambda k}(t) = \exp(-iz_k t), \quad k = 1, \ldots, m = \varkappa^*(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

3. Решение интегрального уравнения (1). Рассмотрим интегральное уравнение (4). Применяя к нему преобразование Фурье, получаем

$$\Phi^+(s) - \lambda\mathbf{K}^+(s)\Phi^+(s) = \mathbf{F}_2^+(s) + \Phi^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье.

Если

$$\mathbf{A}_\lambda(s) \equiv 1 - \lambda\mathbf{K}^+(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

то из (20) получаем задачу Римана [7–9]

$$\Phi^+(s) = [\mathbf{A}_\lambda(s)]^{-1}\Phi^-(s) + \lambda\mathbf{R}_\lambda^+(s)\mathbf{F}_2^+(s) + \mathbf{F}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

где $\mathbf{R}_\lambda^+(s) = \mathbf{K}^+(s)/\mathbf{A}_\lambda(s)$. Коэффициент $\mathbf{R}_\lambda^+(s)$ задачи (22) есть функция, которая может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость, за исключением конечного множества возможных полюсов, которые являются нулями функции $\mathbf{A}_\lambda(s)$. Кроме того, индекс $\varkappa(\lambda)$ задачи (22) неположителен, т. е. $\varkappa(\lambda) = -\varkappa^*(\lambda) \le 0$. Переписывая задачу (20) в виде

$$[1 - \lambda\mathbf{K}^+(s)]\Phi^+(s) = \mathbf{F}_2^+(s) + \Phi^-(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

получаем $\Phi^-(s) \equiv 0$; таким образом, задача Римана (22) приобретает вид

$$\Phi^+(s) = \lambda\mathbf{R}_\lambda^+(s)\mathbf{F}_2^+(s) + \mathbf{F}_2^+(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Отсюда следует, что однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет только тривиальное решение для любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Применяя обратное преобразование Фурье в (23) для $t \in \mathbb{R}_+$, получаем решение интегрального уравнения (1):

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int\limits_0^t \mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{24}$$

где $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ является сужением прообраза Фурье $\mathbf{R}_\lambda^+(s)$ на положительную полуось и определена формулой (см. [10])

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = 2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{-iz_k}\exp(iz_k\theta) + 2\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{-iz_k}\exp(iz_k\theta)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\biggl(-\frac{m^2}{4\theta}\biggr), \quad \mathrm{Re}(-iz_k) > 0,\ |\lambda| > 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_+, \tag{25}$$

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m \exp\biggl(-\frac{m^2}{4\theta}\biggr), \quad |\lambda| \le 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_+,$$

здесь N_1, N_2 и z_k являются числами, заданными (12) и (8).

Чтобы $\varphi(t)$ (24) была интегрируемой, достаточно, чтобы $\mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)$ была ограниченной функцией для произвольных $0 < \tau \le t < \infty$, так как функция $f(t)$ интегрируема. Функция $\mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)$ ограничена, поскольку $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ (25) допускает оценку

$$|\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)| \le C_1|\theta|^{-1/2}\exp(-\delta_0|\theta|) + C_2|\theta|^{-3/2}\exp(-\delta_0|\theta|^{-1}) \quad \forall\theta \in \mathbb{R}_+,$$

с константой δ_0, заданной соотношением (19).

Далее, если $\lambda \in D_0$, то по лемме 1 неоднородное уравнение (1) безусловно однозначно разрешимо; если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D_0$, то по лемме 2 для однозначной разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий ортогональности

$$\int\limits_0^\infty \overline{f(t)}\exp(-iz_k t)\, dt = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3. *В комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *не существуют характеристические числа оператора* k_λ (1).

Из лемм 1–3 следует основной результат работы, сформулированный в виде следующей теоремы.

Теорема. *Задача* (1) *нётерова, и ее оператор* k_λ *имеет индекс*

$$\mathrm{Ind}(k_\lambda) = \dim\mathrm{Ker}(k_\lambda) - \dim\mathrm{Ker}(k_\lambda^*) = -\varkappa^*(\lambda) = -N_1 - N_2 - 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
2. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.* Особое интегральное уравнение Вольтерра второго рода. 1. Однородный случай // Мат. журн. (Алматы). 2006. Т. 6, № 1. С. 33–46.
3. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.* Особое интегральное уравнение Вольтерра второго рода. 2. Неоднородный случай // Мат. журн. (Алматы). 2006. Т. 6, № 2. С. 37–44.
4. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
5. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.
6. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
9. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

Статья поступила 16 октября 2008 г.

Ахманова Данна Маратовна, Рамазанов Мурат Ибраевич
Карагандинский гос. университет им. академика Е. А. Букетова
ул. Университетская, 28, Караганды 100028, Казахстан
danna.67@mail.ru ramamur@mail.ru

Дженалиев Мувашархан Танабаевич
Институт математики МОН РК,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
muvasharkhan@gmail.com