*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1*

*УДК 517.982.27*

# K–МОНОТОННЫЕ ВЕСОВЫЕ ПАРЫ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

**К. Е. Тихомиров**

**Аннотация.** Приводится критерий равномерной относительной K-монотонности весовых пар $(X, X(w_1))$, $(X, X(w_2))$, где $X$ — некоторая банахова решетка измеримых функций со свойством Фату, а $w_1$ и $w_2$ — весовые функции. На основе полученного критерия доказаны следствия для пространств последовательностей и произвольных банаховых решеток.

**Ключевые слова:** K-монотонная пара, пара Кальдерона — Митягина, весовая пара, интерполяция операторов.

## 1. Введение

Приведем сначала несколько базовых определений. Пусть $(T, \Sigma, \mu)$ — пространство с $\sigma$-конечной мерой, $F$ — пространство всех п. в. конечных вещественных измеримых функций на нем. Банахово пространство $X$ с элементами из $F$ будем называть *банаховой решеткой*, если для любых $f \in X$ и $g \in F$ таких, что $|g(t)| \leq |f(t)|$ п. в., выполняется $g \in X$, $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. Далее будем рассматривать только *насыщенные* решетки, т. е. такие, что для любого множества $E \in \Sigma$ с положительной мерой найдется измеримое подмножество $E' \subset E$, $\mu E' > 0$, для которого $\chi_{E'} \in X$ (где, как обычно, $\chi_{E'}$ — характеристическая функция множества $E'$). Решетка $X$ называется *порядково непрерывной*, если для любой последовательности неотрицательных функций $x_n \in X$, поточечно убывающей к нулю, выполняется $\lim\limits_n \|x_n\|_X = 0$. Наконец, $X$ обладает *свойством Фату,* если для любой поточечно возрастающей последовательности неотрицательных функций $x_n \in X$ таких, что $\lim\limits_n \|x_n\|_X < \infty$, функция $x(t) := \lim\limits_n x_n(t)$ также принадлежит $X$, причем $\|x\|_X = \lim\limits_n \|x_n\|_X$.

Пусть $(X_1, X_2)$ — пара совместимых банаховых пространств (т. е. вложенных в некоторое отделимое топологическое линейное пространство). K-*функционал Петре* на сумме $X_1 + X_2$ определяется по формуле

$$K(s, x, X_1, X_2) := \inf_{x = x_1 + x_2} \{\|x_1\|_{X_1} + s\|x_2\|_{X_2}\}. \tag{1}$$

Пары $\overline{X} := (X_1, X_2)$, $\overline{Y} := (Y_1, Y_2)$ называют *равномерно относительно* K-*монотонными с константой* $C$, если любые пространства $X$ и $Y$, являющиеся $\lambda$-интерполяционными относительно пар $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, обладают следующим свойством: если $x \in X$, $y \in Y_1 + Y_2$ и

$$K(s, x, X_1, X_2) \geq K(s, y, Y_1, Y_2), \quad s > 0, \tag{2}$$

то с необходимостью $y \in Y$ и $\|y\|_Y \leq \lambda C \|x\|_X$. Напомним, что пространства $X$ и $Y$, для которых справедливы непрерывные вложения $X_1 \cap X_2 \subset X \subset X_1 + X_2$,

$Y_1 \cap Y_2 \subset Y \subset Y_1 + Y_2$, называют *интерполяционными относительно* $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *с константой* $\lambda$, если любой линейный оператор $T$, ограниченно действующий из $X_1$ в $Y_1$ и из $X_2$ в $Y_2$, также переводит элементы $X$ в элементы $Y$, причем

$$\|T\|_{X\to Y} \le \lambda \|T\|_{\overline{X}\to\overline{Y}},$$

$\|T\|_{\overline{X}\to\overline{Y}} := \max\{\|T\|_{X_1\to Y_1}, \|T\|_{X_2\to Y_2}\}$ (см., например, [1–3]). Нетрудно показать, что приведенное выше определение К-монотонности эквивалентно тому, что для любых $x \in X_1 + X_2$, $y \in Y_1 + Y_2$, удовлетворяющих условию (2), и любого $\epsilon > 0$ существует линейный оператор $T$, определенный на сумме $X_1 + X_2$, сужения которого на $X_i$ ограниченно действуют в $Y_i$, $\|T\|_{X_i\to Y_i} \le C+\epsilon$, $i = 1, 2$, и $Tx = y$ [4]. Пару $(X, Y)$ называют *равномерно* К-*монотонной*, если $(X, Y)$, $(X, Y)$ равномерно относительно К-монотонны.

Важность К-монотонных пар обусловлена прежде всего тем, что для таких пар все интерполяционные пространства можно описать К-методом, т. е. представить норму в этих пространствах как норму К-функционала в подходящей банаховой решетке на $(0; +\infty)$ [5]. Классическим примером К-монотонных пар являются весовые пары $L_p$-пространств [6]. Вместе с тем найдены пары столь же естественные, но не являющиеся К-монотонными (см., например, [7]). Общего критерия, устанавливающего, являются ли данные пары равномерно относительно К-монотонными, не существует. Более того, эта задача не решена полностью даже для пар симметричных пространств [8]. Большую сложность представляет проверка неравенства (2) для произвольных векторов $x$ и $y$. В этом смысле наличие более простого аналога (2) (без вычисления инфимумов) может оказаться чрезвычайно полезным [6].

В настоящей работе мы будем рассматривать весовые пары вида

$$\overline{X}_w := (X, X(w)),$$

где $w$ — строго положительная конечная измеримая функция на $T$,

$$\|x\|_{X(w)} := \|xw\|_X.$$

Введем обозначение

$$\overline{K}(s, x, X, X(w)) := \|x\chi_{\{sw(t)\ge 1\}}\|_X + s\|x\chi_{\{sw(t)<1\}}\|_{X(w)}.$$

Очевидно, что для любого $w$ и любого вектора $x \in X + X(w)$ выполняется

$$K(s, x, X, X(w)) \le \overline{K}(s, x, X, X(w)) \le 2K(s, x, X, X(w)).$$

Таким образом, способ разбиения вектора на две составляющие при вычислении К-функционала на весовой паре определяется исключительно весом $w$.

Цвикель и Нильсон показали, что пары $(X_1(w_1), X_2(w_2))$, где $X_1$, $X_2$ — порядково непрерывные решетки со свойством Фату, К-монотонны для произвольных весов $w_1$, $w_2$, если и только если $X_1$ и $X_2$ обладают свойством разложимости [9] (в указанной работе рассматривается даже несколько более общая ситуация). Напомним, что решетка $X$ *разложима,* если для любого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ и любого (формального) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ элементов $X$ таких, что $f_n f_m = 0$, $g_n g_m = 0$ для любых $n \ne m$, $\|g_n\|_X \le \|f_n\|_X$, $n = 1, 2, \dots$, выполняется $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \in X$ и $\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n\right\|_X \le C_D \left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_X$ с константой, не зависящей от выбора $f_n$, $g_n$. Известно, что разложимость порядково непрерывной решетки со свойством Фату возможна только в случае ее совпадения с весовым $L_p$-пространством [10]. Таким образом, теорема Цвикеля — Нильсона является в определенном смысле обратной к теореме Спарра. В этой связи большой интерес представляет нахождение более слабых аналогов свойства разложимости — эквивалентов относительной K-монотонности весовых пар $\overline{X}_{w_1}$, $\overline{X}_{w_2}$ для специфических весов $w_1$, $w_2$. Так, в [11] показано, что относительная K-монотонность пар пространств последовательностей $(E, E(2^{-k}))$, $(E, E(u2^{-k}))$, равномерная по всем $u > 0$, эквивалентна равномерной K-монотонности пары $(E, E(2^{-k}))$ в сумме с инвариантностью $E$ относительно сдвига. Основополагающие идеи по вопросу K-монотонности так называемых «экспоненциально разделенных» пар изложены Калтоном в работе, посвященной исследованию пар симметричных пространств [8]. Калтоном доказана теорема, из которой, в частности, следует, что пара вида $(E, E(2^{-k}))$, где $E$ — пространство последовательностей со свойством Фату, является равномерно K-монотонной, если и только если $E$ обладает так называемыми свойствами левостороннего и правостороннего сдвигов (LSP и RSP). Вместе оба эти свойства эквивалентны разложимости $E$ при следующих ограничениях на $f_n$, $g_n$:

$$\operatorname{supp} f_n \cup \operatorname{supp} g_n < \operatorname{supp} f_{n+1} \cup \operatorname{supp} g_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, m-1,$$

где запись $A < B$ для множеств $A, B \subset \mathbb{Z}$ означает, что $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$; $m$ — любое натуральное число; $f_n = g_n = 0$, $n > m$. В настоящей работе эта теорема Калтона обобщается на случай произвольных пар $\overline{X}_{w_1}$, $\overline{X}_{w_2}$. На основе полученного критерия выводятся следствия для пространств последовательностей и произвольных банаховых решеток. В разд. 2 определяется свойство весовой разложимости банаховых решеток и доказано несколько утверждений, обосновывающих введение этого нового понятия. Разд. 3 посвящен проблеме K-монотонности весовых пар. В нем устанавливается связь весовой разложимости с относительной K-монотонностью соответствующих весовых пар для решеток со свойством Фату.

Обозначения, используемые в тексте: $f \overset{C}{\sim} g$ — величины $f$ и $g$ эквивалентны с константой $C$, т. е. $C^{-1} f \le g \le Cf$ (если $f$ и $g$ — измеримые функции, то это неравенство должно выполняться п. в.); $P_M$ — оператор проектирования на множество $M \subset T$, т. е. $P_M x := x\chi_M$.

## 2. Разложимость банаховых решеток

Пусть $X$ — банахова решетка функций со свойством Фату, определенная на пространстве с $\sigma$-конечной мерой $(T, \Sigma, \mu)$. Пусть также $w_1$ и $w_2$ — положительные конечные измеримые функции на $(T, \Sigma, \mu)$ (весовые функции). Для веса $w$ и произвольного $S \subset T$ через $w(S)$ обозначим множество $\{z \in \mathbb{R} : z = w(s)$ для некоторого $s \in S\}$. Будем говорить, что решетка $X$ *разложима относительно весов* $w_1, w_2$ или, иначе, обладает свойством $D(w_1, w_2)$, если существует $C_D > 0$ такое, что для любого натурального $n$ и любых векторов $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$, удовлетворяющих условиям:

$$\|x_i\|_X = \|y_i\|_X, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\text{для любых } 1 \le i < n,\ a \in w_1(\operatorname{supp} x_i) \cup w_2(\operatorname{supp} y_i) \\ \text{и } b \in w_1(\operatorname{supp} x_{i+1}) \cup w_2(\operatorname{supp} y_{i+1}) \text{ имеет место неравенство } a \ge 2b,\end{gathered} \tag{4}$$

выполнено соотношение

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_X \overset{C_D}{\sim} \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i\right\|_X . \tag{5}$$

Замечание 1. Несложно видеть, что для любой решетки и произвольных весовых функций свойство $D(w_1, w_2)$ эквивалентно $D(1/w_1, 1/w_2)$, $D(w_2, w_1)$.

Наличие у данной решетки $X$ свойства разложимости (в обычном смысле) эквивалентно тому, что $X$ равномерно разложима относительно произвольных весов $w_1$ и $w_2$. В частности, все $L_p$-пространства разложимы относительно любых весов. В то же время среди пространств последовательностей существуют такие, которые не обладают свойством $D(w, w)$ ни для какого нетривиального (т. е. не эквивалентного единице) веса $w$. Действительно, из [8, предложение 2.3] следует, что симметричное пространство последовательностей со свойством Фату разложимо относительно нетривиального веса, если и только если оно совпадает с $l_p$, $1 \le p \le \infty$.

Далее будем писать $D(w)$ вместо $D(w, w)$.

Очевидно, если $w_1 \sim w_1'$ и $w_2 \sim w_2'$, то любая решетка, обладающая свойством $D(w_1, w_2)$, обладает также свойством $D(w_1', w_2')$. В частности, мы можем вместо веса $w$ рассматривать вес $2^{[\log_2 w]}$, т. е. эквивалентный вес со значениями из множества $\{2^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$. Пусть теперь $f : \{2^k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — любая неубывающая строго положительная функция. Нетрудно видеть, что если пространство $X$ обладает свойством $D(w)$, то оно также имеет свойство $D(f(2^{[\log_2 w]}))$. В частности, справедливо

**Предложение 1.** *Пусть $E$ — решетка последовательностей со свойством Фату, разложимая относительно веса $w(k) = 2^{-k}$. Тогда $E$ обладает свойством $D(w')$ для любого невозрастающего веса $w'$.*

Совокупность весов вида $f(2^{[\log_2 w]})$ для всех неубывающих положительных $f$ и для всех $w$ из множества $W$ будем обозначать через $F(W)$, а множество всех весов, эквивалентных некоторому весу из $W$, — через $Eq(W)$. Оказывается, что в случае монотонных весов композиция операции $F$ и перехода к эквивалентной функции дает все веса, для которых соответствующее свойство разложимости справедливо для любой решетки, обладающей $D(w)$.

**Предложение 2.** *Пусть $T$ — линейно упорядоченное множество, $w$ — некоторая невозрастающая функция на $(T, \Sigma, \mu)$ и $w'$ — невозрастающая весовая функция, не принадлежащая множеству $Eq(F(Eq(F(w))))$. Тогда существует решетка $X$ функций на $(T, \Sigma, \mu)$, обладающая свойством $D(w)$, но не разложимая относительно веса $w'$.*

Доказательство. Пусть

$$A_k := \{t \in T : [\log_2 w(t)] = k\}; \quad B_k := \{t \in T : [\log_2 w'(t)] = k\},$$

где $-\infty < k < +\infty$. Не ограничивая общности, можем считать, что для каждого $k$ либо $\mu B_k > 0$, либо $B_k = \varnothing$. Покажем, что

$$r := \sup_k \operatorname{card}\{i : B_i \cap A_k \neq \varnothing\} = \infty.$$

Действительно, предположим обратное. Пусть $v$ — весовая функция, равная $2^{rk}$ на $A_k$. Очевидно, $v \in F(w)$. С другой стороны, $v$ эквивалентна весу $v'$, принимающему на каждом непустом пересечении $A_k \cap B_i$ значение $2^{rk+m_{k,i}}$, где $m_{k,i} = \mathrm{card}\{j < i : A_k \cap B_j \neq \varnothing\}$. Легко видеть, что вес $v'$ невозрастающий и, более того, $2^{[\log_2 w']} \in F(v')$, т. е. $w' \in Eq(F(v'))$. Соответственно предположение неверно и $r = \infty$. Определим теперь норму в $X$ формулой

$$\|x\|_X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x\chi_{A_k \cap B_i}\|_{L_1} e_i \right\|_E ,$$

где $E$ — симметричное пространство последовательностей на $\mathbb{Z}$ со свойством Фату, не разложимое ни для какого нетривиального веса. Нетрудно видеть, что $X$ обладает $D(w)$. Действительно, пусть $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ взяты из определения свойства разложимости. Тогда с необходимостью для всех $i \neq j$

$$\{k : \mathrm{supp}\, x_i \cap A_k \neq \varnothing\} \cap \{k : \mathrm{supp}\, x_j \cap A_k \neq \varnothing\} = \varnothing, \tag{6}$$

$$\{k : \mathrm{supp}\, y_i \cap A_k \neq \varnothing\} \cap \{k : \mathrm{supp}\, y_j \cap A_k \neq \varnothing\} = \varnothing, \tag{7}$$

откуда следует, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\|_X .$$

Выберем произвольное натуральное $N$. Так как $r = \infty$, найдутся $k$, $i_1 < i_2 < \dots < i_N$ такие, что $\mu(A_k \cap B_{i_j}) > 0$, $1 \leq j \leq N$. Пусть $z_j \in X$, $\mathrm{supp}\, z_j \subset A_k \cap B_{i_j}$, $\|z_j\|_X = 1$. Тогда $N$-мерное линейное подпространство, натянутое на векторы $z_j$, с нормой, индуцированной пространством $X$, изометрично подпространству $E$, образованному векторами $e_1, \dots, e_N$. В силу произвольности выбора $N$ отсюда следует, что если $X$ обладает свойством $D(w')$, то с необходимостью решетка $E$ разложима относительно веса $2^{-k}$, что противоречит выбору этого пространства. $\square$

Замечание 2. Несложно видеть, что $Eq(F(Eq(F(w))))$ содержит все невозрастающие веса, получаемые из $w$ посредством применения конечного числа операций $F$ и $Eq$. Вместе с тем множество $Eq(F(Eq(w)))$ подобным свойством в общем случае не обладает. Например, несложно показать, что вес $(2^{-2^k})_{k=1}^{\infty}$ не принадлежит множеству $Eq(F(Eq(2^{-k/2})))$.

Поскольку пространства $L_p$ являются практически единственным примером банаховых решеток, разложимых относительно любых весов, то весовое свойство разложимости можно рассматривать как характеристику «близости» к $L_p$. Следующее утверждение демонстрирует такой подход.

**Предложение 3.** *Пусть $X$ — банахова решетка со свойством Фату на пространстве с мерой $(T, \Sigma, \mu)$, $w$ — весовая функция и $A_k = \{t \in T : [\log_2 w(t)] = k\}$, $-\infty < k < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

*(1) пространство $X$ разложимо относительно весов $w$ и $w' \in F(w)$ равномерно по всему множеству $F(w)$;*

*(2) для некоторого $C > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, и произвольного $x \in X$*

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|x\chi_{A_k}\|_X^p \right)^{1/p} \overset{C}{\sim} \|x\|_X . \tag{8}$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Для каждого множества $A_k$ с положительной мерой выберем вектор $z_k \in X$, $\mathrm{supp}\, z_k \subset A_k$, $\|z_k\|_X = 1$. Рассмотрим подпространство $E$ решетки $X$ с базисом $(z_k)$ (будем отождествлять $E$ с соответствующим пространством последовательностей, определенном на $\mathbb{J} \subset \mathbb{Z}$). По условию $E$ равномерно разложима относительно весов $2^{-k}$, $w'$, где $w'$ — произвольный невозрастающий вес. Пусть $(u_n)_{n\in\mathbb{J}}$ — некоторая нормированная блок-базисная последовательность в $E$. Положим $w'|_{\operatorname{supp} u_n} = 2^{-n}$. Поскольку для $E$ выполнено свойство $D(w, w')$, то $(u_n)$ эквивалентна векторному базису $(z_k)_{k\in\mathbb{J}}$ в $E$. Следовательно, базис $(z_k)$ совершенно однородный, и по теореме Зиппина (см., например, [12, теорема 9.1.8]) $E = l_p$ для некоторого $1 \le p < \infty$ или $E = c_0$. Это, в свою очередь, влечет (8).

(2) $\Rightarrow$ (1). Наши рассуждения будут аналогичны приведенным в доказательстве предложения 2. Пусть $w' \in F(w)$, векторы $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ взяты из определения свойства разложимости для $w, w'$. Тогда для носителей $x_i, y_i$ выполнено (6), (7), откуда следует, что

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_X \overset{C}{\sim} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_{A_k}\right\|_X^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|x_i\chi_{A_k}\|_X^p\right)^{1/p}$$
$$\overset{C}{\sim} \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_X^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|_X^p\right)^{1/p} \overset{C}{\sim} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|y_i\chi_{A_k}\|_X^p\right)^{1/p}$$
$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} y_i\chi_{A_k}\right\|_X^p\right)^{1/p} \overset{C}{\sim} \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i\right\|_X. \quad \square$$

## 3. Связь весовой разложимости с K-монотонностью

В этом разделе сформулируем и докажем теорему, которая устанавливает критерий равномерной относительной K-монотонности весовых пар, построенных по некоторой банаховой решетке со свойством Фату. Основные идеи, используемые в доказательстве, заимствованы из работы [8].

**Теорема 1.** *Пусть $X$ — банахова решетка со свойством Фату, определенная на пространстве $(T, \Sigma, \mu)$ и $w_1$, $w_2$ — весовые функции. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *пары $\overline{X}_{w_1}$ и $\overline{X}_{w_2}$ равномерно относительно K-монотонны;*

(2) *$X$ обладает свойством весовой разложимости $D(w_1, w_2)$.*

*Более того, константа весовой разложимости $C_D$ и константа равномерной K-монотонности $C_K$ связаны соотношением $C^{-1}C_D \le C_K \le \widetilde{C}C_D$, где $C$ зависит только от $C_K$, а $\widetilde{C}$ — абсолютная константа.*

Сначала рассмотрим несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** *Пусть $X$ — банахова решетка со свойством Фату, $w_1$ и $w_2$ — весовые функции, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ — семейство векторов из $X$, для которых выполнено (4), и, кроме того,*

$$\|x_i\|_X \ge \|y_i\|_X; \tag{9}$$

$$\inf\{w_1(t) : t \in \operatorname{supp} x_i\} \ge \sup\{w_2(t) : t \in \operatorname{supp} y_i\}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{10}$$

*Пусть также пары $\overline{X}_{w_1}$ и $\overline{X}_{w_2}$ равномерно относительно K-монотонны с константой $C_K$. Тогда найдется линейный ограниченный оператор $T : \overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}$*

*с нормой, не превосходящей* $C_1C_K$ (где $C_1$ — *абсолютная константа, зависящая только от* $C_K$), *такой, что для всех* $1 \le i \le n$

$$\operatorname{supp} Tx_i \subset \operatorname{supp} y_i \tag{11}$$

*и*

$$\|Tx_i - y_i\|_X \le \frac{1}{2}\|y_i\|_X. \tag{12}$$

Доказательство. В силу линейности искомого оператора достаточно доказать утверждение для случая $\|x_i\|_X = 2^{i/2}$. Более того, можем считать, что $\|x_i\|_X = \|y_i\|_X$, $i = 1, \dots, n$. Действительно, ввиду (11) любой оператор вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i P_{\operatorname{supp} y_i} T P_{\operatorname{supp} x_i}$ для $0 \le \alpha_i \le 1$ будет действовать из $\overline{X}_{w_1}$ в $\overline{X}_{w_2}$ с нормой, не превосходящей норму $T$. Покажем сначала, что для любого подмножества $\mathbb{J} \subset \{1, \dots, n\}$

$$4\left(\frac{4}{2-\sqrt{2}}+1\right) K\Big(s, \sum_{i\in\mathbb{J}} x_i, X, X(w_1)\Big) \ge K\Big(s, \sum_{i\in\mathbb{J}} y_i, X, X(w_2)\Big), \quad s > 0.$$

Зафиксируем $s$ и $i \in \mathbb{J}$ и рассмотрим две ситуации.

1. $s \cdot \sup\{w_2(t) : t \in \operatorname{supp} y_i\} \ge 1$. Очевидно, тогда $\overline{K}(s, x_i, X, X(w_1)) = \|x_i\|_X$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\overline{K}(s, y_i, X, X(w_2)) &= \|y_i\chi_{\{sw_2(t)\ge 1\}}\|_X + s\|y_i\chi_{\{sw_2(t)<1\}}\|_{X(w_2)} \\ &\le \|y_i\chi_{\{sw_2(t)\ge 1\}}\|_X + \|y_i\chi_{\{sw_2(t)<1\}}\|_X \le 2\overline{K}(s, x_i, X, X(w_1)).\end{aligned}$$

2. $s \cdot \sup\{w_2(t) : t \in \operatorname{supp} y_i\} < 1$. В этом случае

$$\begin{aligned}\overline{K}(s, y_i, X, X(w_2)) &= s\|y_i\|_{X(w_2)} \\ &\le s \cdot \sup\{w_2(t) : t \in \operatorname{supp} y_i\}(\|x_i\chi_{\{sw_1(t)\ge 1\}}\|_X + \|x_i\chi_{\{sw_1(t)<1\}}\|_X) \\ &\le \overline{K}(s, x_i, X, X(w_1)).\end{aligned}$$

Таким образом, всегда $\overline{K}(s, y_i, X, X(w_2)) \le 2\overline{K}(s, x_i, X, X(w_1))$. Заметим, что в силу определения векторов $x_1, \dots, x_n$ выражение

$$\min(\|x_i\chi_{\{sw_1(t)\ge 1\}}\|_X, \|x_i\chi_{\{sw_1(t)<1\}}\|_{X(w_1)})$$

является строго положительным не более чем для одного индекса из множества $\mathbb{J}$. Если для некоторого $i \in \mathbb{J}$ выполнено $\|x_i\chi_{\{sw_1(t)\ge 1\}}\|_X = 0$, то для любого $n \ge j > i$

$$\begin{aligned}\overline{K}(s, x_j, X, X(w_1)) &= s\|x_j\|_{X(w_1)} \le s\|x_j\|_X \sup\{w_1(t) : t \in \operatorname{supp} x_j\} \\ &\le 2^{(i-j)/2} s\|x_i\|_X \inf\{w_1(t) : t \in \operatorname{supp} x_i\} \\ &\le 2^{(i-j)/2} s\|x_i\|_{X(w_1)} = 2^{(i-j)/2}\overline{K}(s, x_i, X, X(w_1)).\end{aligned}$$

Аналогично если $\|x_i\chi_{\{sw_1(t)<1\}}\|_{X(w_1)} = 0$, то для любого $1 \le j < i$

$$\overline{K}(s, x_j, X, X(w_1)) = \|x_j\|_X = 2^{(j-i)/2}\|x_i\|_X = 2^{(j-i)/2}\overline{K}(s, x_i, X, X(w_1)).$$

Из вышесказанного следует, что для данного $s$ найдутся $i_1 \le i_2 \le i_3$ из множества $\mathbb{J}$ такие, что

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{J}} \overline{K}(s, x_i, X, X(w_1)) &< \overline{K}(s, x_{i_2}, X, X(w_1)) \\ &+ \frac{2}{2-\sqrt{2}}(\overline{K}(s, x_{i_1}, X, X(w_1)) + \overline{K}(s, x_{i_3}, X, X(w_1))).\end{aligned}$$

Теперь можем оценить K-функционал для суммы $y_i$:

$$K\Big(s,\sum_{i\in\mathbb{J}} y_i, X, X(w_2)\Big) \le 2\sum_{i\in\mathbb{J}} \overline{K}(s, x_i, X, X(w_1))$$
$$\le 2\left(\frac{4}{2-\sqrt{2}}+1\right)\max_{i\in\mathbb{J}} \overline{K}(s,x_i,X,X(w_1)) \le C_2 K\Big(s,\sum_{i\in\mathbb{J}} x_i, X, X(w_1)\Big),$$

где $C_2 = 4\big(\frac{4}{2-\sqrt{2}}+1\big)$.

Положим теперь $\mathbb{J}_u := \{i : i \equiv u \mod M\}$, где $0 \le u \le M-1$, а $M$ выбрано так, что $C_2C_K 2^{-kM/2} \le 8^{-k}$ для любого положительного $k$. В силу свойства K-монотонности найдется оператор $T_u : \overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}$ с нормой, не превосходящей $C_2C_K$, такой, что $T_u \sum\limits_{i\in\mathbb{J}_u} x_i = \sum\limits_{i\in\mathbb{J}_u} y_i$. Не ограничивая общности, можем считать, что

$$T_u = \sum_{i\in\mathbb{J}_u}\sum_{j\in\mathbb{J}_u} P_{\operatorname{supp} y_j} T_u P_{\operatorname{supp} x_i}.$$

Пусть $i, j \in \mathbb{J}_u$, $i - j = kM$, $k > 0$. Оценим норму вектора $P_{\operatorname{supp} y_i} T_u x_j$:

$$\|P_{\operatorname{supp} y_i} T_u x_j\|_X \le C_2C_K\|x_j\|_X = C_2C_K 2^{-kM/2}\|y_i\|_X \le 8^{-k}\|y_i\|_X. \tag{13}$$

Аналогично

$$\|P_{\operatorname{supp} y_j} T_u x_i\|_X \le \frac{1}{\inf\{w_2(t) : t \in \operatorname{supp} y_j\}}\|P_{\operatorname{supp} y_j} T_u x_i\|_{X(w_2)}$$
$$\le C_2C_K\frac{\sup\{w_1(t) : t\in \operatorname{supp} x_i\}}{\inf\{w_2(t) : t\in\operatorname{supp} y_j\}}\|y_i\|_X \le C_2C_K 2^{-kM/2}\|y_j\|_X \le 8^{-k}\|y_j\|_X. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует, что для любого $i \in \mathbb{J}_u$

$$\Big\|\sum_{j\ne i} P_{\operatorname{supp} y_i} T_u x_j\Big\|_X < \frac{1}{2}\|y_i\|_X,$$

откуда

$$\|P_{\operatorname{supp} y_i} T_u x_i - y_i\|_X < \frac{1}{2}\|y_i\|_X.$$

Нетрудно видеть, что для любых $k_1, \dots, k_n \in \{-1, 1\}$

$$\Big\|\sum_{i\in\mathbb{J}_u}\sum_{j\in\mathbb{J}_u} k_ik_j P_{\operatorname{supp} y_j} T_u P_{\operatorname{supp} x_i}\Big\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}} = \|T_u\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}},$$

откуда

$$\Big\|\sum_{i\in\mathbb{J}_u} P_{\operatorname{supp} y_i} T_u P_{\operatorname{supp} x_i}\Big\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}} \le \|T_u\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}}.$$

Положим

$$T := \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{i\in\mathbb{J}_u} P_{\operatorname{supp} y_i} T_u P_{\operatorname{supp} x_i}.$$

Элементарно проверяется, что $T$ удовлетворяет (11), (12) и

$$\|T\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}} \le MC_2C_K. \quad \square$$

**Лемма 2.** *Пусть $f$, $g$ — две неубывающие неотрицательные функции на $(0;\infty)$, $f(s) \geq g(s)$ для всех $s > 0$, и пусть $\lim\limits_{s\to 0} f(s) = 0$. Тогда найдутся $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ и система точек $\{s_k\}_{k=-\infty}^{\alpha}$, $s_k > 0$, такие, что*

1) $s_{k+1} \geq 2s_k$, $-\infty < k < \alpha$;

2) *для любого допустимого $k$ верно хотя бы одно из двух следующих утверждений:*

$$f(s_k) - f(s_{k-1}) \geq \frac{1}{2} g(s_k) \quad \text{и} \quad s_{k-1} \geq \frac{1}{4} s_k; \tag{15}$$

$$f(s_{k-1}) - f(s_{k-3}) \geq \frac{1}{16} g(s_k); \tag{16}$$

3) *если $\alpha < +\infty$, то*

$$f(s_\alpha) - f(s_{\alpha-2}) \geq \frac{1}{4} \lim_{s\to\infty} g(s).$$

Доказательство. Выберем произвольно точку $s_0$ и будем строить последовательность $(s_k)$ (и в положительном, и в отрицательном направлениях) в соответствии со следующим алгоритмом. Пусть для $n > 0$ определены $s_0$, $s_\delta$, $s_{2\delta}, \ldots, s_{n\delta}$ и требуется определить $s_{(n+1)\delta}$, $\delta \in \{-1; 1\}$.

1. Если $f(4^\delta s_{n\delta}) \leq \frac{1}{2} f(s_{n\delta})$ (когда $\delta = -1$) или $f(4^\delta s_{n\delta}) \geq 2f(s_{n\delta})$ (в случае $\delta = 1$), то полагаем $s_{(n+1)\delta} = 4^\delta s_{n\delta}$.

2. Иначе пусть

$$A_{n,\delta} := \{s : \delta s > \delta s_{n\delta}, f(s) \in [f(s_{n\delta})/4; f(s_{n\delta})/2] \cup [2f(s_{n\delta}); 4f(s_{n\delta})]\}.$$

Если $A_{n,\delta}$ непусто, то в качестве $s_{(n+1)\delta}$ можно взять любую точку из $A_{n,\delta}$.

3. Иначе пусть

$$B_{n,\delta} := \{s : \delta s > \delta s_{n\delta}, f(s) \leq f(s_{n\delta})/2 \text{ или } f(s) \geq 2f(s_{n\delta})\}.$$

Если $B_{n,\delta} = \varnothing$ (это возможно лишь при $\delta = 1$), то присваиваем $\alpha$ значение $n$; построение последовательности в положительном направлении на этом заканчивается. Если же $B_{n,\delta} \neq \varnothing$, то полагаем $s_{(n+1)\delta} = \frac{1}{2} \inf B_{n,\delta}$, когда $\delta = 1$, и $s_{(n+1)\delta} = 2 \sup B_{n,\delta}$, когда $\delta = -1$.

Несложно видеть, что $s_{k+1} \geq 2s_k$ для всех $-\infty < k < \alpha$. Действительно, если для некоторых $n$ и $\delta$ точка $s_{(n+1)\delta}$ построена по правилу 2 или 3, то с необходимостью

$$(s_{n\delta}/4; 4s_{n\delta}) \cap A_{n,\delta} = (s_{n\delta}/4; 4s_{n\delta}) \cap B_{n,\delta} = \varnothing$$

и, следовательно, $s_{(n+1)\delta} \notin \left(\frac{1}{2}s_{n\delta}; 2s_{n\delta}\right)$. Далее будем говорить, что интервал с граничными точками $s_{n\delta}$ и $s_{(n+1)\delta}$ *построен по правилу $j$ алгоритма*, $1 \leq j \leq 3$, если $s_{(n+1)\delta}$ построена по правилу $j$.

Пусть $I_j$ — множество интервалов, построенных по правилу $j$, $1 \leq j \leq 3$. Пусть $k > 0$. Очевидно, если $[s_{k-1}; s_k] \in I_3$, то $f(4s_k) \geq 2f(s_k)$ (иначе интервал следовало выбирать по правилу 2). Аналогично если $k \leq 0$ и $[s_{k-1}; s_k] \in I_3$, то $f(s_{k-1}/4) \leq \frac{1}{2} f(s_{k-1})$. Таким образом, любой интервал из $I_3$ имеет хотя бы одну общую граничную точку с интервалом из $I_1$.

Рассмотрим произвольный интервал $[s_{k-1}; s_k]$. Если $[s_{k-1}; s_k] \in I_1$, то (15) выполняется для $k$. Иначе $4f(s_{k-1}) \geq f(s_k)$. Если $[s_{k-2}; s_{k-1}] \in I_1 \cup I_2$, то

$$f(s_{k-1}) - f(s_{k-3}) \geq \frac{1}{8} g(s_k).$$

Если же $[s_{k-2}; s_{k-1}] \in I_3$, то $[s_{k-3}; s_{k-2}] \in I_1$ и

$$f(s_{k-1}) - f(s_{k-3}) \geq \frac{1}{16} g(s_k).$$

Следовательно, (15) или (16) выполняется для любого $k$.

Пусть теперь $\alpha < \infty$. Очевидно, $2f(s_\alpha) \geq \lim\limits_{s\to\infty} g(s)$, и

$$f(s_\alpha) - f(s_{\alpha-2}) \geq \frac{1}{2} f(s_\alpha) \geq \frac{1}{4} \lim_{s\to\infty} g(s). \quad \square$$

**Лемма 3.** *Пусть пространство $X$ со свойством Фату разложимо относительно $w_1$, $w_2$, $x, y \in X$,*

$$\|x\chi_{\{sw_1(t)\geq 1\}}\|_X \geq \frac{1}{2}\|x\|_X, \quad \|x\chi_{\{sw_1(t)\geq 1\}}\|_X \geq \|y\chi_{\{sw_2(t)\geq 1\}}\|_X, \quad s > 0.$$

*Тогда существует линейный оператор $T : \overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}$, переводящий $x$ в $y$, с нормой, не превосходящей $12C_D$.*

Доказательство. Выберем произвольно точку $s_0 > 0$. Пусть $s_k$ определено, $k \leq 0$. Поскольку норма в $X$ порядково полунепрерывна, найдется $s_{k-1} > 0$, $2s_{k-1} \leq s_k$:

$$\|x\chi_{I_k}\|_X \geq \frac{1}{4}\|x\|_X,$$

где $I_k = \left\{t : \frac{1}{s_k} \leq w_1(t) < \frac{1}{s_{k-1}}\right\}$. Последовательное применение описанной выше процедуры даст семейство точек $(s_k)_{k=-\infty}^0$, $\lim\limits_{k\to-\infty} s_k = 0$. Пусть теперь $T_k : X \to X$ — линейный оператор, $T_k = P_{J_{k+1}} T_k P_{I_k}$, где $J_k = \left\{t : \frac{1}{s_k} \leq w_2(t) < \frac{1}{s_{k-1}}\right\}$, $-\infty < k \leq 0$, $s_1 := +\infty$. Потребуем, чтобы

$$T_k(x\chi_{I_k}) = y\chi_{J_{k+1}}$$

и $\|T\|_{X\to X} \leq 4$. Последнего можно добиться, воспользовавшись теоремой Хана — Банаха. Положим $T := \sum\limits_{k=-\infty}^{0} T_k$. Очевидно, $Tx = y$. Далее, несложно видеть, что $\|T\|_{X\to X} \leq 12C_D$. Действительно, если $z = \sum\limits_{k=-\infty}^{0} z\chi_{I_k}$ — вектор из $X$, то для любых $0 \leq u \leq 2$ и $n$ векторы $z\chi_{I_{-3n-u}}$, $z\chi_{I_{-3(n-1)-u}}, \ldots$, $z\chi_{I_{-u}}$, $T(z\chi_{I_{-3n-u}})$, $T(z\chi_{I_{-3(n-1)-u}}), \ldots$, $T(z\chi_{I_{-u}})$ удовлетворяют (4). Поскольку $\sup\{w_2(t) : t \in J_{k+1}\} \leq \inf\{w_1(t) : t \in I_k\}$, для произвольного $v \in X(w_1)$

$$\|Tv\|_{X(w_2)} \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{0} \sup\{w_2(t) : t \in J_{k+1}\} T_k v \right\|_X$$
$$\leq \|T\|_{X\to X} \left\| \sum_{k=-\infty}^{0} \inf\{w_1(t) : t \in I_k\} v\chi_{I_k} \right\|_X \leq 12C_D \|v\|_{X(w_1)}.$$

**Лемма 4.** *Пусть $X$ — банахова решетка такая, что для всех весов $w_1$ и $w_2$, для которых $X$ обладает свойством $D(w_1, w_2)$, и для произвольных $x \in X + X(w_1)$, $y \in X + X(w_2)$, удовлетворяющих соотношению*

$$\|x\chi_{\{sw_1(t)\geq 1\}}\|_X \geq \|y\chi_{\{sw_2(t)\geq 1\}}\|_X, \quad s > 0, \tag{17}$$

*найдется оператор* $T : \overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}$, *переводящий* $x$ *в* $y$, *с нормой*

$$\|T\|_{\overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}} \le C_D C,$$

*где* $C_D$ — *константа разложимости, а* $C > 0$ *не зависит от выбора* $w_1$ *и* $w_2$. *Тогда для всех таких весов пары* $\overline{X}_{w_1}$, $\overline{X}_{w_2}$ *равномерно относительно* K*-монотонны с константой* $64C_D C$.

Доказательство. Пусть решетка $X$ разложима относительно $w_1$, $w_2$ с константой $C_D$. Рассмотрим векторы $u \in X + X(w_1)$, $v \in X + X(w_2)$, для которых

$$\|u\chi_{\{sw_1(t)\le 1\}}\|_{X(w_1)} \ge \|v\chi_{\{sw_2(t)\le 1\}}\|_{X(w_2)}, \quad s > 0. \tag{18}$$

Элементарно проверяется, что $uw_1 \in X + X(1/w_1)$, $vw_2 \in X + X(1/w_2)$ и $uw_1, vw_2$ удовлетворяют (17) с весами $1/w_1$, $1/w_2$. Поскольку $X$ разложима относительно $1/w_1$, $1/w_2$, найдется линейный ограниченный оператор $T : \overline{X}_{1/w_1} \to \overline{X}_{1/w_2}$ такой, что $T(uw_1) = vw_2$. Отсюда немедленно следует существование оператора $T' : \overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}$, $T'u = v$.

Предположим сначала, что $w_1 = 2^{[\log_2 w_1]}$, $w_2 = 2^{[\log_2 w_2]}$. Если теперь $a \in X + X(w_1)$, $b \in X + X(w_2)$, $\overline{K}(s, a, X, X(w_1)) \ge \overline{K}(s, b, X, X(w_2))$, $s > 0$, то, полагая $b' = \sum_{k\in M} b\chi_{\{2^k w_2(t)=1\}}$, где $M := \{k : 2\|a\chi_{\{2^k w_1(t)\ge 1\}}\|_X \ge \|b\chi_{\{2^k w_2(t)\ge 1\}}\|_X\}$, $b'' = b - b'$, получим, что для любого $s$

$$\begin{aligned}\|b'\chi_{\{sw_2(t)\ge 1\}}\|_X &= \Big\|b \sum_{\substack{k\in M,\\ 2^k \le s}} \chi_{\{2^k w_2(t)=1\}}\Big\|_X \\ &\le \|b\chi_{\{s_1 w_2(t)\ge 1\}}\|_X \le 2\|a\chi_{\{s_1 w_1(t)\ge 1\}}\|_X \le 2\|a\chi_{\{sw_1(t)\ge 1\}}\|_X,\end{aligned}$$

где $s_1 := \max\{2^k : k \in M, 2^k \le s\}$. Отметим, что для любого $k \notin M$ с необходимостью

$$2\|a\chi_{\{2^k w_1(t)\le 1\}}\|_{X(w_1)} \ge \|b\chi_{\{2^k w_2(t)\le 1\}}\|_{X(w_2)}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|b''\chi_{\{sw_2(t)\le 1\}}\|_{X(w_2)} &= \Big\|b \sum_{\substack{k\in \mathbb{Z}\setminus M,\\ 2^k \ge s}} \chi_{\{2^k w_2(t)=1\}}\Big\|_{X(w_2)} \\ &\le \|b\chi_{\{s_2 w_2(t)\le 1\}}\|_{X(w_2)} \le 2\|a\chi_{\{s_2 w_1(t)\le 1\}}\|_{X(w_1)} \le 2\|a\chi_{\{sw_1(t)\le 1\}}\|_{X(w_1)},\end{aligned}$$

где $s_2 := \min\{2^k : k \in \mathbb{Z} \setminus M, 2^k \ge s\}$. Значит, существуют линейные операторы $T', T'' : \overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}$, $\|T' + T''\|_{\overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}} \le 4C_D C$, $T'a = b'$, $T''a = b''$. Следовательно, пары $(X, X(w_1))$, $(X, X(w_2))$ равномерно относительно K-монотонны с константой $8C_D C$.

Пусть теперь $w_1$ и $w_2$ — произвольные веса, для которых $X$ обладает свойством $D(w_1, w_2)$ с константой $C_D$. Тогда $X$ разложимо относительно $w_1' := 2^{[\log_2 w_1]}$ и $w_2' := 2^{[\log_2 w_2]}$ с константой $2C_D$ и пары $(X, X(w_1'))$, $(X, X(w_2'))$ равномерно относительно K-монотонны с константой $8 \cdot 2C_D C$. Отсюда следует, что $(X, X(w_1))$, $(X, X(w_2))$ K-монотонны с константой $32 \cdot 2C_D C$. □

Доказательство теоремы 1. (1) ⇒ (2) Прежде всего отметим, что нам достаточно рассмотреть ситуацию, когда векторы $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, кроме (3) и (4), также удовлетворяют условиям (10). Действительно, допустим, что для таких векторов установлено (5). Несложно показать, что если пары $\overline{X}_{w_1}$ и

$\overline{X}_{w_2}$ равномерно относительно К-монотонны, то это же свойство (с той же константой) справедливо для пар $\overline{X}_{1/w_1}$ и $\overline{X}_{1/w_2}$. Следовательно, (5) выполняется также для векторов, удовлетворяющих условиям

$$\inf\{w_2(t) : t \in \operatorname{supp} y_i\} \geq \sup\{w_1(t) : t \in \operatorname{supp} x_i\}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Комбинируя (10) и (19), приходим к определению свойства разложимости для весов $w_1$, $w_2$.

Пусть пары $\overline{X}_{w_1}$ и $\overline{X}_{w_2}$ равномерно относительно К-монотонны с константой $C_K$, и пусть $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ удовлетворяют (3), (4), (10). По лемме 1 найдется линейный оператор $T_0$ с нормой $\|T_0\|_{\overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}} \leq C_1 C_K$ такой, что

$$\|T_0 x_i - y_i\|_X \leq \frac{1}{2}\|y_i\|_X, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Положим $y_i^{(1)} := y_i - T_0 x_i$. Пусть теперь для $k > 0$ определены $y_i^{(k)}$, причем $\|y_i^{(k)}\|_X \leq 2^{-k}\|x_i\|_X$. Из той же леммы 1 следует существование оператора $T_k$ с нормой $\|T_k\|_{\overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}} \leq 2^{-k} C_1 C_K$ такого, что

$$\|T_k x_i - y_i^{(k)}\|_X \leq \frac{1}{2}\|y_i^{(k)}\|_X \leq 2^{-k-1}\|x_i\|_X.$$

Определим $y_i^{(k+1)} := y_i^{(k)} - T_k x_i$ и перейдем к следующему шагу. Таким образом, мы можем построить последовательность операторов $(T_k)$. Пусть $T := \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k$. Очевидно, $\|T\|_{\overline{X}_{w_1} \to \overline{X}_{w_2}} \leq 2C_1 C_K$, и $Tx_i = y_i$, $1 \leq i \leq n$. Значит, для рассматриваемых векторов (5) выполняется с константой $2C_1 C_K$.

(2) $\Rightarrow$ (1) С учетом леммы 4 достаточно доказать существование линейного ограниченного оператора в случае, когда для $x \in X + X(w_1)$, $y \in X + X(w_2)$ выполняется (17).

Предположим сначала, что

$$\lim_{s \to 0} \|x \chi_{\{s w_1(t) \geq 1\}}\|_X = 0 \tag{20}$$

(это выполняется всегда, если норма в $X$ порядково непрерывна). Положим

$$f(s) := \|x \chi_{\{s w_1(t) \geq 1\}}\|_X; \quad g(s) := \|y \chi_{\{s w_2(t) \geq 1\}}\|_X.$$

Тогда для $f$ и $g$ выполняются условия леммы 2 и мы можем построить систему точек $\{s_k\}_{k=-\infty}^{\alpha}$ с указанными в лемме свойствами. Пусть $M$ — множество индексов $k$, для которых выполняется (15). Очевидно, для любого $k \in M$

$$2\|x \chi_{\{1/s_k \leq w_1(t) < 1/s_{k-1}\}}\|_X \geq \|y \chi_{\{1/s_k \leq w_2(t) < 1/s_{k-1}\}}\|_X.$$

Значит, найдется оператор $T_k : X \to X$, $\|T_k\|_{X \to X} \leq 2$,

$$T_k x \chi_{\{1/s_k \leq w_1(t) < 1/s_{k-1}\}} = y \chi_{\{1/s_k \leq w_2(t) < 1/s_{k-1}\}}$$

(мы можем считать, что $T = P_{\{1/s_k \leq w_2(t) < 1/s_{k-1}\}} T P_{\{1/s_k \leq w_1(t) < 1/s_{k-1}\}}$). Положим $T := \sum\limits_{k \in M} T_k$. Легко видеть, что $\|T\|_{X \to X} \leq 4C_D$. Поскольку $4s_{k-1} = s_k$, $k \in M$, то $\|T\|_{X(w_1) \to X(w_2)} \leq 16 C_D$. Пусть теперь $k \notin M$, т. е. для $k$ выполняется (16). В этом случае найдется оператор $T_k : X \to X$,

$$T_k x \chi_{\{1/s_{k-1} \leq w_1(t) < 1/s_{k-3}\}} = y \chi_{\{1/s_k \leq w_2(t) < 1/s_{k-1}\}},$$

$\|T_k\|_{X\to X} \leq 16$, $T = P_{\{1/s_k\leq w_2(t)<1/s_{k-1}\}}TP_{\{1/s_{k-1}\leq w_1(t)<1/s_{k-3}\}}$. Далее, используя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 3, несложно доказать, что оператор $T' := \sum\limits_{k\notin M} T_k$ ограниченно действует из $\overline{X}_{w_1}$ в $\overline{X}_{w_2}$:

$$\|T'\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}} \leq 4\cdot 16 C_D.$$

Наконец, если $\alpha < \infty$, то существует оператор $T''$ такой, что

$$T''x = y\chi_{\{w_2(t)<1/s_\alpha\}},$$

$\|T''\|_{\overline{X}_{w_1}\to\overline{X}_{w_2}} \leq 4$. Таким образом, $T + T' + T''$ — искомый оператор.

Пусть теперь $\lim\limits_{s\to 0}\|x\chi_{\{sw_1(t)\geq 1\}}\|_X > 0$. Выберем $s'$ такое, что

$$\|x\chi_{\{s'w_1(t)\geq 1\}}\|_X \leq 2\lim_{s\to 0}\|x\chi_{\{sw_1(t)\geq 1\}}\|_X,$$

и $s'' < s'$, для которого

$$2\|x\chi_{\{1/s'\leq w_1(t)<1/s''\}}\|_X \geq \|x\chi_{\{s'w_1(t)\geq 1\}}\|_X.$$

Положим $x_1 = x\chi_{\{s'w_1(t)\geq 1\}}$, $x_2 = x\chi_{\{s''w_1(t)<1\}}$, $y_1 = y\chi_{\{s'w_2(t)\geq 1\}}$, $y_2 = y - y_1$. Тогда для $x_1, y_1$ выполняются условия леммы 3, а для $3x_2$ и $y_2$ справедливы (17) и (20). Значит, мы сможем построить ограниченный линейный оператор, переводящий $x$ в $y$, что доказывает теорему. $\square$

Приведем следствия из теоремы 1, являющиеся фактически переформулировкой соответствующих предложений из предыдущего раздела.

**Следствие 1.** *Пусть $E$ — решетка последовательностей со свойством Фату такая, что пара $(E, E(2^{-k}))$ равномерно K-монотонна. Тогда для любого монотонного веса $w$ пара $(E, E(w))$ равномерно K-монотонна.*

Приведенное ниже утверждение — «вариант» теоремы Цвикеля — Нильсона для случая $X_1 = X_2 = X$.

**Следствие 2.** *Пусть $X$ — банахова решетка со свойством Фату на $(T,\Sigma,\mu)$, $w$ — весовая функция и $A_k := \{t\in T : [\log_2 w(t)] = k\}$, $-\infty < k < +\infty$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *пары $(X, X(w))$ и $(X, X(w'))$, где $w'$ пробегает множество $F(w)$, относительно K-монотонны равномерно по всему $F(w)$;*

(2) *для некоторого $C > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, и произвольного $x \in X$ справедливо*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|x\chi_{A_k}\|_X^p\right)^{1/p} \overset{C}{\sim} \|x\|_X.$$

Замечание 3. Если $X$ — пространство последовательностей, то пары $(X, X(2^{-k}))$ и $(X, X(w'))$ равномерно относительно K-монотонны с константой, не зависящей от выбора невозрастающего веса $w'$, тогда и только тогда, когда $X = l_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
**2.** *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. Berlin: Springer-Verl., 1976.
**3.** *Kalton N. J., Montgomery-Smith S.* Interpolation of Banach spaces // Handbook of the geometry of Banach spaces. Amsterdam: Elsevier; North-Holland, 2003. V. 2. P. 1131–1176.
**4.** *Ovchinnikov V. I.* The method of orbits in interpolation theory // Math. Rept. 1984. V. 1. P. 348–515.
**5.** *Brudnyĭ Yu. A., Krugljak N. Ya.* Interpolation functors and interpolation spaces. Amsterdam: North-Holland, 1991.
**6.** *Sparr G.* Interpolation of weighted $L_p$-spaces // Stud. Math. 1978. V. 62, N 1. P. 229–271.
**7.** *Maligranda L., Ovchinnikov V. I.* On interpolation between $L_1 + L_\infty$ and $L_1 \cap L_\infty$ // J. Funct. Anal. 1992. V. 107, N 2. P. 342–351.
**8.** *Kalton N. J.* Calderón couples of rearrangement invariant spaces // Stud. Math. 1993. V. 106, N 3. P. 233–277.
**9.** *Cwikel M., Nilsson P.* Interpolation of weighted Banach lattices // Mem. Amer. Math. Soc. 2003. V. 165, N 787. P. 1–105.
**10.** *Cwikel M., Nilsson P.* The coincidence of real and complex interpolation methods for couples of weighted Banach lattices // Interpolation spaces and allied topics in analysis. Berlin: Springer, 1984. P. 54–65. (Lect. Notes Math.; V. 1070).
**11.** *Astashkin S. V., Tikhomirov K. E.* On stability of K-monotonicity of Banach couples // Rev. Mat. Complut. 2009. DOI 10.1007/ s13163-009-0003-1.
**12.** *Albiac F., Kalton N. J.* Topics in Banach space theory. New York: Springer-Verl., 2006. (Grad. Texts Math.).


*Статья поступила 17 декабря 2009 г.*

Тихомиров Константин Евгеньевич,
Самарский гос. университет,
ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011
ktikhomirov@yandex.ru