Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 519.17

О ПЕРИОДИЧНОСТИ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК БЕСКОНЕЧНОЙ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ И ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТОК

С. А. Пузынина

Аннотация. Раскраска вершин графа G называется *r-совершенной*, если цветовой состав всякого шара радиуса r в графе G зависит только от цвета его центра. Параметры совершенной раскраски задаются матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, где n — число цветов, a_{ij} — число вершин цвета j в шаре с центром в вершине цвета i. Исследуется периодичность совершенных раскрасок графов бесконечной гексагональной и треугольной решеток. Доказано, что для любой 1-совершенной раскраски бесконечной треугольной и любой 1- и 2-совершенной раскраски бесконечной гексагональной решеток существует периодическая совершенная раскраска с той же матрицей параметров. Периодичность совершенных раскрасок для больших r исследована ранее.

Ключевые слова: совершенная раскраска, бесконечный граф, гексагональная решетка, треугольная решетка, периодичность.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ — граф, $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество цветов, которые для краткости обозначаются натуральными числами. *Раскраской* (вершин) графа G в n цветов называется сюръективное отображение из множества вершин графа в множество цветов:

$$\varphi : V \to \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — целочисленная неотрицательная матрица порядка n, r — положительное целое число. Рассмотрим раскраску графа G в n цветов. Если число вершин цвета j на расстоянии не более r от вершины $\mathbf{x}$ цвета i не зависит от выбора вершины $\mathbf{x}$ и равно a_{ij}, то раскраска называется *r-совершенной* с матрицей A. Иными словами, раскраска вершин графа называется r-совершенной, если цветовой состав шара радиуса r зависит только от цвета центра этого шара. Заметим, что r-совершенная раскраска графа G для $r > 1$ может рассматриваться как 1-совершенная раскраска графа, полученного из G добавлением всех ребер, соединяющих вершины на расстоянии не более r.

Понятие совершенной раскраски является важным понятием в алгебраической комбинаторике, а также удобным инструментом исследования в теории кодирования. Ранее 1-совершенные раскраски изучались в различных контекстах

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00424 и 09–01–00244-а), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) и Фонда культуры Финляндии (Finnish Cultural Foundation).

и имели различные названия, в частности, equitable partitions [1], partition designs [2], isotropic colorings [3], дистрибутивные раскраски [4], A-допустимые раскраски [5]. Также изучались совершенные раскраски в два цвета некоторых графов и семейств графов [6–10].

В данной работе исследуется периодичность совершенных раскрасок графов бесконечной гексагональной и треугольной решеток. Совершенная раскраска решетки называется *периодизуемой*, если существует периодическая совершенная раскраска этой решетки с такой же матрицей параметров.

При изучении различных комбинаторных конструкций на плоскости (в частности, упаковок, покрытий и замощений) довольно часто возникают вопросы следующего типа: если некоторая конструкция на плоскости существует, то следует ли отсюда существование периодической конструкции с теми же параметрами? Ответ на этот вопрос не всегда оказывается положительным. Например, для известной задачи замощения плоскости конечным набором квадратов с раскрашенными сторонами (квадраты могут соприкасаться только одноцветными сторонами) Бергер доказал, что существует набор квадратов, для которого замощения существуют, но все такие замощения оказываются непериодическими [11].

В данной работе доказано, что любая 1- и 2-совершенная раскраска бесконечной гексагональной решетки является периодизуемой. Для треугольной решетки доказано, что 1-совершенные раскраски являются периодизуемыми. Ранее доказано [12], что r-совершенные раскраски при $r > 2$ для гексагональной и $r > 1$ для треугольной решеток являются периодическими; также полностью исследована периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки [13, 14]. Таким образом, данная статья закрывает оставшиеся вопросы о периодичности совершенных раскрасок бесконечных плоских транзитивных решеток.

1. Обозначения и определения

Расстояние $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между двумя вершинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в графе G определяется как обычная метрика в графе. Шар $B_r(\mathbf{x})$ радиуса r с центром в вершине $\mathbf{x}$ определяется стандартным образом:

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in V \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}.$$

Будем также использовать понятия сферы радиуса r с центром в вершине $\mathbf{x}$:

$$S_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in V \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\},$$

и r-окружения $N_r(\mathbf{x})$ вершины $\mathbf{x}$:

$$N_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in V \mid 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\} = B_r(\mathbf{x}) \backslash \mathbf{x}.$$

В случае $r = 1$ будем опускать индекс: $N_1(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})$.

Пусть M — произвольное конечное подмножество вершин раскрашенного в n цветов графа. Обозначим число вершин цвета k в M через $I_k(M)$. *Цветовым спектром* множества M назовем вектор $I(M) = (I_1(M), \ldots, I_n(M))$. Заметим, что единичный вектор I_j с единицей в j-й координате является по определению цветовым спектром всякой вершины цвета j. Если i-ю строку матрицы A r-совершенной раскраски обозначить через $\bar{a}_i$, то для произвольной вершины $\mathbf{x}$ цвета i выполняется $I(N_r(\mathbf{x})) = \bar{a}_i$.

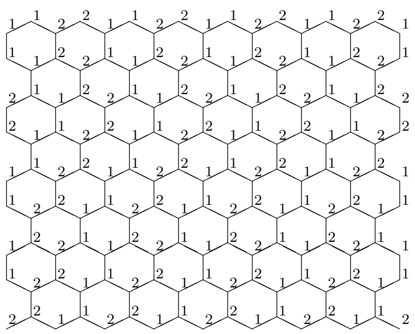

Рис. 1. Непериодическая 1-совершенная раскраска с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

В работе изучается периодичность совершенных раскрасок бесконечных плоских транзитивных решеток. Назовем *трансляцией* бесконечной решетки сдвиг плоскости на вектор $\mathbf{v}$, совмещающий решетку и ее образ под действием этого сдвига. Совершенная раскраска решетки называется $\mathbf{v}$-*периодической*, если трансляция решетки на вектор $\mathbf{v}$ оставляет все цвета на месте. Совершенная раскраска решетки называется *периодической*, если она $\mathbf{v}_1$- и $\mathbf{v}_2$-периодическая для некоторых неколлинеарных векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Совершенная раскраска бесконечной решетки называется *периодизуемой*, если существует периодическая раскраска этой решетки с такой же матрицей параметров. Пример непериодической 1-совершенной раскраски гексагональной решетки см. на рис. 1.

2. Бесконечная гексагональная решетка

2.1. Совершенные раскраски бесконечной гексагональной решетки. В этом разделе рассматриваются совершенные раскраски графа H бесконечной гексагональной решетки (рис. 2). Это 3-однородный двудольный транзитивный плоский граф. Множество вершин графа H разбивается на две доли $V_1(H)$ и $V_2(H)$, каждая вершина соответствует некоторой точке на координатной плоскости. Введем обозначения: $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\sqrt{3}, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (\sqrt{3}/2, 3/2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (-\sqrt{3}/2, 3/2)$ (см. рис. 2). Тогда

$$V_1(H) = \{\, i_1\boldsymbol{\alpha}_1 + i_2\boldsymbol{\alpha}_2 \mid i_1, i_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad V_2(H) = \{(0,-1) + i_1\boldsymbol{\alpha}_1 + i_2\boldsymbol{\alpha}_2 \mid i_1, i_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

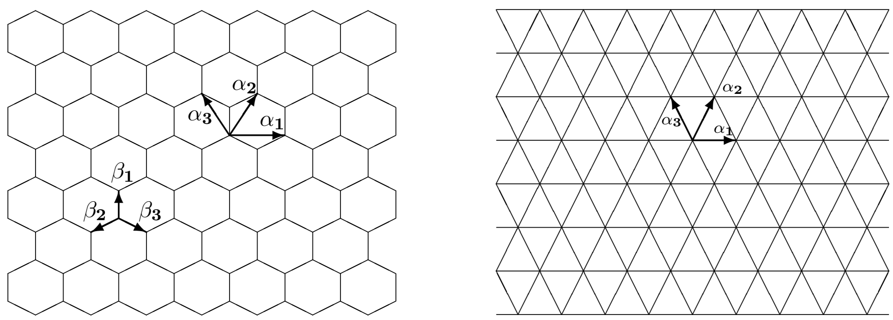

Рис. 2. Гексагональная и треугольная решетки.

Обозначим $\boldsymbol{\beta}_1 = (0,1)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. Тогда множество ребер графа H задается следующим образом:

$$E(H) = \{(\mathbf{v}, \mathbf{v} + \boldsymbol{\beta}_j) \mid \mathbf{v} \in V_1,\ j = 1,2,3\}.$$

Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 1. *Всякая r-совершенная раскраска бесконечной гексагональной решетки является периодической при $r \geq 3$ и периодизуемой при $r = 1$ и $r = 2$.*

Периодичность совершенных раскрасок для случая $r \geq 3$ доказана в [12], т. е. нашей целью является периодизуемость в случаях $r = 1$ и $r = 2$. Мы докажем это в п. 2.3.

Лемма 1. *Всякая 1-совершенная раскраска графа бесконечной гексагональной решетки является также 2-совершенной.*

Доказательство. Для любой вершины $\mathbf{x}$ графа H выполняется следующее свойство:

$$N_2(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x}) \cup \bigcup_{\mathbf{y} \in N_1(\mathbf{x})} N_1(\mathbf{y}) \backslash \mathbf{x},$$

причем все четыре объединяемых множества попарно не пересекаются. Пусть $\varphi(\mathbf{x}) = i$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица 1-совершенной раскраски. Тогда

$$I(N_2(\mathbf{x})) = I(N_1(\mathbf{x})) + \sum_{\mathbf{y} \in N_1(\mathbf{x})} I(N_1(\mathbf{y}) \backslash \mathbf{x}) = \bar{a}_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(\bar{a}_j - e_i).$$

Этот вектор не зависит от выбора вершины $\mathbf{x}$, а зависит только от ее цвета, следовательно, он может быть обозначен через $\bar{b}_i$. Матрица B порядка n, строки которой суть векторы $\bar{b}_i$, является матрицей 2-совершенной раскраски. Поэлементно соотношение $\bar{b}_i = \bar{a}_i + \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}(\bar{a}_j - e_i)$ принимает вид

$$b_{ik} = a_{ik} + \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} \quad \text{при } i \neq k;$$

$$b_{ii} = a_{ii} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(a_{ji} - 1) = a_{ii} + \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} - \sum_{j=1}^n a_{ij} = a_{ii} + \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} - 3.$$

В матричном виде это записывается как $B = A - 3I + A^2$, где I — единичная матрица. Лемма доказана. □

2.2. Метод R-продолжаемых слов. Для доказательства периодизуемости совершенных раскрасок будем использовать метод R-продолжаемых слов, введенный для доказательства периодичности других конструкций, называемых *центрированными функциями* и сходных по ряду свойств с совершенными раскрасками [15].

Сформулируем идею метода для раскрасок гексагональной решетки. Введем обозначение: $\varphi|_{B_R(\mathbf{x})} = \varphi|_{B_R(\mathbf{y})}$ означает совпадение всех цветов внутри шаров при наложении этих шаров трансляцией на вектор $(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, т. е. $\varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{z} + \mathbf{y} - \mathbf{x})$ для любого $\mathbf{z} \in B_R(\mathbf{x})$. Будем говорить, что раскраска *R-продолжаемая*, если для любых двух вершин $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из одной доли равенство $\varphi|_{B_R(\mathbf{x})} = \varphi|_{B_R(\mathbf{y})}$ влечет $\varphi|_{B_{R+1}(\mathbf{x})} = \varphi|_{B_{R+1}(\mathbf{y})}$.

Лемма 2. *Если раскраска гексагональной решетки в конечное число цветов является R-продолжаемой для некоторого $R \geq 0$, то она периодическая.*

Доказательство. Покажем для начала, что R-продолжаемость влечет R'-продолжаемость для любого $R' \geq R$. Пусть раскраска R-продолжаемая. Если выполняется равенство $\varphi|_{B_{R+1}(\mathbf{x})} = \varphi|_{B_{R+1}(\mathbf{y})}$, то верно $\varphi|_{B_R(\mathbf{z})} = \varphi|_{B_R(\mathbf{z}+\mathbf{y}-\mathbf{x})}$ для $\mathbf{z} \in N(\mathbf{x})$. Используя определение R-продолжаемости для вершин $\mathbf{z} \in N(\mathbf{x})$ и учитывая, что $S_{R+2}(\mathbf{x}) = \bigcup\limits_{\mathbf{z} \in N(\mathbf{x})} S_{R+1}(\mathbf{z})$, получаем $(R+1)$-продолжаемость.

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{v} = i_1\boldsymbol{\alpha}_1 + i_2\boldsymbol{\alpha}_2$ и множество шаров $B_R(\mathbf{x} + k\mathbf{v})$, где k пробегает множество целых чисел, $\mathbf{x}$ — любая фиксированная вершина. Это множество шаров бесконечно, число цветов конечно, следовательно, найдутся два шара таких, что $\varphi|_{B_R(\mathbf{x}+k_1\mathbf{v})} = \varphi|_{B_R(\mathbf{x}+k_2\mathbf{v})}$. В силу R'-продолжаемости для любого $R' \geq R$ выполняется

$$\varphi|_{B_{R'}(\mathbf{x}+k_1\mathbf{v})} = \varphi|_{B_{R'}(\mathbf{x}+k_2\mathbf{v})}. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную вершину $\mathbf{t}$. Для достаточно больших R' выполняется $\mathbf{t} \in B_{R'}(\mathbf{x} + k_1\mathbf{v})$. Учитывая (1), получаем $\varphi(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t} + (k_2 - k_1)\mathbf{v})$, что означает $(k_2 - k_1)\mathbf{v}$-периодичность.

Далее берем произвольный вектор $\mathbf{v}' = i'_1\boldsymbol{\alpha}_1 + i'_2\boldsymbol{\alpha}_2$ и аналогичным образом доказываем $(k'_2 - k'_1)\mathbf{v}'$-периодичность. $\square$

Таким образом, вместо того чтобы доказывать периодичность, достаточно установить R-продолжаемость.

Следует отметить, что модификация метода, применяемая при доказательстве теоремы 1, существенно отличается от введенной в [15] и опирается на новые идеи. Она позволяет доказывать не периодичность, а периодизуемость, что зачастую бывает значительно сложнее.

2.3. Доказательство теоремы 1. Периодичность r-совершенных раскрасок для $r \geq 3$ доказана в [15, следствие 5], таким образом, нам нужно доказать периодизуемость для $r = 2$ и $r = 1$.

Шар $B_\rho(\mathbf{x})$ в бесконечной гексагональной решетке имеет форму шестиугольника; существует три типа граничных вершин в шаре, под граничными вершинами понимаются вершины сферы $S_\rho(\mathbf{x})$ (рис. 3). Длина стороны такого шестиугольника с вершинами типа I равна $\lfloor \frac{\rho}{2} \rfloor + 1$, длина стороны с вершинами типа II равна $\lfloor \frac{\rho+1}{2} \rfloor + 1$.

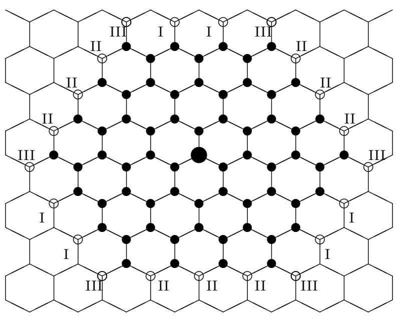

Рис. 3. Шар радиуса $\rho = 7$ и его граничные вершины трех типов.

В каждом шаре есть три группы вершин типа I, соответствующие трем сторонам шестиугольника. Для ρ нечетного и $\mathbf{x} \in V_1$ обозначим через $\mathbf{p}_i^{\mathrm{I}}(\rho, \mathbf{x})$ вершины типа I «верхней» стороны сферы $S_\rho(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{p}_i^{\mathrm{I}}(\rho, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 - i\boldsymbol{\beta}_2 - \left(\frac{\rho-1}{2} - i\right)\boldsymbol{\beta}_3,$$

где $i = 1, \ldots, \frac{\rho-3}{2}$; при необходимости будем также использовать это обозначение при $i = 0$ и $i = \frac{\rho-1}{2}$, соответствующие вершины являются крайними вершинами типа III на «верхней» стороне шестиугольника.

Координаты остальных двух групп вершин типа I получаются поворотом множества $\left\{\mathbf{p}_i^{\mathrm{I}}(\rho, \mathbf{x}) \mid i = 1, \ldots, \frac{\rho-3}{2}\right\}$ на $\pm 2\pi/3$ относительно $\mathbf{x}$.

Аналогично вершинам типа I в каждом шаре есть три группы вершин типа II, соответствующие трем сторонам шестиугольника. Обозначим через $\mathbf{p}_i^{\mathrm{II}}(\rho, \mathbf{x})$ вершины типа II «нижней» стороны сферы $S_\rho(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{p}_i^{\mathrm{II}}(\rho, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 + i\boldsymbol{\beta}_3 + \left(\frac{\rho+1}{2} - i\right)\boldsymbol{\beta}_2,$$

где $i = 1, \ldots, \frac{\rho-1}{2}$; при необходимости будем также использовать это обозначение при $i = 0$ и $i = \frac{\rho+1}{2}$. Координаты остальных двух групп вершин типа II получаются поворотом множества $\left\{\mathbf{p}_i^{\mathrm{II}}(\rho, \mathbf{x}) \mid i = 1, \ldots, \frac{\rho-1}{2}\right\}$ на $\pm 2\pi/3$ относительно $\mathbf{x}$.

Ниже приведены шесть вершин типа III («угловые» вершины):

$$\Big\{\mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\ \mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_3,\ \mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_1,$$
$$\mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_3 - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_3,\ \mathbf{x} + \frac{\rho+1}{2}\boldsymbol{\beta}_3 - \frac{\rho-1}{2}\boldsymbol{\beta}_2\Big\}$$

В случае четного ρ координаты вершин типа III и вершин $\mathbf{p}_i^{\mathrm{I}}(\rho, \mathbf{x})$ типа I (соответственно $\mathbf{p}_i^{\mathrm{II}}(\rho, \mathbf{x})$ типа II) нижней (соответственно верхней) стороны шестиугольника выписываются аналогичным образом.

Введем вспомогательные понятия, которые нам понадобятся для доказательства теоремы. *Линией* в гексагональной решетке называется множество вершин вида $\{\mathbf{x} + i\boldsymbol{\alpha}_j\}$, где j фиксировано и равно $1, 2$ или 3 (определяет направление линии), i пробегает значения от 1 до n в случае конечной линии и все целые числа — в случае бесконечной. *Бинарной линией* в совершенной раскраске φ называется линия, окрашенная двумя чередующимися цветами, т. е. такая, что $\varphi(\mathbf{x} + 2k\boldsymbol{\alpha}_j) = a$, $\varphi(\mathbf{x} + (2k+1)\boldsymbol{\alpha}_j) = b$. *Двойной линией* называется множество вершин вида $\{\mathbf{x} + i\boldsymbol{\alpha}_1\} \cup \{\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}_1 + i\boldsymbol{\alpha}_1\}$, где $\mathbf{x} \in V_1$, i пробегает значения от 1 до n в случае конечной двойной линии и все целые числа — в случае бесконечной. Также двойной линией называются повороты этого множества на $\pm\pi/3$. Двойная линия называется *бинарной*, если каждая из составляющих ее линий является бинарной. На рис. 4 приведена бинарная двойная линия длины 8. *Продолжением* раскраски шара $B_R(\mathbf{x})$ назовем раскраску вершин сферы $S_{R+1}(\mathbf{x})$. Будем говорить, что раскраска двух одинаково раскрашенных шаров радиуса R *продолжается одинаково*, если совпадает раскраска сфер радиуса $R+1$ с теми же центрами. Заметим, что сфера состоит из шести конечных линий — сторон шестиугольника, и можно рассматривать продолжение на эти стороны по отдельности. Для выбранной стороны шестиугольника шара $B_R(\mathbf{x})$ назовем *i-м слоем* вершины соответствующей стороны сферы $S_{R+i}(\mathbf{x})$, $i \geq 1$. Например, для верхней стороны шара $B_R(\mathbf{x})$ нечетного радиуса вторым слоем будут вершины $\mathbf{p}^{\mathrm{I}}(R+2, \mathbf{x})$. Отметим, что с увеличением номера слоя типы вершин будут чередоваться.

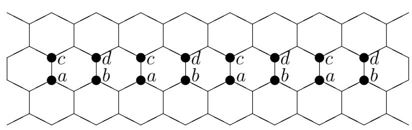

Рис. 4.

Под *смежными сторонами* шестиугольника сферы будем понимать стороны, которые имеют общую вершину (типа III). Одна из этих сторон состоит из вершин типа I (с двумя дополнительными вершинами типа III), другая — из вершин типа II (с двумя дополнительными вершинами типа III).

Утверждение 1. *Если в 2-совершенной раскраске графа H раскраска двух одинаково раскрашенных шаров радиуса R продолжается одинаково на две смежных стороны сфер радиуса $R+1$ с вершинами типов* I *и* II, *то раскраска продолжается одинаково и на общую вершину типа* III *этих сторон.*

Доказательство. Применение определения 2-совершенной раскраски к соответствующим вершинам типа III шаров радиуса $R-1$ (которые окрашены одинаково как соответствующие вершины внутри шаров радиуса R) влечет совпадение цветов вершин типа III шаров радиуса $R+1$. $\square$

Утверждение 2. *Рассмотрим два одинаково раскрашенных шара радиуса* $R \geq 18$. *Выполняются следующие свойства для продолжений раскрасок этих шаров:*

1) *на соответствующие вершины типа* I *сфер радиуса* $R+1$ *раскраска продолжается одинаково;*

2) *на соответствующие стороны сфер радиуса* $R+1$ *с вершинами типа* II *раскраска продолжается либо одинаково, либо бинарными линиями;*

3) *если на стороны сфер радиуса* $R+1$ *с вершинами типа* II *раскраска продолжается бинарными линиями, то второй слой также окрашен бинарными линиями.*

Доказательство. Итак, имеем два одинаково раскрашенных шара $B_R(\mathbf{x})$ и $B_R(\mathbf{x}')$, которые продолжаются по-разному. Без ограничения общности будем полагать, что центры шаров принадлежат V_1, а R четно (при нечетном R доказательство симметрично).

Заметим, что неодинаковость продолжения может реализовываться на вершинах типов I, II или III. Из утверждения 1 следует, что если какие-то две соответствующие вершины типа III окрашены по-разному, то найдутся соответствующие вершины типов I или II, окрашенные по-разному.

1. Докажем, что продолжение одинаково на стороне с вершинами типа I.

Без ограничения общности рассматриваем «верхнюю» сторону шестиугольника сферы S_{R+1}, содержащую первую группу вершин, т. е. вершины $\mathbf{a}_i = \mathbf{p}_i^{\mathrm{I}}(R+1, \mathbf{x})$ и $\mathbf{a}'_i = \mathbf{p}_i^{\mathrm{I}}(R+1, \mathbf{x}')$, $i = 1, \ldots, m-2$, где $m = \frac{R+2}{2}$.

Нам также понадобятся вершины сфер радиусов от $R-1$ до $R+2$, которые обозначим для краткости следующим образом (рис. 5): $\mathbf{b}_i = \mathbf{p}_i^{\mathrm{II}}(R+2, \mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m-1$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_{i-1}^{\mathrm{II}}(R, \mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$, $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_{i-1}^{\mathrm{I}}(R-1, \mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m-1$. Индексы смещены таким образом, что в дальнейшем доказательстве используются все значения начиная с первого. Соответствующие вершины на втором шаре обозначим теми же буквами со штрихами: $\mathbf{b}'_i$, $\mathbf{w}'_i$, $\mathbf{v}'_i$.

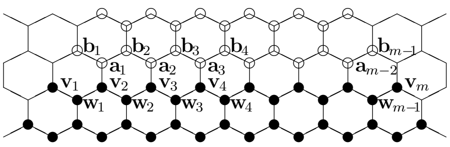

Рис. 5. Часть шара радиуса R и вершины $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_i$ (продолжение на вершины типа I).

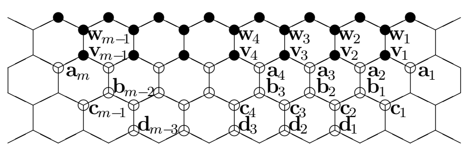

Рис. 6. Часть шара радиуса R и вершины $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{w}_i$ (продолжение на вершины типа II).

Предположим, что продолжение неодинаково. Пусть для $i = i_0$ цвета соответствующих вершин не совпадают: $\varphi(\mathbf{a}_{i_0}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0}) = b$. Без ограничения общности считаем, что i_0 четно. Рассматривая шары $B_2(\mathbf{w}_{i_0})$ и $B_2(\mathbf{w}'_{i_0})$ с центрами на вершинах сфер радиуса $R-1$, получаем, что $\varphi(\mathbf{a}_{i_0+1}) = b$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0+1}) = a$. Повторяя рассуждения для $i = i_0+1$, получаем $\varphi(\mathbf{a}_{i_0+2}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0+2}) = b$. Постепенно изменяя i, имеем

$$\varphi(\mathbf{a}_{i_0+2k}) = \varphi(\mathbf{a}'_{i_0+2k+1}) = a, \quad \varphi(\mathbf{a}_{i_0+2k+1}) = \varphi(\mathbf{a}'_{i_0+2k}) = b,$$

где k меняется в пределах, для которых $\mathbf{a}$-значения определены.

Рассмотрим шары $B_2(\mathbf{v}_i)$ и $B_2(\mathbf{v}'_i)$ с центрами на вершинах сфер $S_R(\mathbf{x})$ и $S_R(\mathbf{x}')$. Так как $\varphi(\mathbf{v}_i) = \varphi(\mathbf{v}'_i)$ и $\varphi|_{N_2(\mathbf{v}_i)\cap B_R(\mathbf{x})} = \varphi|_{N_2(\mathbf{v}'_i)\cap B_R(\mathbf{x}')}$, применяя определение совершенной раскраски к вершинам $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}'$, получаем, что $I(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i) = I(\mathbf{a}'_{i-1}, \mathbf{b}'_{i-1}, \mathbf{b}'_i)$. При четных i имеем $\varphi(\mathbf{a}_{i-1}) = b$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i-1}) = a$, т. е.

$$I(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i) + I_a = I(\mathbf{b}'_{i-1}, \mathbf{b}'_i) + I_b.$$

Просуммируем эти равенства по четным i:

$$I(\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{2\lfloor (m-1)/2\rfloor}\}) + \lfloor (m-1)/2\rfloor I_a \\ = I(\{\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \dots, \mathbf{b}'_{2\lfloor (m-1)/2\rfloor}\}) + \lfloor (m-1)/2\rfloor I_b. \quad (2)$$

При нечетных i имеем $\varphi(\mathbf{a}_{i-1}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i-1}) = b$, т. е.

$$I(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i) + I_b = I(\mathbf{b}'_{i-1}, \mathbf{b}'_i) + I_a.$$

Просуммируем эти равенства по нечетным i:

$$I(\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{2\lfloor m/2\rfloor -1}\}) + (\lfloor m/2\rfloor - 1) I_a \\ = I(\{\mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3, \dots, \mathbf{b}'_{2\lfloor m/2\rfloor -1}\}) + (\lfloor m/2\rfloor - 1) I_b. \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) одновременно невозможны при $m \geq 8$ (при $R \geq 14$); противоречие.

2. Рассмотрим продолжение на вершины типа II. Предположим, что продолжение неодинаково на стороне шестиугольника сферы с вершинами типа II. В силу симметричности можем считать, что по-разному окрашены стороны с вершинами $\mathbf{a}_i = \mathbf{p}^{\mathrm{II}}_{i-1}(R+1, \mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$, $m = \frac{R}{2}$ и $\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ (рис. 6, «нижняя» сторона шестиугольника).

Нам понадобятся вершины сфер радиусов от $R-1$ до $R+4$. Введем обозначения: $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}^{\mathrm{II}}_{i-1}(R-1, \mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m-1$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}^{\mathrm{I}}_{i-1}(R, \mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m-1$, $\mathbf{b}_i = \mathbf{p}^{\mathrm{I}}_{i}(R+2, \mathbf{x})$, $\mathbf{c}_i = \mathbf{p}^{\mathrm{II}}_{i}(R+3, \mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m-1$, $\mathbf{d}_i = \mathbf{p}^{\mathrm{I}}_{i+1}(R+4, \mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m-3$. Соответствующие вершины на втором шаре обозначим теми же буквами со штрихами.

Покажем, что первый слой окрашен двумя чередующимися цветами.

Пусть для $i = i_0$ выполняется $\varphi(\mathbf{a}_{i_0}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0}) = b$. Без ограничения общности считаем, что i_0 четно. Применяя определение совершенной раскраски к вершинам $\mathbf{w}_{i_0}$ и $\mathbf{w}'_{i_0}$ на сферах радиуса $R-1$, получаем, что $\varphi(\mathbf{a}_{i_0+1}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0+1}) = b$, т. е. цвета следующих вершин также различны и равны a и b. Постепенно изменяя i, имеем

$$\varphi(\mathbf{a}_{i_0+2k}) = \varphi(\mathbf{a}'_{i_0+2k+1}) = a, \quad \varphi(\mathbf{a}_{i_0+2k+1}) = \varphi(\mathbf{a}'_{i_0+2k}) = b,$$

где k меняется в пределах, для которых **a**-значения определены.

3. Докажем, что если на стороны сфер радиуса $R+1$ с вершинами типа II раскраска продолжается бинарными линиями, то второй слой также окрашен бинарными линиями.

Рассмотрим шары $B_2(\mathbf{v}_i)$ и $B_2(\mathbf{v}'_i)$ с центрами на вершинах сфер радиуса R. Так как $\varphi|_{N_2(\mathbf{v}_i)\cap B_R(\mathbf{x})} = \varphi|_{N_2(\mathbf{v}'_i)\cap B_R(\mathbf{x}')}$, то $I(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i) = I(\mathbf{b}'_{i-1}, \mathbf{b}'_i)$, т. е. либо $\varphi(\mathbf{b}_{i-1}) = \varphi(\mathbf{b}'_{i-1})$, $\varphi(\mathbf{b}_i) = \varphi(\mathbf{b}'_i)$, либо $\varphi(\mathbf{b}_{i-1}) = \varphi(\mathbf{b}'_i) = c$, $\varphi(\mathbf{b}_i) = \varphi(\mathbf{b}'_{i-1}) = d$ (в этом случае обозначим соответствующие цвета c и d). Учитывая это и применяя определение совершенной раскраски к вершинам $\mathbf{v}_{i+1}$ и $\mathbf{v}'_{i+1}$, получаем в первом случае $\varphi(\mathbf{b}_{i+1}) = \varphi(\mathbf{b}'_{i+1})$, во втором — $\varphi(\mathbf{b}_{i+1}) = c$, $\varphi(\mathbf{b}'_{i+1}) = d$. Продолжая рассуждения, имеем в первом случае, что для любого $j = 1, \ldots, m-2$ выполняется $\varphi(\mathbf{b}_j) = \varphi(\mathbf{b}'_j)$ (т. е. второй слой окрашивается одинаково), во втором случае для четных j будет $\varphi(\mathbf{b}_j) = d$, $\varphi(\mathbf{b}'_j) = c$, для нечетных — $\varphi(\mathbf{b}_j) = c$, $\varphi(\mathbf{b}'_j) = d$ (т. е. второй слой окрашивается двумя чередующимися цветами, причем сдвинутыми синхронно с первыми).

Докажем, что случай одинакового продолжения невозможен.

Рассмотрим вершины $\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{b}'_i$, где i четно. В случае одинакового продолжения имеем $\varphi(\mathbf{b}_i) = \varphi(\mathbf{b}'_i)$, следовательно, $I(N_2(\mathbf{b}_i)) = I(N_2(\mathbf{b}'_i))$. Так как

$$N_2(\mathbf{b}_i) = \{\mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{i-1}, \mathbf{d}_{i-2}, \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}\},$$

то

$$\begin{aligned}I(\{\mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i-1}\}) + I(\{\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{i-1}, \mathbf{d}_{i-2}, \mathbf{d}_{i-1}\}) + I(\{\mathbf{a}_{i+1}\})\\ = I(\{\mathbf{b}'_{i+1}, \mathbf{b}'_{i-1}, \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}'_{i-1}\}) + I(\{\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}'_{i-1}, \mathbf{d}'_{i-2}, \mathbf{d}'_{i-1}\}) + I(\{\mathbf{a}'_{i+1}\}).\end{aligned}$$

Цвета вершин из первых двух множеств совпадают, $\varphi(\mathbf{a}_{i+1}) = b$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i+1}) = a$, следовательно,

$$I(\{\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{i-1}, \mathbf{d}_{i-2}, \mathbf{d}_{i-1}\}) + I_b = I(\{\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}'_{i-1}, \mathbf{d}'_{i-2}, \mathbf{d}'_{i-1}\}) + I_a.$$

Суммируя такие равенства по четным i, получаем

$$\begin{aligned}I(\{\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \ldots, \mathbf{c}_{2\lfloor(m-2)/2\rfloor}\}) + I(\{\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \ldots, \mathbf{d}_{2\lfloor(m-2)/2\rfloor-1}\}) + \lfloor(m-4)/2\rfloor I_b\\ = I(\{\mathbf{c}'_3, \mathbf{c}'_4, \ldots, \mathbf{c}'_{2\lfloor(m-2)/2\rfloor}\}) + I(\{\mathbf{d}'_2, \mathbf{d}'_3, \ldots, \mathbf{d}'_{2\lfloor(m-2)/2\rfloor-1}\}) + \lfloor(m-4)/2\rfloor I_a.\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично рассуждая при нечетных i, $\varphi(\mathbf{a}_{i+1}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i+1}) = b$, имеем

$$\begin{aligned}I(\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_{2\lfloor(m-3)/2\rfloor+1}\}) + I(\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_{2\lfloor(m-3)/2\rfloor}\}) + \lfloor(m-3)/2\rfloor I_a\\ = I(\{\mathbf{c}'_2, \mathbf{c}'_3, \ldots, \mathbf{c}'_{2\lfloor(m-3)/2\rfloor+1}\}) + I(\{\mathbf{d}'_1, \mathbf{d}'_2, \ldots, \mathbf{d}'_{2\lfloor(m-3)/2\rfloor}\}) + \lfloor(m-3)/2\rfloor I_b.\end{aligned} \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) одновременно невозможны при $m \geq 9$ (соответственно при $R \geq 18$). Значит, одинаковое продолжение невозможно, т. е. второй слой также окрашивается двумя чередующимися цветами. $\square$

Следствие 1. *Если 2-совершенная раскраска графа H непериодическая, то в этой раскраске существуют сколь угодно длинные двойные бинарные линии.*

В качестве следствия из этого утверждения с помощью леммы Кенига (см. [16, с. 7]) получаем

Следствие 2. *Если 2-совершенная раскраска графа H непериодическая, то существует 2-совершенная раскраска с той же матрицей, содержащая бесконечную двойную бинарную линию.*

Лемма Кенига утверждает, что для всякого бесконечного префиксно-замкнутого множества слов X (т. е. такого, что вместе с каждым словом в множестве содержатся все его префиксы) существует бесконечное слово, все префиксы которого содержатся в X. В качестве множества слов можно рассматривать фрагменты 2-совершенной раскраски с участками двойных бинарных линий.

Перейдем к доказательству периодизуемости для $r = 2$.

Рассмотрим некоторую непериодическую 2-совершенную раскраску φ. В силу следствия 2 существует 2-совершенная раскраска φ' с той же матрицей, в которой имеется бесконечная двойная бинарная линия. Можем считать, что координаты вершин двойной бинарной линии следующие: $\{i\boldsymbol{\alpha}_1 \mid i \in \mathbb{Z}\}$ («нижняя») и $\{\boldsymbol{\beta}_1 + i\boldsymbol{\alpha}_1 \mid i \in \mathbb{Z}\}$ («верхняя»). Докажем следующее вспомогательное

Утверждение 3. *Пусть* $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}_1 + 2i\boldsymbol{\alpha}_1$ *и* $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\beta}_1 + 2i'\boldsymbol{\alpha}_1$ *— некоторые вершины верхней линии,* R *четное,* $R \geq 20$. *Если* $\varphi'|_{B_R(\mathbf{x})} = \varphi'|_{B_R(\mathbf{x}')}$, *то* $\varphi'|_{B_R(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}_1)} = \varphi'|_{B_R(\mathbf{x}'-\boldsymbol{\alpha}_1)}$.

Доказательство. Рассмотрим вершины типа I сфер $S_{R+1}(\mathbf{x})$ и $S_{R+1}(\mathbf{x}')$. Из утверждения 2 следует, что цвета на этих вершинах совпадают. На рис. 7 эти вершины помечены белыми кругами. Рассмотрим вершины типа II на этих сферах, которые расположены на рис. 7 ниже двойной линии чередующимися цветами («левые нижние», помечены квадратами). Из утверждения 2 следует, что цвета на этих вершинах либо чередуются, либо совпадают. Чередование невозможно, так как среди этих вершин есть вершина двойной бинарной линии, т. е. продолжение одинаково. Из утверждения 1 вытекает, что совпадают цвета вершин $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}_3 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\mathbf{y}' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\beta}_3 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$, вершин $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$ и $\mathbf{z}' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$, вершин $\mathbf{t} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$ и $\mathbf{t}' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$ (см. рис. 7).

Таким образом, получили, что совпадают значения функции на шарах $B_R(\mathbf{x} - \boldsymbol{\beta}_1)$ и $B_R(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\beta}_1)$ (на рис. 7 их центры находятся в вершинах цвета b «нижней» бинарной линии, смежных с вершинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$). Симметричными рассуждениями получаем совпадение цветов на соответствующих вершинах типа I сфер $S_{R+1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\beta}_1)$ и $S_{R+1}(\mathbf{x}'-\boldsymbol{\beta}_1)$, а также в вершинах $\mathbf{u} = \mathbf{x}-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-\frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\mathbf{u}' = \mathbf{x}' - \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 - \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$.

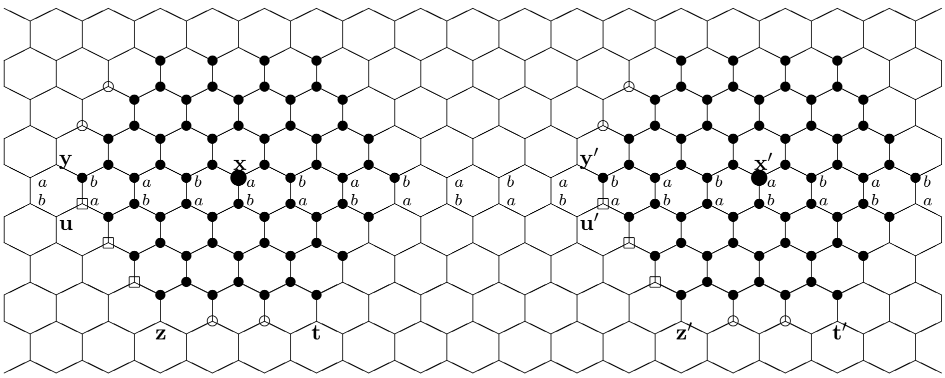

Рис. 7. Иллюстрация к доказательству теоремы 1.

Рассмотрим шары $B_{R-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_1)$ и $B_{R-1}(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\alpha}_1)$. В этих шарах совпадают все значения, рассмотрим продолжения раскраски на сферы $S_R(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_1)$ и $S_R(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\alpha}_1)$. Рассуждая аналогично и применяя утверждения 2 и 1, получаем совпадение значений на этих сферах, т. е. совпадение на шарах $B_R(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}_1)$ и $B_R(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\alpha}_1)$. □

По сути, утверждение 3 означает, что если некоторые два шара с центрами на верхней линии окрашены одинаково, то одинаково окрашены и шары, сдвинутые относительно исходных влево вдоль двойной линии на следующие вершины. Заметим, что четность радиуса играет роль только для записи координат в доказательстве.

Рассмотрим множество шаров $\{B_R(\boldsymbol{\beta}_1 + i\boldsymbol{\alpha}_1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ радиуса $R \geq 20$ с центрами в вершинах верхней линии. Среди них найдутся два одинаково раскрашенных шара: $\varphi'|_{B_R(\boldsymbol{\beta}_1+2i\boldsymbol{\alpha}_1)} = \varphi'|_{B_R(\boldsymbol{\beta}_1+2i'\boldsymbol{\alpha}_1)}$. Обозначим их центры через $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}_1 + 2i\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\mathbf{x}' = \boldsymbol{\beta}_1 + 2i'\boldsymbol{\alpha}_1$. Применяя утверждение 3, получаем, что одинаково окрашены любые шары $B_R(\boldsymbol{\beta}_1 + j\boldsymbol{\alpha}_1)$ и $B_R(\boldsymbol{\beta}_1 + (j + 2(i' - i)\boldsymbol{\alpha}_1)$, т. е. имеем $2(i' - i)\boldsymbol{\alpha}_1$-периодичность раскраски в полосе, образованной сдвигами исходных шаров вдоль двойной бинарной линии.

Следующее утверждение говорит, что эта периодичность сохраняется для всей раскраски.

Утверждение 4. *Раскраска φ' является $2(i' - i)\boldsymbol{\alpha}_1$-периодической.*

Доказательство. Рассмотрим продолжение одинаково раскрашенных шаров $B_R(\mathbf{x})$ и $B_R(\mathbf{x}')$ на вершины $\mathbf{x} + \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\mathbf{x}' + \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_1$, $k = 1, \ldots, \frac{R}{2}$, типа II («верхняя» сторона сфер радиуса $R + 1$ на рис. 7). По утверждению 2 раскраска продолжается либо одинаково, либо двойными бинарными линиями.

В случае различного продолжения бинарными линиями, обозначив цвета этих линий через e и f, для $k = 1, \ldots, \frac{R}{2}$ получаем

$$\varphi'\left(\mathbf{x} + \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_1\right) = \begin{cases} e, & \text{если } k \text{ четное,} \\ f, & \text{если } k \text{ нечетное;} \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi'\left(\mathbf{x}' + \frac{R}{2}\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_1\right) = \begin{cases} f, & \text{если } k \text{ четное,} \\ e, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим сдвинутые шары $B_R(\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}_1)$ и $B_R(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\alpha}_1)$. Эти шары также одинаково раскрашены, следовательно, равенства (6), (7) выполняются и для $k = \frac{R}{2} + 1$. Так, сдвигая шары на $\boldsymbol{\alpha}_1$, выводим, что они выполняются для любых целых k, что невозможно, поскольку $e \neq f$.

В случае одинакового продолжения оно одинаково и для других целых k. Следовательно, в этом случае вытекает периодичность в расширенной полосе. Продолжение на следующую линию $\{\mathbf{x} + \left(\frac{R}{2} + 1\right)\boldsymbol{\alpha}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_1\}$ снова одинаково, что выводим из применения утверждения 2 для вершин типа I к шарам $B_R(\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}_2)$ и $B_R(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\beta}_2)$. Продолжая рассуждения, получаем $2(i' - i)\boldsymbol{\alpha}_1$-периодичность всей совершенной раскраски. $\square$

Из периодичности следует, что существует лишь конечное число способов окраски всякой линии $\mathbf{u} + k\boldsymbol{\alpha}_1$, где $\mathbf{u}$ — произвольная вершина гексагональной решетки. Значит, существует и конечное число способов окрашивания четырех подряд стоящих линий (под одинаковым окрашиванием будем понимать совпадение при совмещении трансляцией. Разобьем всю гексагональную решетку на четверки подряд стоящих линий (обозначим $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3$, тогда четверка линий будет иметь вид $\{j\boldsymbol{\beta} + k\boldsymbol{\alpha}_1\}, \{j\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_1\}, \{j\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_1\}, \{j\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_1\}$, где j фиксировано, k пробегает все целые числа). Среди них встретятся две одинаково окрашенные четверки, соответствующие j_1, j_2. Периодическая раскраска φ'' строится из φ' клонированием полосы между этими четверками, включая одну из них, т. е. построенная раскраска является периодической в направлении $(j_1 - j_2)\boldsymbol{\beta}$, причем сохраняется $(i' - i)\boldsymbol{\alpha}_1$-периодичность. Эта раскраска является 2-совершенной с той же матрицей параметров, так как для всякого шара радиуса 2 найдется окрашенный также в исходной раскраске.

Таким образом, для произвольной 2-совершенной раскраски построена периодическая 2-совершенная раскраска с такой же матрицей параметров.

Итак, нам осталось разобраться с радиусом 1.

Утверждение 5. *Всякая 1-совершенная раскраска графа H является периодизуемой.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую непериодическую 1-совершенную раскраску. По лемме 1 она является 2-совершенной раскраской. Периодизуемость 2-совершенных раскрасок установлена, следовательно, существует периодическая 2-совершенная раскраска с той же матрицей параметров. Так как периодическая раскраска строилась из части исходной раскраски (1-совершенной), то и новая раскраска будет 1-совершенной с той же матрицей. Утверждение 5, а с ним и теорема 1 доказаны. □

3. Бесконечная треугольная решетка

Граф T бесконечной треугольной решетки является двойственным к графу бесконечной гексагональной решетки (см. рис. 2). Вершинами треугольной решетки является следующее множество точек: $V(T) = \{i_1\boldsymbol{\alpha}_1 + i_2\boldsymbol{\alpha}_2 + i_3\boldsymbol{\alpha}_3 \mid i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{Z}\}$, где $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ и $\boldsymbol{\alpha}_3$ определяются, как в разд. 2. Вершины $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ смежны, если $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}_i$ или $\mathbf{x} - \mathbf{y} = -\boldsymbol{\alpha}_i$ для некоторого $i = 1, 2$ или 3.

Теорема 2. *Всякая r-совершенная раскраска бесконечной треугольной решетки является периодической при $r \geq 2$ и периодизуемой при $r = 1$.*

Доказательство. Периодичность r-совершенных раскрасок графа T для $r \geq 2$ доказана в [12, следствие 3].

Докажем периодизуемость для $r = 1$. Схема доказательства во многом похожа на доказательство периодизуемости для 2-совершенных раскрасок гексагональной решетки, но для треугольной решетки приходится также применять свои технические хитрости. Определение R-продолжаемости, утверждение, аналогичное лемме 2 для треугольной решетки, формулируются и доказываются аналогично графу H.

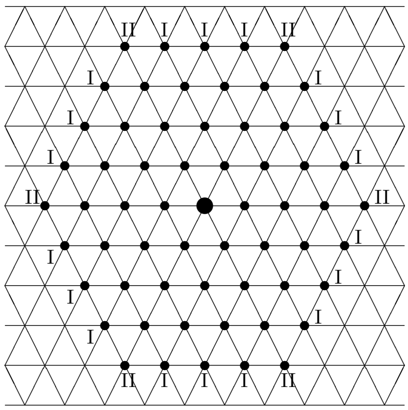

Рис. 8. Шар радиуса 4 в треугольной решетке и два типа его граничных вершин.

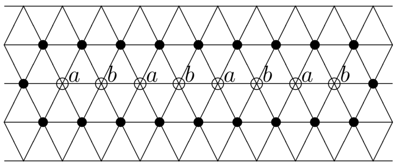

Рис. 9. Бинарная линия длины 8.

Шар $B_\rho(\mathbf{x})$ в бесконечной треугольной решетке имеет форму шестиугольника с двумя типами граничных вершин (рис. 8). *Линией* в графе T называется множество вершин вида $\{\mathbf{x} + i\boldsymbol{\alpha}_j\}$, где j фиксировано и равно 1, 2 или 3 (определяет направление линии), $i = 1, \ldots, n$ в случае конечной линии длины n и $i \in \mathbb{Z}$ в случае бесконечной. *Бинарной линией* называется линия, окрашенная двумя чередующимися цветами, т. е. такая, что $\varphi(\mathbf{x} + 2k\boldsymbol{\alpha}_j) = a$, $\varphi(\mathbf{x} + (2k+1)\boldsymbol{\alpha}_j) = b$ (рис. 9). Аналогично гексагональной решетке дается определение i-го слоя.

Рассмотрим некоторую непериодическую 1-совершенную раскраску. В силу утверждения для графа T, аналогичного лемме 2 для графа H, найдутся два шара радиуса R, которые продолжаются по-разному.

Утверждение 6. *В 1-совершенной раскраске графа T раскраска двух одинаково раскрашенных шаров радиуса $R \geq 2$ на соответствующие стороны сфер радиуса $R+1$ с вершинами типа* I *продолжается либо одинаково, либо бинарными линиями.*

Доказательство. Рассмотрим два шара $B_R(\mathbf{x})$ и $B_R(\mathbf{x}')$, которые продолжаются по-разному. Если продолжение неодинаковое на вершинах типа II, то найдется и неодинаковое продолжение на вершинах типа I.

Для определенности рассмотрим «верхнюю» сторону шестиугольников сфер $S_{R+1}(\mathbf{x})$ и $S_{R+1}(\mathbf{x}')$, т. е. множества вершин $\{\mathbf{a}_i = \mathbf{x} + i\boldsymbol{\alpha}_2 + (R+1-i)\boldsymbol{\alpha}_3 \mid i = 1,\dots,R\}$ и $\{\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{x}' - \mathbf{x} \mid i = 1,\dots,R\}$. Нам также понадобятся вершины «верхних» сторон шестиугольников сфер радиуса R: $\mathbf{w}_i = \mathbf{x} + i\boldsymbol{\alpha}_2 + (R-i)\boldsymbol{\alpha}_3$, $i = 1,\dots,R-1$ (рис. 10).

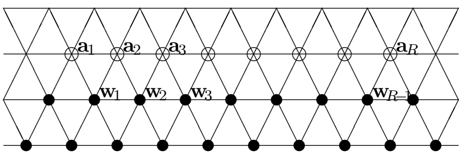

Рис. 10. Часть шара радиуса R и вершины $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{w}_i$.

Пусть продолжение неодинаково, т. е. существует $i = i_0$ такое, что $\varphi(\mathbf{a}_{i_0}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0}) = b$. Применяя определение совершенной раскраски к вершинам $\mathbf{w}_{i_0}$ и $\mathbf{w}'_{i_0}$ на сферах радиуса $R-1$, получаем, что $\varphi(\mathbf{a}_{i_0+1}) = b$, $\varphi(\mathbf{a}'_{i_0+1}) = a$. Без ограничения общности будем считать, что i_0 четно. Изменяя значения i и повторяя рассуждения, получаем $\varphi(\mathbf{a}_{i+2k}) = \varphi(\mathbf{a}'_{i+2k+1}) = a$, $\varphi(\mathbf{a}_{i+2k+1}) = \varphi(\mathbf{a}'_{i+2k}) = b$, т. е. имеем продолжение бинарными линиями. $\square$

Утверждение 7. *Если в 1-совершенной раскраске графа T есть бинарная линия длины $l > 7$ из цветов a и b, то для любых вершин $\mathbf{x}$ цвета a и $\mathbf{y}$ цвета b выполняется $I(N(\mathbf{x})) - 2I_b = I(N(\mathbf{y})) - 2I_a$.*

Доказательство. Без ограничения общности положим, что бинарная линия состоит из вершин $i\boldsymbol{\alpha}_1$, $i = 1,\dots,l$, l четно, $\varphi(2i\boldsymbol{\alpha}_1) = b$, $\varphi((2i+1)\boldsymbol{\alpha}_1) = a$. Для доказательства рассмотрим цветовой состав линий, окружающих бинарную линию из цветов a и b с двумя дополнительными вершинами из продолжения бинарной линии, т. е. следующее множество вершин:

$$M = \{\boldsymbol{\alpha}_3 + i\boldsymbol{\alpha}_1 \mid i = 1,\dots,l+1\} \cup \{-\alpha_2 + i\boldsymbol{\alpha}_1 \mid i = 1,\dots,l+1\} \cup \{\mathbf{0}\} \cup \{(l+1)\boldsymbol{\alpha}_1\}.$$

На рис. 9 вершины из множества M помечены черными точками.

Цветовой состав множества M можно получить двумя способами: рассматривая окружения множества вершин цвета a из бинарной линии и множества вершин цвета b из бинарной линии:

$$I(M) = \frac{l}{2} I(N(\mathbf{x})) - (l-1)I_b - I(\{(l+1)\boldsymbol{\alpha}_1, l\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, l\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3\}),$$

$$I(M) = \frac{l}{2} I(N(\mathbf{y})) - (l-1)I_a - I(\{\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_2, -\boldsymbol{\alpha}_3\}).$$

Приравнивая правые части этих двух равенств, получаем требуемое; условие $l > 7$ достаточно для того, чтобы граничные эффекты не повлияли на ситуацию. $\square$

Утверждение 8. *Если в 1-совершенной раскраске графа T два одинаково раскрашенных шара радиуса $R \geq 3$ продолжаются бинарными линиями на сторону шестиугольника сферы радиуса $R+1$, то 2-й слой окрашивается либо одинаково, либо бинарными линиями.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 6 с использованием утверждения 7. □

Аналогично гексагональной решетке получаем

Следствие 3. *Если 1-совершенная раскраска графа T непериодическая, то существуют сколь угодно длинные бинарные линии.*

Следствие 4. *Если 1-совершенная раскраска графа T непериодическая, то существует совершенная раскраска с той же матрицей, содержащая бесконечную бинарную линию.*

Утверждение 9. *Если в 1-совершенной раскраске графа T в n цветов есть две рядом стоящие бинарные линии длины $l > 2n^4 + 6$, то существует периодическая совершенная раскраска с той же матрицей.*

Доказательство. Если в раскраске имеются две рядом стоящие бинарные линии, то следующая параллельная им линия также будет бинарной (либо одноцветной), возможно, на единицу меньшей длины, и т. д. Через не более чем $2n^4$ шагов встретятся две пары одинаково окрашенных линий. Периодическая совершенная раскраска строится из куска между одинаковыми парами линий, продолженных до бесконечных бинарных (одноцветных) линий. □

В качестве следствия из утверждения 9 получаем, что периодизуемость 1-совершенных раскрасок достаточно доказать для случая, когда двух длинных рядом стоящих бинарных линий нет.

Теперь, доказав необходимые вспомогательные утверждения, переходим к доказательству периодизуемости. Пусть φ — непериодическая совершенная раскраска графа T. По следствию 4 существует 1-совершенная раскраска φ' с той же матрицей, содержащая бесконечную бинарную линию. Можем считать, что координаты вершин бинарной линии следующие: $\{i\boldsymbol{\alpha}_1 \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Пусть бинарная линия состоит из цветов a и b, $\varphi'(2i\boldsymbol{\alpha}_1) = a$, $\varphi'((2i+1)\boldsymbol{\alpha}_1) = b$. По утверждению 9 достаточно доказать периодизуемость для случая, когда нет двух рядом стоящих бинарных линий длины $l > 2n^4 + 6$. Рассмотрим множество шаров $\{B_R(2i\boldsymbol{\alpha}_1) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ радиуса $R \geq 2n^4 + 7$ с центрами на этой бинарной линии в вершинах цвета a. Среди них найдутся два одинаково раскрашенных шара: $\varphi'|_{B_R(2i\boldsymbol{\alpha}_1)} = \varphi'|_{B_R(2i'\boldsymbol{\alpha}_1)}$, причем на расстоянии не более $2n^{|B_R|}$. Обозначим их центры через $\mathbf{x} = 2i\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\mathbf{x}' = 2i'\boldsymbol{\alpha}_1$.

Рассмотрим продолжение этих шаров «вверх-влево», т. е. на множества вершин сфер $S_{R+1}(\mathbf{x})$ и $S_{R+1}(\mathbf{x}')$ с координатами $\{\mathbf{x} - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + j\boldsymbol{\alpha}_2 \mid j = 1, \ldots, R\}$ и $\{\mathbf{x}' - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + j\boldsymbol{\alpha}_2 \mid i = 1, \ldots, R\}$ (на рис. 11 помечены белыми кругами). Из утверждения 6 следует, что эти вершины окрашены двумя чередующимися цветами либо цвета на этих вершинах совпадают. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Случай I: продолжение разное бинарными линиями, т. е. для некоторых цветов c и d выполняется

$$\varphi'(\mathbf{x} - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + 2j\boldsymbol{\alpha}_2) = \varphi'(\mathbf{x}' - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (2j+1)\boldsymbol{\alpha}_2) = c,$$

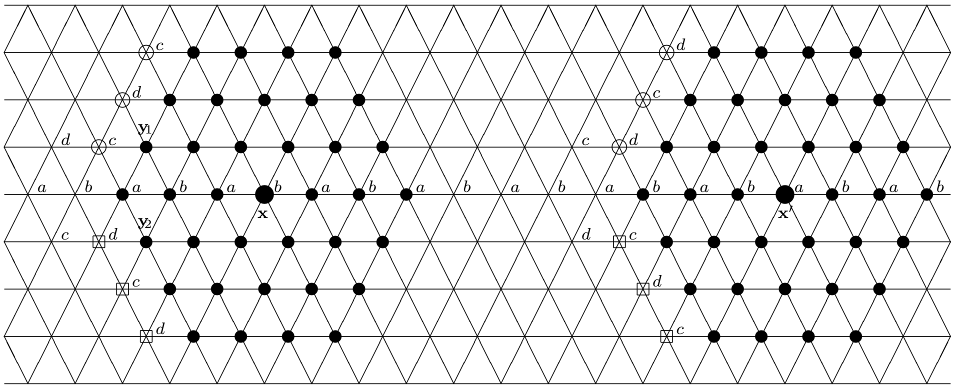

Рис. 11. Иллюстрация к доказательству теоремы 2.

$$\varphi'(\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(2j+1)\boldsymbol{\alpha}_2)=\varphi'(\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1+2j\boldsymbol{\alpha}_2)=d.$$

Применяя определение совершенной раскраски к шарам $B_1(\mathbf{x}-R\boldsymbol{\alpha}_1)$ и $B_1(\mathbf{x}'-R\boldsymbol{\alpha}_1)$ с центрами в вершинах одинакового цвета, получаем, что $\varphi'(\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=d$, $\varphi'(\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=c$, следовательно, множества $\{\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-j\boldsymbol{\alpha}_3 \mid j=1,\dots,R\}$ и $\{\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-j\boldsymbol{\alpha}_3 \mid j=1,\dots,R\}$ также окрашены бинарными линиями, состоящими из цветов c и d:

$$\varphi'(\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-2j\boldsymbol{\alpha}_3)=\varphi'(\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-(2j+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=d,$$

$$\varphi'(\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-(2j+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=\varphi'(\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1+2j\boldsymbol{\alpha}_3)=c.$$

По утверждению 8 следующий слой, состоящий из вершин сфер $S_{R+2}(\mathbf{x})$ и $S_{R+2}(\mathbf{x}')$ с координатами $\{\mathbf{x}-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1+j\boldsymbol{\alpha}_2 \mid j=2,\dots,R\}$ и $\{\mathbf{x}'-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1+j\boldsymbol{\alpha}_2 \mid j=2,\dots,R\}$, окрашен либо одинаково, либо бинарными линиями. В случае продолжения бинарными линиями из утверждения 9 следует существование периодической совершенной раскраски, так что теорему остается доказать только для случая, когда за неодинаковым продолжением идет одинаковое, т. е.

$$\varphi'(\mathbf{x}-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1+j\boldsymbol{\alpha}_2)=\varphi'(\mathbf{x}'-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1+j\boldsymbol{\alpha}_2),\quad j=2,\dots,R.$$

Симметричная ситуация с другой стороны от бинарной линии:

$$\varphi'(\mathbf{x}-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1-j\boldsymbol{\alpha}_3)=\varphi'(\mathbf{x}'-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1-j\boldsymbol{\alpha}_3),\quad j=2,\dots,R.$$

Утверждение 10. *В условиях случая* I *совершенная раскраска* φ' *является раскраской в два цвета.*

Доказательство. Так как c и d — это цвета бинарной линии, по утверждению 7 имеем

$$I(N(c))-2I_d=I(N(d))-2I_c.$$

Рассматривая шары $B_1(\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ и $B_1(\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$, получаем, что

$$\varphi'(\mathbf{x}-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=c,\quad \varphi'(\mathbf{x}'-(R+2)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=d.$$

Таким образом, $I(N(a))=2I_b+2I_c+2I_d$, по утверждению 7 имеем $I(N(b))=2I_a+2I_c+2I_d$. Значит, обе линии, соседние с бесконечной бинарной линией из цветов a и b, окрашены цветами c и d (возможно, не чередующимся образом). Рассматривая шар с центром в вершине $\mathbf{x} - R\boldsymbol{\alpha}_1$ и используя формулы для цветового состава окружения вершин цветов a и b, получаем, что для вершин $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x} - (R-1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x} - (R-1)\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$) выполняется $I_{\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\}} = \{c, d\}$. Рассматривая шары с центрами в вершинах $\mathbf{x} - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ и $\mathbf{x} - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$ цветов c и d, получаем, что

$$I(N(c)) - 2I_d = I(N(d)) - 2I_c = I_a + I_b + I_c + I_d.$$

Значит, обе линии, соседние бесконечной бинарной линии из цветов a и b, и две линии на расстоянии 2 от нее (т. е. вершины с координатами $\mathbf{x} + 2\boldsymbol{\alpha}_1 + j\boldsymbol{\alpha}_2$, $\mathbf{x} + 2\boldsymbol{\alpha}_1 - j\boldsymbol{\alpha}_2$, $j \in \mathbb{Z}$) окрашены цветами c и d (возможно, не чередующимся образом). Следующие за ними линии окрашены цветами a и b, и т. д.: две линии окрашены цветами c и d, одна — a и b, снова две — c и d, одна — a и b. Напомним, что $a \neq b$, $c \neq d$, так как это цвета бинарных линий. Поскольку вершины третьих по счету линий окрашены цветами a и b и одна и этих линий содержит цвет c, а другая — цвет d, получаем, что $a = c$ и $b = d$ или $a = d$ и $b = c$. Таким образом, если раскраска непериодическая, то она в два цвета. $\square$

Утверждение 11. *Всякая* 1*-совершенная раскраска графа T в два цвета периодизуемая.*

Доказательство. Из следствия 3 и утверждения 7 следует, что матрица непериодической совершенной раскраски имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 4-k \\ k & 4-k \end{pmatrix}$, где $k = 0, 1, 2$. Для матриц такого вида периодические совершенные раскраски приведены на рис. 12. $\square$

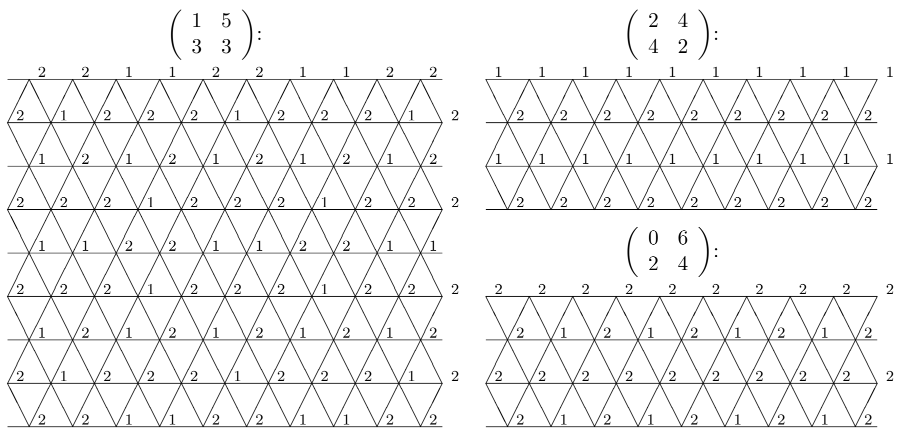

Рис. 12. Периодические совершенные раскраски в два цвета, соответствующие матрицам $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 4-k \\ k & 4-k \end{pmatrix}$, где $k = 0, 1, 2$.

Таким образом, в случае I периодизуемость следует из утверждений 10 и 11.

Случай II: продолжение шаров $B_R(\mathbf{x})$ и $B_R(\mathbf{x}')$ одинаково на вершинах из сфер $S_{R+1}(\mathbf{x})$ и $S_{R+1}(\mathbf{x}')$ с координатами $\{\mathbf{x} - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + j\boldsymbol{\alpha}_2 \mid j = 1, \dots, R\}$ и $\{\mathbf{x}' - (R+1)\boldsymbol{\alpha}_1 + j\boldsymbol{\alpha}_2 \mid i = 1, \dots, R\}$ (на рис. 11 левая верхняя сторона шестиугольника, помечены белыми кругами). Применяя определение совершенной раскраски к шарам $B_1(\mathbf{x}-R\boldsymbol{\alpha}_1)$ и $B_1(\mathbf{x}'-R\boldsymbol{\alpha}_1)$ с центрами в вершинах одинакового цвета получаем, что совпадают цвета соответствующих вершин в множествах $\{\mathbf{x}-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-j\boldsymbol{\alpha}_3 \mid j=1,\ldots,R\}$ и $\{\mathbf{x}'-(R+1)\boldsymbol{\alpha}_1-i\boldsymbol{\alpha}_3 \mid i=1,\ldots,R\}$ (на рис. 11 левая нижняя сторона шестиугольника, помечены белыми квадратами). В этом случае рассматриваем следующие два одинаково окрашенных шара: $\varphi'|_{B_R((2i+1)\boldsymbol{\alpha}_1)} = \varphi'|_{B_R((2i'+1)\boldsymbol{\alpha}_1)}$. Если их продолжение неодинаково, то попадаем в случай I для сдвинутых шаров, а в случае I периодизуемость доказана. Таким образом, получаем всегда одинаковое продолжение и, следовательно, периодичность в полосе, образованной сдвигами шара радиуса R с центром на линии $\{j\boldsymbol{\alpha}_1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, вдоль этой линии. Далее аналогично гексагональной решетке строится периодическая совершенная раскраска. $\square$

4. Заключение

Данная статья является завершающей в цикле работ о периодичности совершенных раскрасок бесконечных плоских транзитивных решеток. В следующей таблице приведены все результаты о периодичности r-совершенных раскрасок на бесконечных прямоугольной, треугольной и гексагональной решетках. Результаты настоящей статьи позволили заполнить две клетки в таблице ($r=1$ для треугольной, $r=1,2$ для гексагональной решеток), отмеченные в остальных клетках результаты получены в работах [12–14].

Таблица

	прямоугольная решетка	треугольная решетка	гексагональная решетка
периодизуемая r-совершенная раскраска	$r=1$	$r=1$	$r=1,2$
периодическая r-совершенная раскраска	$r\geq 2$	$r\geq 2$	$r\geq 3$

Несложно заметить, что для каждого из графов в таблице для маленьких радиусов r-совершенные раскраски являются периодизуемыми, а для больших — периодическими. Было бы интересно выяснить, сохраняется ли эта закономерность для других бесконечных транзитивных графов. Возможно, в этом поможет техника, использованная для исследования периодичности на прямоугольной, треугольной и гексагональной решетках, так как понятие R-продолжаемости и утверждение леммы 2 могут быть обобщены для этого случая. Также было бы интересно выяснить, существуют ли непериодизуемые (апериодические) совершенные раскраски для каких-либо бесконечных транзитивных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Godsil C.* Equitable partitions // Combinatorics, Paul Erdős is eighty. Budapest, 1993. V. 1. P. 173–192.
2. *Camion P., Courteau B., Delsarte Ph.* On r-partition designs in Hamming spaces // Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. 1992. V. 2. P. 147–162.
3. *Axenovich M.* On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. V. 268. P. 31–49.
4. *Визинг В. Г.* Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.
5. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Киев: Наук. думка, 1984.

6. *Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.* Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–16.
7. *Кротов Д. С.* О совершенных раскрасках половинного 24-куба // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 5. С. 35–46.
8. *Фон-Дер-Флаасс Д. Г.* Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 923–930.
9. *Фон-Дер-Флаасс Д. Г.* Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 292–295.
10. *Хорошилова Д. Б.* О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92.
11. *Berger R.* The undecidability of the domino problem // Mem. Amer. Math. Soc. 1966. P. 1–72.
12. *Puzynina S. A.* On periodicity of generalized two-dimensional words // Information Comput. 2009. V. 207, N 11. P. 1315–1328.
13. *Puzynina S. A.* Perfect colorings of radius $r > 1$ of the infinite rectangular grid // Sib. Electronic Math. Reports. 2008. V. 5. P. 283–292.
14. *Пузынина С. А.* Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2004. Т. 11, № 1. С. 79–92.
15. *Puzynina S. A., Avgustinovich S. V.* On periodicity of two-dimensional words // Theoret. Comput. Sci. 2008. V. 391. P. 178–187.
16. *Lothaire M.* Algebraic combinatorics on words. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

Статья поступила 2 сентября 2009 г., окончательный вариант — 15 ноября 2010 г.

Пузынина Светлана Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
University of Turku, Finland
`puzynina@math.nsc.ru`