Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.956.32

СИСТЕМЫ ФРИДРИХСА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. М. Гордиенко

Аннотация. Волновое уравнение с тремя пространственными переменными сводится к симметрической гиперболической по Фридрихсу системе. Описываются все такие сведéния, выделяются те, при которых сохраняется скорость распространения возмущений. Выясняется, как преобразуется система Фридрихса при преобразованиях Лоренца системы координат. Конструкция сведения волнового уравнения к системе Фридрихса и обоснование свойств этого сведения основаны на использовании кватернионов.

Ключевые слова: волновое уравнение, гиперболическая по Фридрихсу система, кватернион.

Введение. Формулировка результатов

Пусть вещественно- или комплекснозначная функция $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f. \tag{1}$$

В статье рассматриваются гиперболические по Фридрихсу системы, к которым может быть сведено волновое уравнение, и доказываются основные свойства таких систем.

Опишем симметрические x_0-гиперболические по Фридрихсу системы, к которым может быть сведено волновое уравнение. Пусть $\vec{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ — два вещественных четырехмерных вектора. Образуем из их компонент четыре эрмитовы матрицы:

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_3 & k_2 & -k_1 & i\beta_0 \\ -i\beta_2 & k_3 & -i\beta_0 & -k_1 \end{pmatrix}, \\ A_2 = \begin{pmatrix} k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ -i\beta_3 & -k_2 & k_1 & -i\beta_0 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_1 & i\beta_0 & k_3 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \\ i\beta_2 & -k_3 & i\beta_0 & k_1 \\ -i\beta_1 & -i\beta_0 & -k_3 & k_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарные проекты № 40, № 107).

В § 1 доказывается, что если функция $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет волновому уравнению (1), то вектор-функция $U = \begin{pmatrix} u_{x_0} \\ -u_{x_1} \\ -u_{x_2} \\ -u_{x_3} \end{pmatrix}$, образованная первыми производными функции u, удовлетворяет системе

$$\left(A_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) U = f\vec{\boldsymbol{k}}. \tag{3}$$

Утверждается что системы вида (3) суть все системы первого порядка с эрмитовыми матрицами, к которым может быть сведено волновое уравнение.

Приводится запись системы (3) в терминах кватернионов. Эта запись удобна для доказательства утверждений о системе (3) и проявляет алгебраические причины вида этих систем.

В § 2 получены условия, при которых система (3) является симметрической x_0-гиперболической по Фридрихсу (т. е. $A_0 > 0$), а также условия, при которых скорости распространения возмущений у системы (3) и у волнового уравнения (1) совпадают.

Оказывается, что условие гиперболичности ($A_0 > 0$) выражается неравенством

$$\begin{aligned} 2k_0 > {} & \sqrt{(k_1 + \beta_1)^2 + (k_2 + \beta_2)^2 + (k_3 + \beta_3)^2} \\ & + \sqrt{(k_1 - \beta_1)^2 + (k_2 - \beta_2)^2 + (k_3 - \beta_3)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Геометрически выписанное неравенство означает, что четырехмерный вектор $\vec{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ расположен внутри прямого кругового конуса $k_0 > \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, а трехмерный вектор $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ расположен внутри вытянутого эллипсоида вращения, большая полуось которого равна k_0 и имеет направление (k_1, k_2, k_3), а две другие полуоси равны $b = \sqrt{k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2}$.

Алгебраически неравенство (4) в точности означает, что минимальное собственное число матрицы A_0 положительно.

Как известно (см., например, [1]), чтобы скорости распространения возмущений у системы (3) и у волнового уравнения (1) совпадали, должно выполняться

$$\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 > 0 \quad \forall (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_0 > \sqrt{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

Показано, что это происходит тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\boldsymbol{k}}$ и $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} k_0 + \beta_0 \geq \sqrt{(k_1 + \beta_1)^2 + (k_2 + \beta_2)^2 + (k_3 + \beta_3)^2}, \\ k_0 - \beta_0 \geq \sqrt{(k_1 - \beta_1)^2 + (k_2 - \beta_2)^2 + (k_3 - \beta_3)^2}, \end{cases}$$

причем одно из этих неравенств должно выполняться строго.

Геометрически выписанные неравенства означают, что вектор $\vec{\boldsymbol{k}}$ по-прежнему должен быть расположен внутри прямого кругового конуса, а четырехмерный вектор $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ при этом должен располагаться внутри фигуры, образованной пересечением двух пол конусов — нижней полы, выпущенной из точки

(k_0, k_1, k_2, k_3), и верхней полы, выпущенной из точки $(-k_0, -k_1, -k_2, -k_3)$. При этом допускается расположение вектора $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ и на границе описанной фигуры, но не на ребре, по которому конусы пересекаются.

В § 3 рассматриваются вопросы, связанные с преобразованием Лоренца системы (3). Пусть координаты $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ преобразованы с помощью преобразования Лоренца L. Тогда, как известно, вектор из первых производных $\begin{pmatrix} u_{x_0} \\ u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ u_{x_3} \end{pmatrix}$ от u преобразуется с помощью преобразования Лоренца $W = L^{-\top}$, а вектор $U = \begin{pmatrix} u_{x_0} \\ -u_{x_1} \\ -u_{x_2} \\ -u_{x_3} \end{pmatrix}$ — с помощью преобразования Лоренца L. Оказывается, преобразованный вектор U удовлетворяет системе вида (3), построенной по векторам $\vec{\boldsymbol{k}}$ и $\vec{\boldsymbol{\beta}}$, преобразованным с помощью преобразования Лоренца W.

В § 4 вычисляется уравнение конуса характеристических нормалей системы (3). Показано, что оно имеет вид

$$\begin{aligned} &\det[\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3] \\ &\qquad \equiv \left(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\right)\left\{(k_0\beta_0 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3)^2\left(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\right)\right. \\ &- 2(k_0\beta_0 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3)(k_0\xi_0 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - k_3\xi_3)(\beta_0\xi_0 - \beta_1\xi_1 - \beta_2\xi_2 - \beta_3\xi_3) \\ &+ \left.\left(k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 + \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2\right)(k_0\xi_0 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - k_3\xi_3)^2\right\} = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Вычисление основано на использовании инвариантов преобразования Лоренца.

Мы видим, что конус характеристических нормалей (5) распадается на два конуса: прямой круговой конус, связанный с волновым уравнением, и дополнительный конус второго порядка, возникший при сведении волнового уравнения к симметрической системе и зависящий от компонент векторов $\vec{\boldsymbol{k}}$, $\vec{\boldsymbol{\beta}}$. Условия, при которых скорости распространения возмущений у системы (3) и у волнового уравнения (1) совпадают, могут быть сформулированы теперь и так: дополнительный конус второго порядка должен охватывать прямой круговой конус.

При $\vec{\boldsymbol{\beta}} = 0$ система (3) вещественна, а дополнительный конус представляет собой двойную плоскость. В этом случае в [2] выяснено, когда решение системы Фридрихса (3) имеет потенциал, удовлетворяющий волновому уравнению. Для этого потребовалось построить нетривиальное дифференциальное тождество, связанное с системой (3).

Вопрос о сведении волнового уравнения к симметрическим системам интересен сам по себе как вопрос о связи двух определений гиперболичности: определения Петровского для уравнения высокого порядка и определения Фридрихса для систем первого порядка. То, что волновое уравнение с любым числом пространственных переменных сводится к симметрической системе, показал еще Фридрихс [3]. Легко доказать, что любое гиперболическое уравнение с одной пространственной переменной сводится к симметрической системе. В [4] показано, что гиперболические уравнения высокого порядка с двумя пространственными переменными сводятся к симметрической системе. В [5, 6] доказано, что к симметрической системе сводятся гиперболические уравнения высокого порядка с любым числом пространственных переменных, инвариантные относительно вращений пространственных переменных, а также уравнения, близкие к инвариантным относительно вращений. Тем не менее определения гиперболичности Петровского и Фридрихса не эквивалентны. В [7] построен пример гиперболического уравнения четвертого порядка с четырьмя пространственными переменными, которое не сводится к симметрической системе.

Вопрос о сведении волнового уравнения к симметрическим системам интересен также в связи с краевыми задачами. Каждое сведение волнового уравнения к симметрической системе позволяет построить дополнительное тождество для решений волнового уравнения — «интеграл энергии», который используется для обоснования корректности. Для разных краевых задач могут потребоваться разные «интегралы энергии». В [8–11] сведение волнового уравнения к системам Фридрихса использовано при построении диссипативных интегралов энергии для краевых задач, удовлетворяющих равномерному условию Лопатинского.

В теории уравнений с частными производными рассматривают волновые уравнения с разным числом пространственных переменных: $1, 2, 3, n$. Наиболее важен случай с тремя пространственными переменными. В данной работе хочется обратить внимание на отличительную особенность волнового уравнения с тремя пространственными переменными — связь с теорией кватернионов и возможность применения этой теории.

§ 1. Сведение волнового уравнения к системе Фридрихса

Сведение волнового уравнения (1) к системе (3) эквивалентно построению следующего векторного полиномиального тождества:

$$(\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3)\begin{pmatrix}\xi_0\\-\xi_1\\-\xi_2\\-\xi_3\end{pmatrix} = \left(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\right)\begin{pmatrix}k_0\\k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Действительно, заменив в полиномиальном тождестве (6) символы ξ_j операторами дифференцирования $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$, получим дифференциальное тождество. Применив это тождество к функции $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и использовав в его правой части волновое уравнение (1), придем к системе (3).

Будем строить тождества вида (6), используя кватернионы.

Рассмотрим матрицы второго порядка с комплексными коэффициентами — кватернионы. В качестве базиса возьмем четыре матрицы — единичную $\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ и матрицы Паули:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}_j$ удовлетворяют соотношениям:

$$\boldsymbol{\sigma}_j^2 = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}_m = -\boldsymbol{\sigma}_m\cdot\boldsymbol{\sigma}_j \quad (j \neq m,\ j \neq 0,\ m \neq 0);$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 = i\boldsymbol{\sigma}_3, \quad \boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}_3 = i\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_3\cdot\boldsymbol{\sigma}_1 = i\boldsymbol{\sigma}_2.$$

Каждый кватернион может быть разложен по базису:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \xi_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \xi_0+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \xi_0 - \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta} = \eta_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \eta_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \eta_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \eta_3\boldsymbol{\sigma}_3,$$

$$\boldsymbol{p} = p_0\boldsymbol{\sigma}_0 + p_1\boldsymbol{\sigma}_1 + p_2\boldsymbol{\sigma}_2 + p_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} p_0+p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{q} = q_0\boldsymbol{\sigma}_0 + q_1\boldsymbol{\sigma}_1 + q_2\boldsymbol{\sigma}_2 + q_3\boldsymbol{\sigma}_3,$$

числа $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — координаты кватерниона $\boldsymbol{\xi}$, числа p_0, p_1, p_2, p_3 — координаты кватерниона $\boldsymbol{p}$ и т. д.

Каждому кватерниону будем сопоставлять столбец из его координат, например,

$$\vec{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Каждому кватерниону $\boldsymbol{p}$ будем сопоставлять также матрицу четвертого порядка $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ такую, что

$$\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\eta} = \langle \boldsymbol{p} \rangle \vec{\boldsymbol{\eta}} \quad \forall \boldsymbol{\eta}. \tag{7}$$

Легко вычислить, что для кватерниона $\boldsymbol{p} = p_0\boldsymbol{\sigma}_0 + p_1\boldsymbol{\sigma}_1 + p_2\boldsymbol{\sigma}_2 + p_3\boldsymbol{\sigma}_3$

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -ip_3 & ip_2 \\ p_2 & ip_3 & p_0 & -ip_1 \\ p_3 & -ip_2 & ip_1 & p_0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В частности,

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = p_0\langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle + p_1\langle \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle + p_2\langle \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle + p_3\langle \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle. \tag{9}$$

Из формулы (7) и ассоциативности умножения кватернионов следует, что

$$\langle \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \rangle = \langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{q} \rangle.$$

В частности,

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_j \rangle \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle.$$

Отсюда вытекает, что матрицы $\langle \boldsymbol{\sigma}_j \rangle$ перемножаются по тем же правилам, что и матрицы $\boldsymbol{\sigma}_j$:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_j \rangle^2 = \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_j \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle = -\langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_j \rangle \quad (j \neq m,\ j \neq 0,\ m \neq 0);$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle = i\langle \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle = i\langle \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma}_3 \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle = i\langle \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle.$$

Несложно проверить что,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}_j} = \langle\boldsymbol{\sigma}_j\rangle^\top\vec{\boldsymbol{\eta}}.$$

Отсюда следует, что

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q}} = \langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\vec{\boldsymbol{\eta}}. \tag{10}$$

Отметим, что матрицы $\langle\boldsymbol{p}\rangle$ и $\langle\boldsymbol{q}\rangle^\top$ перестановочны. Действительно, с одной стороны,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q})} = \langle\boldsymbol{p}\rangle\overrightarrow{(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q})} = \langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\vec{\boldsymbol{\eta}},$$

а с другой —

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q}} = \overrightarrow{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{q}} = \langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\overrightarrow{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\eta})} = \langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\langle\boldsymbol{p}\rangle\vec{\boldsymbol{\eta}},$$

поэтому

$$\langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{q}\rangle^\top = \langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\langle\boldsymbol{p}\rangle.$$

Замечание. Если $A = A^*$, $J = J^*$, то $AJ = JA \iff (AJ)^* = AJ$ (здесь A^*, J^*, как обычно, эрмитово сопряжение), т. е. перестановочность эрмитовых матриц эквивалентна эрмитовости их произведения.

Значит, матрицы $\langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{q}\rangle^\top$ и $\langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\langle\boldsymbol{p}\rangle$ эрмитовы.

Наряду с кватернионом

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \xi_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \xi_0+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \xi_0 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

будем рассматривать сопряженный кватернион

$$\underline{\boldsymbol{\xi}} = \xi_0\boldsymbol{\sigma}_0 - \xi_1\boldsymbol{\sigma}_1 - \xi_2\boldsymbol{\sigma}_2 - \xi_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \xi_0-\xi_3 & -\xi_1 + i\xi_2 \\ -\xi_1 - i\xi_2 & \xi_0 + \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить что,

$$\underline{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}} = \underline{\boldsymbol{\xi}}\cdot\underline{\boldsymbol{p}}. \tag{11}$$

Справедливы тождества

$$\underline{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{\xi} = \big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big)\boldsymbol{\sigma}_0, \quad \boldsymbol{\xi}\cdot\underline{\boldsymbol{\xi}} = \big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big)\boldsymbol{\sigma}_0.$$

Умножив первое тождество слева на кватернион $\boldsymbol{p} = p_0\boldsymbol{\sigma}_0 + p_1\boldsymbol{\sigma}_1 + p_2\boldsymbol{\sigma}_2 + p_3\boldsymbol{\sigma}_3$, второе справа на кватернион $\boldsymbol{q} = q_0\boldsymbol{\sigma}_0 + q_1\boldsymbol{\sigma}_1 + q_2\boldsymbol{\sigma}_2 + q_3\boldsymbol{\sigma}_3$ и сложив, получим тождество

$$\mathbf{p}\cdot\underline{\xi}\cdot\xi + \xi\cdot\underline{\xi}\cdot\mathbf{q} = \big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big)(\mathbf{p}+\mathbf{q}). \tag{12}$$

Покажем, что тождества (12) и (6) представляют собой две формы записи одного и того же тождества. Для этого запишем равенство координат кватернионов, стоящих в (12) слева и справа:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}\cdot\underline{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{\xi}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\cdot\underline{\boldsymbol{\xi}}\cdot\boldsymbol{q}} = \big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big)(\overrightarrow{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}).$$

Применяя равенства (7) и (10), получаем запись тождества (12) в координатах:

$$(\langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^\top + \langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\langle\boldsymbol{\xi}\rangle)\vec{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = \big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big)(\overrightarrow{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}). \tag{13}$$

Используя разложение (9) для кватерниона $\boldsymbol{\xi}$

$$\langle\boldsymbol{\xi}\rangle = \xi_0\langle\boldsymbol{\sigma}_0\rangle + \xi_1\langle\boldsymbol{\sigma}_1\rangle + \xi_2\langle\boldsymbol{\sigma}_2\rangle + \xi_3\langle\boldsymbol{\sigma}_3\rangle,$$

выпишем матрицу в левой части тождества (13) в более подробном виде:

$$\langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\xi}\rangle^{\top} + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\langle \boldsymbol{\xi}\rangle = \xi_0\{\langle \boldsymbol{p}\rangle + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\} + \xi_1\{\langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\sigma}_1\rangle^{\top} + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\langle \boldsymbol{\sigma}_1\rangle\}$$
$$+ \xi_2\{\langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\sigma}_2\rangle^{\top} + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\langle \boldsymbol{\sigma}_2\rangle\} + \xi_3\{\langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\sigma}_3\rangle^{\top} + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\langle \boldsymbol{\sigma}_3\rangle\}. \quad (14)$$

Обозначим

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\beta}], \quad \boldsymbol{q} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{k} - \boldsymbol{\beta}],$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}\right\}, \quad \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}\right\}.$$

Обозначим

$$A_0 \equiv \langle \boldsymbol{p}\rangle + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -ip_3 & ip_2 \\ p_2 & ip_3 & p_0 & -ip_1 \\ p_3 & -ip_2 & ip_1 & p_0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & iq_3 & -iq_2 \\ q_2 & -iq_3 & q_0 & iq_1 \\ q_3 & iq_2 & -iq_1 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 \equiv \langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\sigma}_1\rangle^{\top} + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\langle \boldsymbol{\sigma}_1\rangle = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 & -ip_3 & ip_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ ip_3 & p_2 & -p_1 & ip_0 \\ -ip_2 & p_3 & -ip_0 & -p_1 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} q_1 & q_0 & iq_3 & -iq_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -iq_3 & q_2 & -q_1 & -iq_0 \\ iq_2 & q_3 & iq_0 & -q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_3 & k_2 & -k_1 & i\beta_0 \\ -i\beta_2 & k_3 & -i\beta_0 & -k_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 \equiv \langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\sigma}_2\rangle^{\top} + \langle \boldsymbol{q}\rangle^{\top}\langle \boldsymbol{\sigma}_2\rangle = \begin{pmatrix} p_2 & ip_3 & p_0 & -ip_1 \\ -ip_3 & -p_2 & p_1 & -ip_0 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ ip_1 & ip_0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} q_2 & -iq_3 & q_0 & iq_1 \\ iq_3 & -q_2 & q_1 & iq_0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -iq_1 & -iq_0 & q_3 & -q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ -i\beta_3 & -k_2 & k_1 & -i\beta_0 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_1 & i\beta_0 & k_3 & -k_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 \equiv \langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\sigma}_3\rangle^\top + \langle \boldsymbol{q}\rangle^\top\langle \boldsymbol{\sigma}_3\rangle = \begin{pmatrix} p_3 & -ip_2 & ip_1 & p_0 \\ ip_2 & -p_3 & ip_0 & p_1 \\ -ip_1 & -ip_0 & -p_3 & p_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} q_3 & iq_2 & -iq_1 & q_0 \\ -iq_2 & -q_3 & -iq_0 & q_1 \\ iq_1 & iq_0 & -q_3 & q_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \\ i\beta_2 & -k_3 & i\beta_0 & k_1 \\ -i\beta_1 & -i\beta_0 & -k_3 & k_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом мы ввели обозначения для матриц, стоящих в фигурных скобках равенства (14), после чего это равенство принимает вид

$$\langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\xi}\rangle^\top + \langle \boldsymbol{q}\rangle^\top\langle \boldsymbol{\xi}\rangle = \xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3, \tag{15}$$

теперь тождество (12) принимает вид тождества (6)

Итак, построено полиномиальное тождество (6), эрмитовы матрицы A_j которого зависят от компонент двух четырехмерных векторов $\vec{\boldsymbol{k}}$ и $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ и имеют вид (2). Как было сказано в начале параграфа, полиномиальное тождество (6) приводит к системе (3).

Удобно ввести кватернион $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x_0, x_1, x_2, x_3)$, координатами которого являются производные функции $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$: $\boldsymbol{u} = u_{x_0}\boldsymbol{\sigma}_0 + u_{x_1}\boldsymbol{\sigma}_1 + u_{x_2}\boldsymbol{\sigma}_2 + u_{x_3}\boldsymbol{\sigma}_3$. В этом случае $U = \begin{pmatrix} u_{x_0} \\ -u_{x_1} \\ -u_{x_2} \\ -u_{x_3} \end{pmatrix} = \vec{\underline{\boldsymbol{u}}}$ и система (3) запишется так:

$$(A_0\partial_0 + A_1\partial_1 + A_2\partial_2 + A_3\partial_3)\vec{\underline{\boldsymbol{u}}} = f\vec{\boldsymbol{k}}, \tag{3*}$$

или в соответствии с равенством (15) так:

$$(\langle \boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{\partial}\rangle^\top + \langle \boldsymbol{q}^\top\rangle\langle \boldsymbol{\partial}\rangle)\vec{\underline{\boldsymbol{u}}} = f(\vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{q}}),$$

где

$$\langle \boldsymbol{\partial}\rangle = \begin{pmatrix} \partial_0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_0 & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ \partial_2 & i\partial_3 & \partial_0 & -i\partial_1 \\ \partial_3 & -i\partial_2 & i\partial_1 & \partial_0 \end{pmatrix},$$

как и в (8), — матрица, сопоставляемая кватерниону

$$\boldsymbol{\partial} = \partial_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \partial_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \partial_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \partial_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично если заменить в полиномиальном тождестве (12) символы ξ_j операторами дифференцирования $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$ и полученное дифференциальное тождество применить к функции $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$, то получим запись системы (3) в кватернионах:

$$\boldsymbol{p}\cdot\underline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\partial}\cdot\underline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{q} = f(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}). \tag{3**}$$

Этот вариант системы (3) удобен при рассмотрении преобразований Лоренца системы координат.

Покажем, что построены все полиномиальные тождества вида (6) с эрмитовыми матрицами A_j и тем самым все системы первого порядка вида (3), к которым может быть сведено волновое уравнение.

Тождество (6) должно выполняться при всех значениях букв ξ_j. Если в векторах, стоящих слева и справа в тождестве (6), приравнять коэффициенты, стоящие при одинаковых мономах $\xi_j\xi_m$ в одинаковых компонентах, то получим систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты матриц A_j. Нас интересуют только такие решения этой системы, при которых матрицы A_j эрмитовы.

Легко показать, что эрмитовы матрицы A_j, при которых справедливо тождество (6), могут существовать только в том случае, если числа k_m вещественны. В самом деле, пусть a^j_{lm} — элементы матриц A_j. Сравнивая в первых компонентах векторов, стоящих слева и справа в тождестве (6), коэффициенты при мономе ξ_0^2, получим $k_0 = a^0_{11} \in \mathbb{R}$. Аналогично, сравнивая во вторых компонентах тех же векторов коэффициенты при мономе ξ_1^2, получим $k_1 = a^1_{22} \in \mathbb{R}$, и т. д.: $k_2 = a^2_{33} \in \mathbb{R}$, $k_3 = a^3_{44} \in \mathbb{R}$. Поэтому будем задавать числа k_m только вещественными.

Линейная неоднородная система для коэффициентов эрмитовых матриц A_j, определяемая тождеством (6), недоопределенная: в ней неизвестных больше чем уравнений. Тем не менее разрешимость этой системы сразу не очевидна.

Приведем частное решение этой неоднородной системы:

$$\widehat{A}_0 = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & k_0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} k_1 & k_0 & 0 & 0 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{A}_2 = \begin{pmatrix} k_2 & 0 & k_0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_1 & 0 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_3 = \begin{pmatrix} k_3 & 0 & 0 & k_0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Общее решение получим, если к этому частному решению добавим общее решение однородной системы, которая задается тождеством

$$\left(\xi_0 A_0^0 + \xi_1 A_1^0 + \xi_2 A_2^0 + \xi_3 A_3^0\right) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ -\xi_1 \\ -\xi_2 \\ -\xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Анализируя коэффициенты при мономах $\xi_j\xi_m$ в векторе, стоящем в левой части последнего равенства, получим, что эрмитовы матрицы A_j имеют вид

$$A_0^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ 0 & i\beta_3 & 0 & -i\beta_1 \\ 0 & -i\beta_2 & i\beta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\beta_3 & 0 & 0 & i\beta_0 \\ -i\beta_2 & 0 & -i\beta_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\beta_3 & 0 & -i\beta_1 \\ -i\beta_3 & 0 & 0 & -i\beta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\beta_1 & i\beta_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\beta_2 & i\beta_1 & 0 \\ i\beta_2 & 0 & i\beta_0 & 0 \\ -i\beta_1 & -i\beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где β_j — произвольные вещественные числа. Таким образом, общий вид эрмитовых матриц A_j, при которых выполняется тождество (6), таков: $A_j = \widehat{A}_j + A_j^0$, т. е. эти матрицы имеют вид (2).

§ 2. Условие гиперболичности и совпадения скоростей возмущения

Определим скалярное произведение двух кватернионов

$$\boldsymbol{p} = p_0\boldsymbol{\sigma}_0 + p_1\boldsymbol{\sigma}_1 + p_2\boldsymbol{\sigma}_2 + p_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\boldsymbol{q} = q_0\boldsymbol{\sigma}_0 + q_1\boldsymbol{\sigma}_1 + q_2\boldsymbol{\sigma}_2 + q_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} q_0 + q_3 & q_1 - iq_2 \\ q_1 + iq_2 & q_0 - q_3 \end{pmatrix},$$

формулой

$$\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\} = (\vec{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{q}}) = p_0\bar{q}_0 + p_1\bar{q}_1 + p_2\bar{q}_2 + p_3\bar{q}_3.$$

Легко убедиться в том, что

$$\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}^*).$$

Пусть $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{C}^2$ — двумерные столбцы и

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}^\top \cdot \overline{\mathrm{b}} = \mathrm{b}^* \cdot \mathrm{a} = \mathrm{tr}(\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*)$$

— их скалярное произведение.

Пусть $\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2 \in \mathbb{C}^2$ — двумерные столбцы, тогда $\mathrm{a}_j \cdot \mathrm{b}^*_{\mathrm{m}}$ $(j, m = 1, 2)$ суть 2×2-матрицы (кватернионы), а $\overrightarrow{\mathrm{a}}_j \cdot \mathrm{b}^*_m$ — четырехмерные столбцы. Их скалярное произведение равно

$$(\overrightarrow{\mathrm{a}_j\cdot\mathrm{b}^*_m}, \overrightarrow{\mathrm{a}_{j'}\cdot\mathrm{b}^*_{m'}}) = \{\mathrm{a}_j\cdot\mathrm{b}^*_m, \mathrm{a}_{j'}\cdot\mathrm{b}^*_{m'}\} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}_j, \mathrm{a}_{j'})(\mathrm{b}_{m'}, \mathrm{b}_m). \tag{16}$$

В самом деле,

$$\{\mathrm{a}_j\cdot\mathrm{b}^*_m, \mathrm{a}_{j'}\cdot\mathrm{b}^*_{m'}\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}((\mathrm{a}_j\cdot\mathrm{b}^*_m)(\mathrm{a}_{j'}\cdot\mathrm{b}^*_{m'})^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{a}_j\cdot\mathrm{b}^*_m\cdot\mathrm{b}_{m'}\cdot\mathrm{a}^*_{j'})$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{b}_{m'}, \mathrm{b}_m)\,\mathrm{tr}(\mathrm{a}_j\cdot\mathrm{a}^*_{j'}) = \frac{1}{2}(\mathrm{a}_j, \mathrm{a}_{j'})(\mathrm{b}_{m'}, \mathrm{b}_m).$$

Из формулы (16) следует, что если пары столбцов $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \in \mathbb{C}^2$ и $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2 \in \mathbb{C}^2$ ортонормированы: $(\mathrm{a}_j, \mathrm{a}_k) = \delta_{jk}$, $(\mathrm{b}_j, \mathrm{b}_k) = \delta_{jk}$, то четырехмерные столбцы

$$\overrightarrow{\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{b}^*_1}, \quad \overrightarrow{\mathrm{a}_1\cdot\mathrm{b}^*_2}, \quad \overrightarrow{\mathrm{a}_2\cdot\mathrm{b}^*_1}, \quad \overrightarrow{\mathrm{a}_2\cdot\mathrm{b}^*_2}$$

взаимно перпендикулярны и не равны нулю (и, значит, линейно независимы).

Справедлива формула, обобщающая (16):

$$(\langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^\top\overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{\xi}\mathrm{b}, \mathrm{b}).$$

Действительно,

$$(\langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^\top\overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{p}\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*\boldsymbol{\xi}}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{p}\mathrm{a}\cdot(\boldsymbol{\xi}^*\mathrm{b})^*}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*})$$
$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\mathrm{b}, \boldsymbol{\xi}^*\mathrm{b}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{\xi}\mathrm{b}, \mathrm{b}).$$

Аналогично

$$(\langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\langle\boldsymbol{\xi}\rangle\overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}) = (\langle\boldsymbol{\xi}\rangle\langle q\rangle^\top\overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{q}\mathrm{b}, \mathrm{b}).$$

Поэтому

$$([\langle\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{\xi}\rangle^\top + \langle\boldsymbol{q}\rangle^\top\langle\boldsymbol{\xi}\rangle]\overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}, \overrightarrow{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}^*}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{\xi}\mathrm{b}, \mathrm{b}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{q}\mathrm{b}, \mathrm{b}).$$

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^*$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$ — кватернионы,* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{C}^2$ *— собственные векторы,* $\boldsymbol{p}\mathrm{a} = \lambda\mathrm{a}$, $\boldsymbol{q}\mathrm{b} = \mu\mathrm{b}$, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ *— собственные числа. Тогда*

$$(\langle \boldsymbol{p} \rangle + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*}.$$

Доказательство. В самом деле,

$$(\langle \boldsymbol{p} \rangle + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} = \overrightarrow{\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} + \overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^* \cdot \boldsymbol{q}} = \overrightarrow{(\boldsymbol{p}\mathrm{a}) \cdot \mathrm{b}^*} + \overrightarrow{\mathrm{a} \cdot (\boldsymbol{q}\mathrm{b})^*} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*}. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^*$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$ — кватернионы,* $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{C}^2$ *— собственные векторы,* $\boldsymbol{p}\mathrm{a} = \lambda\mathrm{a}$, $\boldsymbol{q}\mathrm{b} = \mu\mathrm{b}$ $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ *— собственные числа. Тогда*

$$(\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} = (\lambda\mu)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*}.$$

Доказательство. В самом деле,

$$(\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} = \overrightarrow{\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^* \cdot \boldsymbol{q}} = \overrightarrow{(\boldsymbol{p}\mathrm{a}) \cdot (\boldsymbol{q}\mathrm{b})^*} = (\lambda\mu)\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*}. \quad \square$$

Утверждение 1. $A_0 \equiv \langle \boldsymbol{p} \rangle + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top > 0 \iff p_0 + q_0 > \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \in \mathbb{C}^2$ — собственные векторы кватерниона

$$\boldsymbol{p} = p_0\boldsymbol{\sigma}_0 + p_1\boldsymbol{\sigma}_1 + p_2\boldsymbol{\sigma}_2 + p_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}\mathrm{a}_1 = \lambda_1\mathrm{a}_1, \quad \boldsymbol{p}\mathrm{a}_2 = \lambda_2\mathrm{a}_2,$$

$\lambda_1 \leq \lambda_2$ — соответствующие собственные числа, при этом $\lambda_1 = p_0 - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, аналогично для кватерниона

$$\boldsymbol{q} = q_0\boldsymbol{\sigma}_0 + q_1\boldsymbol{\sigma}_1 + q_2\boldsymbol{\sigma}_2 + q_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} q_0 + q_3 & q_1 - iq_2 \\ q_1 + iq_2 & q_0 - q_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}\mathrm{b}_1 = \mu_1\mathrm{b}_1, \quad \boldsymbol{q}\mathrm{b}_2 = \mu_2\mathrm{b}_2, \quad \mu_1 \leq \mu_2, \quad \mu_1 = q_0 - \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Тогда в силу леммы 1 $\overrightarrow{\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{b}_1^*}$, $\overrightarrow{\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{b}_2^*}$, $\overrightarrow{\mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{b}_1^*}$, $\overrightarrow{\mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{b}_2^*}$ — собственные векторы матрицы A_0, $\lambda_1 + \mu_1$, $\lambda_1 + \mu_2$, $\lambda_2 + \mu_1$, $\lambda_2 + \mu_2$ — собственные числа A_0, ясно, что $\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_{\min}(A_0)$. Значит,

$$\begin{aligned} A_0 > 0 \iff \lambda_1 + \mu_1 > 0 \iff p_0 + q_0 > \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \\ \iff 2k_0 > \sqrt{(k_1 + \beta_1)^2 + (k_2 + \beta_2)^2 + (k_3 + \beta_3)^2} \\ + \sqrt{(k_1 - \beta_1)^2 + (k_2 - \beta_2)^2 + (k_3 - \beta_3)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы доказали, что неравенство (4) выражает условие гиперболичности $A_0 > 0$. Используя фокальное свойство эллипса, легко получить геометрическую интерпретацию этого неравенства, приведенную во введении.

Утверждение 2. $\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 \equiv \langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle > 0 \ \forall \boldsymbol{\xi} > 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{p} \geq 0$, $\boldsymbol{q} \geq 0$, *причем одно из неравенств выполняется строго.*

Доказательство. $\Longleftarrow$ Пусть $\boldsymbol{p} > 0$, $\boldsymbol{q} \geq 0$ и $\boldsymbol{\xi} > 0$. Тогда в силу леммы 2 $\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top > 0$, $\langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle \geq 0$ и, следовательно, $\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \rangle^\top + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \rangle > 0$.

Случай $\boldsymbol{p} \geq 0$, $\boldsymbol{q} > 0$ и $\boldsymbol{\xi} > 0$ рассматривается аналогично.

$\Longrightarrow$ Покажем, что $\boldsymbol{p} \geq 0$. Пусть $\mathrm{a} \in \mathbb{C}^2$, $(\mathrm{a}, \mathrm{a}) = 1$, — произвольный единичный двумерный столбец и $\mathrm{b} \in \mathbb{C}^2$, $(\mathrm{b}, \mathrm{b}) = 1$, $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0$. Зададим кватернион $\boldsymbol{\xi}$ условиями: $\boldsymbol{\xi}\mathrm{a} = \varepsilon \mathrm{a}$, ($\varepsilon > 0$ произвольно), $\boldsymbol{\xi}\mathrm{b} = \mathrm{b}$. Тогда $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^* > 0$,

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle > 0 \\
&\quad \Longrightarrow ([\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle]\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*}, \overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{\xi}\mathrm{b}, \mathrm{b}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\mathrm{a}, \mathrm{a})(\boldsymbol{q}\mathrm{b}, \mathrm{b}) \\
&\qquad = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}\mathrm{a}, \mathrm{a}) + \frac{\varepsilon}{2}(\boldsymbol{q}\mathrm{b}, \mathrm{b}) > 0.
\end{aligned}
$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\boldsymbol{p} \geq 0$. Аналогично $\boldsymbol{q} \geq 0$. Покажем, что либо $\boldsymbol{p} > 0$, либо $\boldsymbol{q} > 0$. Действительно, пусть $\boldsymbol{p} \geq 0$ и $\boldsymbol{q} \geq 0$. Тогда найдутся a, $\mathrm{b} \in \mathbb{C}^2$ такие, что $\boldsymbol{p}\mathrm{a} = 0$, $\boldsymbol{q}\mathrm{b} = 0$,

$$
[\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle]\overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} = \langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top \overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle \overrightarrow{\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}^*} = \overrightarrow{\boldsymbol{p}\mathrm{a} \cdot (\boldsymbol{\xi}\mathrm{b})^*} + \overrightarrow{\boldsymbol{\xi}\mathrm{a} \cdot (\boldsymbol{q}\mathrm{b})^*} = 0.
$$

Значит, матрица $\langle \boldsymbol{p} \rangle \langle \boldsymbol{\xi} \rangle^\top + \langle \boldsymbol{q} \rangle^\top \langle \boldsymbol{\xi} \rangle$ вырожденная, причем для всех $\boldsymbol{\xi}$; противоречие. □

Обоснуем утверждение о совпадении скоростей возмущения у системы (3) и у волнового уравнения (1), приведенного во введении. Ясно, что

$$
\boldsymbol{p} \geq 0, \ \boldsymbol{q} \geq 0 \iff p_0 \geq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \ q_0 \geq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.
$$

Поскольку $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$, то

$$
\begin{aligned}
&p_0 \geq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad q_0 \geq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \\
&\qquad \iff \begin{cases} k_0 + \beta_0 \geq \sqrt{(k_1 + \beta_1)^2 + (k_2 + \beta_2)^2 + (k_3 + \beta_3)^2} \\ k_0 - \beta_0 \geq \sqrt{(k_1 - \beta_1)^2 + (k_2 - \beta_2)^2 + (k_3 - \beta_3)^2}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

§ 3. Преобразование Лоренца

Пусть $\boldsymbol{\xi} = \xi_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + \xi_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3 \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \xi_0 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \xi_0 - \xi_3 \end{pmatrix}$ — произвольный кватернион с вещественными координатами, т. е. $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*$, а $\boldsymbol{v} = v_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + v_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + v_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + v_3 \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} v_0 + v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & v_0 - v_3 \end{pmatrix}$ — фиксированный кватернион с комплексными координатами и единичным определителем $\det \boldsymbol{v} = 1$, т. е. $\boldsymbol{v} \in SL(2)$.

Определим преобразование $\boldsymbol{\xi} \longmapsto \tilde{\boldsymbol{\xi}}$ формулой

$$
\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{v}^*. \tag{17}
$$

Поскольку $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^* = \widetilde{\boldsymbol{\xi}}$, координаты кватерниона $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{\xi}_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + \tilde{\xi}_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \tilde{\xi}_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + \tilde{\xi}_3 \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 + \tilde{\xi}_3 & \tilde{\xi}_1 - i\tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_1 + i\tilde{\xi}_2 & \tilde{\xi}_0 - \tilde{\xi}_3 \end{pmatrix}$ вещественны.

Из формулы (17) и условия $\det \boldsymbol{v} = 1$ следует, что $\det \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \det \boldsymbol{\xi}$, т. е. $\tilde{\xi}_0^2 - \tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_2^2 - \tilde{\xi}_3^2 = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$. Значит, преобразование, задаваемое формулой (17), есть преобразование Лоренца.

Преобразование (17) можно записать в виде

$$\vec{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = W\vec{\boldsymbol{\xi}}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix},$$

где W — вещественная матрица.

Из формул (7) и (10) следует, что

$$W = \langle \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}^* \rangle^\top,$$

где

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_0 & -iv_3 & iv_2 \\ v_2 & iv_3 & v_0 & -iv_1 \\ v_3 & -iv_2 & iv_1 & v_0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть что,

$$\det \boldsymbol{v} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det\langle \boldsymbol{v} \rangle = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det W = 1.$$

Следовательно, преобразование, задаваемое формулой (17), есть собственное преобразование Лоренца (сохраняет ориентацию).

Известно (см., например, [12]), что любое собственное преобразование Лоренца может быть задано формулой (17).

Обозначим

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

легко показать, что $\langle \boldsymbol{v} \rangle J \langle \boldsymbol{v} \rangle^\top = J$ и $WJW^\top = J$.

Заметим, что для $\boldsymbol{v} \in SL(2)$ имеем $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}^{-1}$. Поэтому в силу свойства (11)

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{v}^* \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \boldsymbol{v}^{-*}\underline{\boldsymbol{\xi}} v^{-1}. \tag{18}$$

Как отмечалось,

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{v}^* \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = W\vec{\boldsymbol{\xi}}, \quad \text{где } W = \langle \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{v}^* \rangle^\top.$$

Из (18) следует, что

$$\underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \boldsymbol{v}^{-*}\underline{\boldsymbol{\xi}} v^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\underline{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}} = L\vec{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \quad \text{где } L = W^{-\top}.$$

Пусть координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) преобразованы с помощью собственного преобразования Лоренца L:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Это преобразование в кватернионах может быть записано так:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_0+\tilde{x}_3 & \tilde{x}_1-i\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1+i\tilde{x}_2 & \tilde{x}_0-\tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}^{-*}\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}^{-1},$$

при некоторой $\boldsymbol{v}\in SL(2)$.

Как известно, производные при этом преобразуются по формулам:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\partial}_0 \\ \tilde{\partial}_1 \\ \tilde{\partial}_2 \\ \tilde{\partial}_3 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_0 \\ -\tilde{\partial}_1 \\ -\tilde{\partial}_2 \\ -\tilde{\partial}_3 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} \partial_0 \\ -\partial_1 \\ -\partial_2 \\ -\partial_3 \end{pmatrix},$$

которые в кватернионой записи выглядят соответственно следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{\partial}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{v}^*, \quad \underline{\tilde{\boldsymbol{\partial}}} = \boldsymbol{v}^{-*}\underline{\boldsymbol{\partial}}\boldsymbol{v}^{-1}. \tag{19}$$

Сделаем преобразование

$$\underline{\tilde{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{v}^{-*}\underline{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}^{-1}; \quad \tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{p}\boldsymbol{v}^*, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{q}\boldsymbol{v}^*, \tag{20}$$

при этом

$$\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}^*, \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{v}^*. \tag{21}$$

При преобразованиях (19), (20) система (3^{**})

$$\boldsymbol{p}\cdot\underline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\partial}\cdot\underline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{q} = f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$$

преобразуется в систему

$$\tilde{\boldsymbol{p}}\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{u}}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\partial}} + \tilde{\boldsymbol{\partial}}\cdot\underline{\tilde{\boldsymbol{u}}}\cdot\tilde{\boldsymbol{q}} = f(\tilde{\boldsymbol{p}}+\tilde{\boldsymbol{q}}). \tag{22}$$

Система (3^{**}), как мы знаем, записывается в виде системы (3^*)

$$(A_0\partial_0 + A_1\partial_1 + A_2\partial_2 + A_3\partial_3)\underline{\vec{\boldsymbol{u}}} = f\vec{\boldsymbol{k}},$$

где матрицы A_j имеют вид (2). Аналогично система (22) записывается в виде системы

$$(\widetilde{A}_0\tilde{\partial}_0 + \widetilde{A}_1\tilde{\partial}_1 + \widetilde{A}_2\tilde{\partial}_2 + \widetilde{A}_3\tilde{\partial}_3)\underline{\vec{\tilde{\boldsymbol{u}}}} = f\vec{\tilde{\boldsymbol{k}}},$$

где матрицы $\widetilde{A}_j$ тоже имеют вид (2), только параметры системы преобразованы по формулам (21), т. е.

$$\begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_3 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_3 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что

$$\tilde{\xi}_0\widetilde{A}_0 + \tilde{\xi}_1\widetilde{A}_1 + \tilde{\xi}_2\widetilde{A}_2 + \tilde{\xi}_3\widetilde{A}_3 = L^\top(\xi_0A_0 + \xi_1A_1 + \xi_2A_2 + \xi_3A_3)L.$$

Поскольку $\det L = 1$, то

$$\det[\tilde{\xi}_0\widetilde{A}_0 + \tilde{\xi}_1\widetilde{A}_1 + \tilde{\xi}_2\widetilde{A}_2 + \tilde{\xi}_3\widetilde{A}_3] = \det[\xi_0A_0 + \xi_1A_1 + \xi_2A_2 + \xi_3A_3]. \tag{23}$$

Выпишем инварианты преобразований Лоренца (18), (21), которые будут использованы в следующем параграфе:

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_0^2 - \tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_2^2 - \tilde{\xi}_3^2 = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2, \\ \tilde{k}_0^2 - \tilde{k}_1^2 - \tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_3^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \\ \tilde{\beta}_0^2 - \tilde{\beta}_1^2 - \tilde{\beta}_2^2 - \tilde{\beta}_3^2 = \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2, \\ \tilde{k}_0\tilde{\beta}_0 - \tilde{k}_1\tilde{\beta}_1 - \tilde{k}_2\tilde{\beta}_2 - \tilde{k}_3\tilde{\beta}_3 = k_0\beta_0 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3, \\ \tilde{k}_0\tilde{\xi}_0 - \tilde{k}_1\tilde{\xi}_1 - \tilde{k}_2\tilde{\xi}_2 - \tilde{k}_3\tilde{\xi}_3 = k_0\xi_0 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - k_3\xi_3, \\ \tilde{\beta}_0\tilde{\xi}_0 - \tilde{\beta}_1\tilde{\xi}_1 - \tilde{\beta}_2\tilde{\xi}_2 - \tilde{\beta}_3\tilde{\xi}_3 = \beta_0\xi_0 - \beta_1\xi_1 - \beta_2\xi_2 - \beta_3\xi_3. \end{cases} \tag{24}$$

§ 4. Уравнение конуса характеристических нормалей

Лемма 3. *Пусть* $\boldsymbol{\xi} = \xi_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \xi_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3\boldsymbol{\sigma}_3$, $\xi_0 > \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$. *Тогда* $\exists \boldsymbol{v} \in SL(2) : \boldsymbol{v\xi v}^* = \mu\boldsymbol{\sigma}_0$ $(\mu = \det\boldsymbol{\xi})$.

Доказательство. В самом деле,

$$\xi_0 > \sqrt{\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$$
$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \xi_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \xi_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \xi_0+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \xi_0 - \xi_3 \end{pmatrix} > 0.$$

Пусть $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathbb{C}^2$ — двумерные строчки, составляющие матрицу $\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{pmatrix}$. Определим в пространстве двумерных строчек унитарное скалярное произведение равенством:

$$[\mathrm{v}_j, \mathrm{v}_k] = \mathrm{v}_j \boldsymbol{\xi} \mathrm{v}_k^*. \tag{25}$$

Формула $\boldsymbol{v\xi v}^* = \mu\boldsymbol{\sigma}_0$ эквивалентна соотношению $[\mathrm{v}_j, \mathrm{v}_k] = \mu\delta_{jk}$, которое означает, что в скалярном произведении, задаваемом формулой (25), строчки v_1 и v_2 ортогональны между собой и их длина равна μ. Ясно, что такие строчки v_1 и v_2 существуют. □

На геометрическом языке лемма 3 утверждает, что любой вещественный четырехмерный вектор, расположенный внутри верхней полы прямого кругового конуса, может быть преобразованием Лоренца преобразован в вертикальный вектор.

Пусть $\boldsymbol{\xi} = \xi_0\boldsymbol{\sigma}_0 + \xi_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \xi_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \xi_3\boldsymbol{\sigma}_3$, $\xi_0 > \sqrt{\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$. Сделаем преобразование Лоренца, существование которого сформулировано в лемме 3. Тогда (см. (23))

$$\begin{aligned}
\det[\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3] &= \det[\tilde\xi_0 \widetilde{A}_0 + \tilde\xi_1 \widetilde{A}_1 + \tilde\xi_2 \widetilde{A}_2 + \tilde\xi_3 \widetilde{A}_3] = \det[\tilde\xi_0 \widetilde{A}_0] \\
= \tilde\xi_0^4 \det \widetilde{A}_0 &= \tilde\xi_0^4[(\tilde k_1\tilde\beta_1 + \tilde k_2\tilde\beta_2 + \tilde k_3\tilde\beta_3)^2 + \tilde k_0^2(\tilde k_0^2 - \tilde k_1^2 - \tilde k_2^2 - \tilde k_3^2 - \tilde\beta_1^2 - \tilde\beta_2^2 - \tilde\beta_3^2)] \\
= \tilde\xi_0^2\big[(\tilde k_0\tilde\beta_0 &- \tilde k_1\tilde\beta_1 - \tilde k_2\tilde\beta_2 - \tilde k_3\tilde\beta_3)^2\tilde\xi_0^2 - 2(\tilde k_0\tilde\beta_0 - \tilde k_1\tilde\beta_1 - \tilde k_2\tilde\beta_2 - \tilde k_3\tilde\beta_3)(\tilde k_0\tilde\xi_0)(\tilde\beta_0\tilde\xi_0) \\
&+ \big(\tilde k_0^2 - \tilde k_1^2 - \tilde k_2^2 - \tilde k_3^2 + \tilde\beta_0^2 - \tilde\beta_1^2 - \tilde\beta_2^2 - \tilde\beta_3^2\big)(\tilde k_0\tilde\xi_0)^2\big].
\end{aligned}$$

Равенства (24) в данном случае принимают вид

$$\begin{cases}
\tilde\xi_0^2 = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2, \\
\tilde k_0^2 - \tilde k_1^2 - \tilde k_2^2 - \tilde k_3^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2, \\
\tilde\beta_0^2 - \tilde\beta_1^2 - \tilde\beta_2^2 - \tilde\beta_3^2 = \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2, \\
\tilde k_0\tilde\beta_0 - \tilde k_1\tilde\beta_1 - \tilde k_2\tilde\beta_2 - \tilde k_3\tilde\beta_3 = k_0\beta_0 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3, \\
\tilde k_0\tilde\xi_0 = k_0\xi_0 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - k_3\xi_3, \\
\tilde\beta_0\tilde\xi_0 = \beta_0\xi_0 - \beta_1\xi_1 - \beta_2\xi_2 - \beta_3\xi_3.
\end{cases}$$

Используя эти равенства, приходим к формуле уравнения конуса характеристических нормалей системы (3):

$$\begin{aligned}
&\det[\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3] \\
&\quad\equiv \big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big)\big[(k_0\beta_0 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3)^2\big(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\big) \\
&- 2(k_0\beta_0 - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3)(k_0\xi_0 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - k_3\xi_3)(\beta_0\xi_0 - \beta_1\xi_1 - \beta_2\xi_2 - \beta_3\xi_3) \\
&\quad+ \big(k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 + \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2\big)(k_0\xi_0 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 - k_3\xi_3)^2\big] = 0.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

2. *Гордиенко В. М.* Гиперболические системы, эквивалентные волновому уравнению // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 19–27.

3. *Friedrichs K. O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // Com. Pure Appl. Math. 1954. V. 7, N 2. P. 345–392.

4. *Годунов С. К., Костин В. И. Приведение гиперболического уравнения к симметрической гиперболической системе в случае двух пространственных уравнений* // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 3–20.

5. *Костин В. И.* О симметризации гиперболических операторов // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Наука, 1980. С. 112–116.

6. *Михайлова Т. Ю.* Симметризация инвариантных гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 3. С. 546–550.

7. *Иванов В. В.* Строго гиперболические операторы, не допускающие гиперболической симметризации // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 84–93.

8. *Gordienko V. M.* Un probleme mixte pair l'equation vectorielle des ondes: Cas de dissipation de l'energie; Cas mal poses // C.r. Acad. Sci. 1979. V. 288, N 10. Ser. A. P. 547–550.

9. *Гордиенко В. М.* Симметризация смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 84–104.

10. *Малышев А. Н.* Смешанная задача для гиперболического уравнений второго порядка с комплексным граничным условием первого порядка // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 102–121.

11. *Бондаренко О. А., Гордиенко В. М.* Симметризация векторного гиперболического уравнения второго порядка с двумя пространственными переменными // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 3–9.

12. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.

Статья поступила 9 сентября 2009 г.

Гордиенко Валерий Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`gordienk@math.nsc.ru`