Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 510.53+512.552.4+512.579+519.117

БАЗИСЫ ГРЕБНЕРА — ШИРШОВА ДЛЯ АЛГЕБР РОТА — БАКСТЕРА

Л. А. Бокуть, Ю. Чен, Ш. Ден

Аннотация. Доказана лемма о композиции — бриллиантовая лемма для ассоциативных алгебр Рота — Бакстера (без единицы над полем характеристики нуль). В качестве следствия получено другое доказательство того, что слова Картье образуют линейный базис свободной коммутативной алгебры Рота — Бакстера. Показано также, что каждая счетно порожденная алгебра Рота — Бакстера вложима в 2-порожденную алгебру Рота — Бакстера.

Ключевые слова: алгебра Рота — Бакстера, базис Гребнера — Ширшова.

1. Введение

Теория базисов Гребнера и Гребнера — Ширшова была инициирована независимо А. И. Ширшовым для неассоциативных (коммутативных, антикоммутативных) алгебр [1] и для алгебр Ли (а в неявном виде и для ассоциативных алгебр) [2] (см. также [3–5]), Хиронака для алгебр степенных рядов (формальных и сходящихся) [6] и Бухбергером для ассоциативных коммутативных алгебр [7]. В настоящее время эта теория широко применяется в различных областях математики и информатики, включая коммутативную алгебру и комбинаторную алгебру (см., например, [8–12]).

Лемма о композиции (бриллиантовая лемма, теорема Бухбергера) является краеугольным камнем этой теории. Она утверждает, что в соответствующей свободной алгебре $A_k(X)$ над полем k с множеством свободных порождающих X и с фиксированным допустимым (согласованным с умножением) порядком базисных слов (мономов) (в случае алгебр Ли это неассоциативные слова Линдона — Ширшова) следующие условия на подмножество S из $A_k(X)$ эквивалентны:

(1) любая композиция элементов (многочленов) из S тривиальна, т. е. приводится к нулю с помощью исключения старших слов элементов из S;

(2) если $f \in \mathrm{Ideal}(S)$, то старшее слово $\bar{f}$ содержит старшее слово $\bar{s}$ некоторого элемента $s \in S$ (в случае лиевых многочленов $\bar{f}$ означает старшее слово f как некоммутативного многочлена, т. е. мы должны раскрыть в f все лиевы скобки $[x, y] = xy - yx$);

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–09–00157), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1), Интеграционного гранта СО РАН (№ 2009.97), а также грантов NNSF, Китай (№ 10771077) и NSF, провинция Гуандонг, Китай (№ 06025062).

(3) множество $\mathrm{Irr}(S)$ всех S-приведенных, т. е. не содержащих $\bar{s}$, $s \in S$, базисных слов образует линейный базис алгебры $A_k(X|S) = A_k(X)/\mathrm{Id}(S)$ с порождающими X и определяющими соотношениями S.

В настоящее время различные версии леммы о композиции известны также для следующих классов алгебр: (цветных) супералгебр Ли и ограниченных алгебр Ли [13–15], ассоциативных конформных алгебр [16], модулей [17, 18] (см. также [19]), диалгебр [20], Ω-алгебр [21], ассоциативных Ω-алгебр [22].

Алгебры Рота — Бакстера введены Бакстером в [23] и изучались в работе Рота [24], после чего за ними закрепилось это название. В настоящее время алгебры Рота — Бакстера применяются в алгебре, комбинаторике, математической физике и других разделах математики (см., например, [25–33]).

В этой работе мы доказываем вариант леммы о композиции для (ассоциативных) алгебр Рота — Бакстера без единицы над полем характеристики нуль. Это дает систематический метод изучения алгебр Рота — Бакстера, заданных порождающими и определяющими соотношениями. Используя ее, мы дадим новое доказательство основного результата работы Картье [34] о базисе свободной коммутативной алгебры Рота — Бакстера, правда, только в характеристике нуль. Мы доказываем также теорему о вложении счетно порожденных алгебр Рота — Бакстера веса 0 в такие же двупорожденные алгебры. Наконец, в качестве упражнения указываем, что все композиции пересечения тривиальны для универсальных обертывающих алгебр Рота — Бакстера дендриформных диалгебр и триалгебр (в смысле Лодея, см. [35, 36]).

Везде ниже k — поле характеристики нуль, греческие буквы α, β с индексами обозначают элементы k (или целые числа).

Мы благодарим Ч.-Х. Мо за полезные обсуждения.

2. Свободная алгебра Рота — Бакстера

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем k с одноместной линейной операцией $P : A \to A$, удовлетворяющей следующему тождеству для некоторого элемента $\lambda \in k$:

$$P(x)P(y) = P(P(x)y) + P(xP(y)) + \lambda P(xy) \quad \forall x, y \in A.$$

Тогда A называется *алгеброй Рота — Бакстера веса* λ.

Как обычно в теории алгебраических систем [37], идеалы алгебр Рота — Бакстера должны быть замкнуты относительно операции P, гомоморфизмы перестановочны с P, свободные алгебры определяются универсальным условием. Линейный базис свободной алгебры Рота — Бакстера $RB_k(X, \lambda) = RB(X)$ веса λ найден в работе [29] (см. также [22]). Он состоит из всех термов (слов) $\Phi(X)$ в сигнатуре $(\cdot, P)$ от переменных X, не содержащих подтермов (подслов) вида $P(u)P(v)$. Будем называть эти слова *базисными*. Множество X считаем вполне упорядоченным.

Ясно, что $P(\Phi(X)) \subset \Phi(X)$. Если $u \in X \cup P(\Phi(X))$, то слово u назовем *простым*. Любое базисное слово $u \in \Phi(X)$ представимо единственным образом в виде $u = u_1 \dots u_n$, где u_i — простые слова и u_i, u_{i+1} оба не могут иметь вид $P(u_i'), P(u_{i+1}')$. Число n обозначаем, следуя [29], через $b(u)$. Определим вес

$$wt(u) = (\deg(u), \deg_{\{P\}}(u), u_1, \dots, u_n),$$

где $\deg(u)$ — число букв из $X \cup \{P\}$ в u, $\deg_{\{P\}}(u)$ — число букв P в u. Упорядочим веса лексикографически, продолжая порядок на X и считая, что $P(v) >$

$P(w)$, если $v > w$. Базисные слова упорядочим в соответствии с упорядоченностью их весов. В результате $\Phi(X)$ становится вполне упорядоченным множеством. Старшее базисное слово элемента $f \in RB(X)$ обозначаем через $\bar{f}$. Коэффициент при $\bar{f}$ называем *старшим* коэффициентом f. Если старший коэффициент f равен 1, то f называется *унитальным*.

Пусть $u = u_1 \dots u_s$, $v = v_1 \dots v_l$ — представления двух базисных слов через простые слова. Тогда для приведения uv к базисному виду достаточно, очевидно, представить $u_s v_1$ в виде линейной комбинации базисных слов (см. также [29]).

Пусть $\mathbb{N}^+$ — множество положительных целых чисел.

Лемма 2.1. *Пусть $u, v \in \Phi(X)$, $n, m \geq 1$. Имеет место равенство*

$$P^n(u) \cdot P^m(v) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{(n,m,s)} P^{n+m-s}(P^s(u) \cdot v) + \sum_{l=1}^{m} \beta_{(n,m,l)} P^{n+m-l}(u \cdot P^l(v)) + \lambda\varepsilon(n, m, u, v),$$

где $\alpha_{(n,m,s)}$, $\beta_{(n,m,l)} \in \mathbb{N}^+$, $\varepsilon(n, m, u, v) \in P(RB(X))$, $\deg_{\{P\}}(\overline{\varepsilon(n, m, u, v)}) = \deg_{\{P\}}(P^n(u)) + \deg_{\{P\}}(P^m(v)) - 1$ и $\deg_X(\overline{\varepsilon(n, m, u, v)}) = \deg_X(u) + \deg_X(v)$. Более того, если положить $\alpha_{(n,0,s)} = 0$, $\beta_{(0,m,l)} = 0$, то выполняются следующие рекуррентные соотношения:

1) $\alpha_{(n,1,s)} = 1$ *и* $\beta_{(1,m,l)} = 1$, *где* $1 \leq s \leq n-1$, $1 \leq l \leq m-1$;

2) $\alpha_{(n,m,s)} = \alpha_{(n-1,m,s)} + \alpha_{(n,m-1,s)}$ *и* $\beta_{(n,m,l)} = \beta_{(n-1,m,l)} + \beta_{(n,m-1,l)}$, *где* $1 \leq s \leq n-1$, $1 \leq l \leq m-1$;

3) $\alpha_{(n,m,n)} = \beta_{(n,m,m)} = 1$.

Доказательство. Индукция по $N = n + m$. Если $N = 2$, т. е., $n = m = 1$, то

$$P(u) \cdot P(v) = P(P(u) \cdot v) + P(u \cdot P(v)) + \lambda P(u \cdot v).$$

Тогда $\alpha_{(1,1,1)} = \beta_{(1,1,1)} = 1$, и утверждение верно.

Предположим, что лемма верна для некоторого $N \geq 2$, и докажем ее для $N + 1$. Для $n + m = N + 1$, $1 \leq n, m \leq N$, имеем

$$P^n(u) \cdot P^m(v) = P^n(u) \cdot P^{N+1-n}(v) = P(P^{n-1}(u)) \cdot P(P^{N-n}(v))$$
$$= P(P^n(u) \cdot P^{N-n}(v)) + P(P^{n-1}(u) \cdot P^{N+1-n}(v)) + \lambda P(P^{n-1}(u) \cdot P^{N-n}(v)).$$

Рассмотрим следующие три случая.

Случай 1: $n = 1$. По индукции

$$P(u) \cdot P^{N-1}(v) = \alpha_{(1,N-1,1)} P^{N-1}(P(u) \cdot v) + \sum_{l=1}^{N-1} \beta_{(1,N-1,l)} P^{N-l}(u \cdot P^l(v)) + \lambda\varepsilon(1, N-1, u, v),$$

где $\alpha_{(1,N-1,1)} = 1 = \beta_{(1,N-1,N-1)}$, $\beta_{(1,N-1,l)} = 1$, $1 \leq l \leq N-2$. Поэтому

$$P(u) \cdot P^N(v) = P(\alpha_{(1,N-1,1)} P^{N-1}(P(u) \cdot v) + \sum_{l=1}^{N-1} \beta_{(1,N-1,l)} P^{N-l}(u \cdot P^l(v)) + \lambda\varepsilon(1, N-1, u, v) + P(u \cdot P^N(v))$$

$$+\lambda P(u\cdot P^{N-1}(v))=\alpha_{(1,N,1)}P^N(P(u)\cdot v)$$
$$+\sum_{l=1}^{N}\beta_{(1,N,l)}P^{N+1-l}(u\cdot P^l(v))+\lambda\varepsilon(1,N,u,v),$$

где $\alpha_{(1,N,1)}=\alpha_{(1,N-1,1)}=1=\beta_{(1,N,N)}$, $\beta_{(1,N,l)}=\beta_{(1,N-1,l)}=1$, $1\le l\le N-1$, и $\varepsilon(1,N,u,v)=\varepsilon(1,N-1,u,v)+P(u\cdot P^{N-1}(v))$. Следовательно, $\beta_{(1,m,l)}=1$, где $1\le l\le m-1$. Результат доказан.

Случай 2: $n=N$. Аналогично первому случаю доказывается, что $\alpha_{(n,1,s)}=1$, где $1\le s\le n-1$.

Случай 3: $1<n<N$. По индукции

$$P^n(u)\cdot P^m(v)=P^n(u)\cdot P^{N+1-n}(v)=P\Bigg(\sum_{s=1}^{n}\alpha_{(n,N-n,s)}P^{N-s}(P^s(u)\cdot v)$$
$$+\sum_{l=1}^{N-n}\beta_{(n,N-n,l)}P^{N-l}(u\cdot P^l(v))+\lambda\varepsilon(n,N-n,u,v)\Bigg)$$
$$+P\Bigg(\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_{(n-1,N+1-n,s)}P^{N-s}(P^s(u)\cdot v)+\sum_{l=1}^{N+1-n}\beta_{(n-1,N+1-n,l)}P^{N-l}(u\cdot P^l(v))$$
$$+\lambda\varepsilon(n-1,N+1-n,u,v)\Bigg)+\lambda P(P^{n-1}(u)\cdot P^{N-n}(v))$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\alpha_{(n,N+1-n,s)}P^{N+1-s}(P^s(u)\cdot v)+\sum_{l=1}^{N+1-n}\beta_{(n,N+1-n,l)}P^{N+1-l}(u\cdot P^l(v))$$
$$+\lambda\varepsilon(n,N+1-n,u,v)=\sum_{s=1}^{n}\alpha_{(n,m,s)}P^{n+m-s}(P^s(u)\cdot v)$$
$$+\sum_{l=1}^{m}\beta_{(n,m,l)}P^{n+m-l}(u\cdot P^l(v))+\lambda\varepsilon(n,m,u,v),$$

где

$$\alpha_{(n,m,n)}=\alpha_{(n,N+1-n,n)}=\alpha_{(n,N-n,n)}=1=\beta_{(n-1,N+1-n,N+1-n)}$$
$$=\beta_{(n,N+1-n,N+1-n)}=\beta_{(n,m,m)},$$
$$\alpha_{(n,m,s)}=\alpha_{(n-1,m,s)}+\alpha_{(n,m-1,s)},\quad \beta_{(n,m,l)}=\beta_{(n-1,m,l)}+\beta_{(n,m-1,l)},$$

$1\le s\le n-1, 1\le l\le m-1$ и

$$\varepsilon(n,m,u,v)=P(\varepsilon(n,N-n,u,v))$$
$$+P(\varepsilon(n-1,N+1-n,u,v))+P(P^{n-1}(u)\cdot P^{N-n}(v)).$$

Результат доказан. □

Лемма 2.2. *Для любых $u,v\in\Phi(X)$ если $u,v\notin P(\Phi(X))$, то $\overline{P(u)v}$ начинается на простое слово, большее u, а $\overline{uP(v)}$ — на простое слово, меньшее или равное u. Следовательно, $\overline{P(u)\cdot v}>\overline{u\cdot P(v)}$. Более того, поскольку характеристика поля k равна нулю, то $\overline{P^n(u)\cdot P^m(v)}=P^{n+m-1}(\overline{P(u)\cdot v})$, $m\ge1$, $n\ge1$.*

Доказательство. Первая часть этой леммы легко доказывается индукцией по $\deg(u)+\deg(v)\ge2$. Основание индукции очевидно. Докажем сначала, что $\overline{P(u)v}$ начинается на простое слово, большее u. Пусть $v=v_1\dots v_l$ —

разложение на простые множители. Если $v_1 \in X$, то слово $P(u)v$ базисное и утверждение очевидно. Пусть $v_1 = P^m(v_1')$, $m \geq 1$, $v_1' \notin P(\Phi(X))$. Тогда в силу леммы 2.1 имеем

$$P(u)v = P(u)v_1 \dots v_l = P^m(\overline{P(u)v_1'})v_2 \dots v_l + P^m(\overline{uP(v_1')})v_2 \dots v_l + \dots,$$

где многоточие означает меньшие базисные слова. По индукции $\overline{P(u)v_1'}$ начинается на простое слово, большее u, а $\overline{uP(v_1')}$ — на простое слово, меньшее или равное u. Значит, $\overline{P(u)v} = P^m(\overline{P(u)v_1'})v_2 \dots v_l$, и утверждение доказано.

Теперь покажем, что $\overline{uP(v)}$ начинается на простое слово, меньшее или равное u. Пусть $u = u_1 \dots u_s$ — разложение на простые множители. Если $s = 1$, то слово $uP(v)$ базисное. Если $s > 1$, то $\overline{uP(v)}$ начинается на $u_1 < u$.

Вторая часть следует из первой ввиду леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.3. *Для любых $u, v \in \Phi(X)$ если $u > v$, то $\overline{u \cdot w} > \overline{v \cdot w}$ и $\overline{w \cdot u} > \overline{w \cdot v}$ для любого $w \in \Phi(X)$. Более того, предыдущие неравенства верны для любого терма (слова) w. Кроме того, $P(u) > P(v)$.*

Доказательство. Если $\mathrm{Deg}(u) > \mathrm{Deg}(v)$, то утверждение ясно. Пусть $\mathrm{Deg}(u) = \mathrm{Deg}(v)$, $\deg(u) = \deg(v) = d \geq 1$. Применим индукцию по d.

Пусть $u = u_1 \dots u_s$, $v = v_1 \dots v_l$, $w = w_1 \dots w_k$, $s, l, k \geq 1$, где u_i, v_j, w_e — простые слова. Можно считать, что $k = 1$. Можно также считать, что $w = P^m(w')$, $m \geq 1$, $w' \notin P(\Phi(X))$.

Покажем сначала, что $\overline{u \cdot w} > \overline{v \cdot w}$.

Случай 1: $s > 1$, $l > 1$. Тогда

$$\overline{u \cdot w} = u_1 \dots u_{s-1}\overline{u_s \cdot w} > \overline{v \cdot w} = v_1 \dots v_{l-1}\overline{v_l \cdot w}$$

(поскольку либо $u_1 > v_1$, либо $u_1 = v_1$ и тогда можно применить индукцию).

Случай 2: $s = 1$, $l > 1$. Тогда $u \cdot w = u_1 \cdot w$, $v \cdot w = v_1 \dots v_{l-1}(v_l \cdot w)$, $u_1 > v_1$. Поскольку $\deg(u) = \deg(v)$, то $u_1 \notin X$, т. е. $u_1 \in P(\Phi(X))$, пусть $u_1 = P^n(u_1')$, $n \geq 1$, $u_1' \notin P(\Phi(X))$. Так как в силу леммы 2.2 $\overline{u_1 \cdot w} = \overline{P^n(u_1') \cdot P^m(w')} > u_1$, то $\overline{u \cdot w} > \overline{v \cdot w}$.

Случай 3: $s = l = 1$. Если $u_1 \in X$, то $v_1 \in X$, и результат верен. В противном случае $u_1 = P^n(u_1')$, $n \geq 1$, $v_1 = P^{n'}(v_1')$, $n' \geq 1$, где $u_1', v_1' \notin P(\Phi(X))$. Рассмотрим два подслучая.

(i) Если $n > n'$, то в силу леммы 2.2

$$\overline{u \cdot w} = P^{n+m-1}(\overline{P(u_1') \cdot w'}) > P^{n'+m-1}(\overline{P(v_1') \cdot w'}) = \overline{v \cdot w}.$$

(ii) Если $n = n'$, то $u_1' > v_1'$. По лемме 2.2 имеем

$$\overline{u \cdot w} = P^{n+m-1}(\overline{P(u_1') \cdot w'}), \quad \overline{v \cdot w} = P^{n+m-1}(\overline{P(v_1') \cdot w'}).$$

По индукции $\overline{P(u_1') \cdot w'} > \overline{P(v_1') \cdot w'}$, поэтому $\overline{u \cdot w} > \overline{v \cdot w}$.

Заметим, что случай $s > 1$, $l = 1$ невозможен. Этим доказано, что $\overline{u \cdot w} > \overline{v \cdot w}$.

Покажем теперь, что $\overline{w \cdot u} > \overline{w \cdot v}$.

Случай 1: $u_1 > v_1$. Достаточно предположить, что $u_1 = P^n(u_1')$, $v_1 = P^{n'}(v_1')$, где $n, n' \geq 1$, $u_1', v_1' \notin P(\Phi(X))$ (случай $n \geq 1$, $n' = 0$ очевиден). Имеются два подслучая.

(i) Если $n > n'$, то по лемме 2.2

$$\overline{w \cdot u} = P^{n+m-1}(\overline{P(w') \cdot u_1'})u_2 \dots u_s > P^{n'+m-1}(\overline{P(w') \cdot v_1'})v_2 \dots v_l = \overline{w \cdot v}.$$

(ii) Если $n = n'$, то $u_1' > v_1'$. По индукции имеем $\overline{P(w') \cdot u_1'} > \overline{P(w') \cdot v_1'}$. Поэтому по лемме 2.2

$$\overline{w \cdot u} = P^{n+m-1}(\overline{P(w') \cdot u_1'})u_2 \dots u_s > P^{n+m-1}(\overline{P(w') \cdot v_1'})v_2 \dots v_l = \overline{w \cdot v}.$$

Случай 2: $u_1 = v_1$. Если $l > 1$, $s > 1$, то утверждение следует по индукционному предположению. Если $l = 1$, $s > 1$, то утверждение очевидно. Случай $l > 1$, $s = 1$ невозможен. Наконец, случай $l = 1$, $s = 1$ рассмотрен выше.

Пусть w — произвольный терм. Тогда w есть линейная комбинация базисных слов $w_1 > w_2 > \dots$, $\overline{w} = w_1$. По доказанному $\overline{uw_1} > \overline{uw_2} > \dots$ и аналогично для v. Отсюда следует, что $\overline{uw} = \overline{uw_1} > \overline{vw} = \overline{vw_1}$.

Последнее утверждение леммы очевидно. $\square$

Пусть теперь $\star$ — символ, $\star \notin X$. Под базисными $\star$-словами от X будем понимать выражения из $\Phi(X \cup \{\star\})$ с единственным вхождением $\star$. Множество всех базисных $\star$-слов от X обозначим через $\Phi^{\star}(X)$. Определим общие $\star$-слова по индукции, начиная со слова $\star$. Если u — общее $\star$-слово, w — базисное слово от X, то слова wu, uw, $P(u)$ — общие $\star$-слова .

Пусть u — базисное (общее) $\star$-слово и $s \in RB(X)$. Назовем выражение

$$u_s = u_{\star \mapsto s}$$

базисным (общим) s-словом.

Другими словами, базисное (общее) s-слово u_s есть результат подстановки в $u_\star$ элемента s вместо символа $\star$.

Аналогично определим базисные $(\star_1, \star_2)$-слова как выражения из $\Phi(X \cup \{\star_1, \star_2\})$ с единственным вхождением каждого из символов $\star_1$ и $\star_2$. Обозначим через $\Phi^{\star_1,\star_2}(X)$ множество всех таких слов. Пусть $u \in \Phi^{\star_1,\star_2}(X)$. Назовем выражение

$$u_{s_1,s_2} = u_{\star_1 \mapsto s_1, \star_2 \mapsto s_2}$$

базисным s_1-s_2-словом.

Если $\overline{u_s} = u_{\bar{s}}$, то s-слово u_s назовем *нормальным s-словом.* Понятно, что нормальное s-слово является базисным s-словом. Если u_s — нормальное s-слово, то $P^l(u_s)$, $l \geq 1$, также нормальное s-слово.

Из леммы 2.3 вытекает

Лемма 2.4. *Для любых $u, v \in \Phi(X)$ если w — общее $\star$-слово, то*

$$u > v \Longrightarrow \overline{w_u} > \overline{w_v},$$

где $w_u = w_{\star \mapsto u}$ и $w_v = w_{\star \mapsto v}$. Более того, предыдущее неравенство верно для любого терма (слова) w от $X \cup \{\star\}$ с единственным вхождением $\star$.

Пусть $f, g \in RB(X)$ — унитальные элементы, $\bar{f} = u_1 u_2 \dots u_n$, где каждое u_i простое. Определим следующие композиции.

(i) Если $u_n \in P(\Phi(X))$, то определим композицию правого умножения как $f \cdot u$, где $u \in P(\Phi(X))$.

(ii) Если $u_1 \in P(\Phi(X))$, то определим композицию левого умножения как $u \cdot f$, где $u \in P(\Phi(X))$.

(iii) Пусть существует слово $w = \bar{f}a = b\bar{g}$, где fa — нормальное f-слово и bg — нормальное g-слово, $a, b \in \Phi(X)$ и $\deg(w) < \deg(\bar{f}) + \deg(\bar{g})$. Тогда определим композицию пересечения f и g относительно w как $(f,g)_w = f \cdot a - b \cdot g$.

(iv) Пусть существует слово $w = \bar{f} = u_{\bar{g}}$, $u \in \Phi^\star(X)$. Тогда определим композицию включения f и g относительно w как $(f,g)_w = f - u_g$. Заметим, что в этом случае u_g — нормальное g-слово.

По лемме 2.4
$$\overline{(f,g)_w} < w.$$

Пусть $S \subset RB(X)$ — множество унитальных элементов. Композицию $(f,g)_w$, $f, g \in S$, назовем *тривиальной относительно* (S, w), если
$$(f,g)_w = \sum_i \alpha_i u_{is_i},$$
где $s_i \in S$, u_{is_i} — нормальные s_i-слова и $u_{i\overline{s_i}} < w$. В этом случае будем обозначать
$$(f,g)_w \equiv 0 \operatorname{mod}(S, w).$$

Композицию левого (правого) умножения назовем *тривиальной* относительно S, если
$$u \cdot f = \sum_i \alpha_i u_{is_i} \quad \Big(f \cdot u = \sum_i \alpha_i u_{is_i}\Big),$$
где $s_i \in S$, u_{is_i} — нормальные s_i-слова и $u_{i\overline{s_i}} \le \overline{u \cdot f}$ ($u_i\overline{s_i} \le \overline{f \cdot u}$). Это обозначаем в виде
$$u \cdot f \equiv 0 \operatorname{mod}(S) \quad (f \cdot u \equiv 0 \operatorname{mod}(S)).$$

Вообще, для любых p и q, $p \equiv q \operatorname{mod}(S, w)$ означает, что $p - q = \sum\limits_i \alpha_i u_{is_i}$, где $s_i \in S$, u_{is_i} — нормальные s_i-слова и $u_{i\overline{s_i}} < w$.

Множество S называется *базисом Гребнера — Ширшова* в $RB(X)$ (идеала, порожденного S), если любая композиция $(f,g)_w$ элементов $f, g \in S$ тривиальна $\operatorname{mod}(S, w)$ и любая композиция левого (правого) умножения тривиальна $\operatorname{mod}(S)$.

Лемма 2.5. *Пусть для S любая композиция левого (правого) произведения тривиальна. Тогда любое общее s-слово u_s есть линейная комбинация базисных s-слово u_{is} с небольшими старшими словами, $\overline{u_{is}} \le \overline{u_s}$. Более того, любой терм u_s в алфавите $X \cup \{s\}$ с единственным вхождением s обладает этим же свойством.*

Доказательство. Индукция по старшему слову $\overline{u_s} \ge \bar{s}$. Рассмотрим одно из общих s-слов wu_s, u_sw, $P(u_s)$, где w — базисное слово, u_s — нормальное s-слово, и для всех общих s-слов с меньшими старшими словами лемма верна. Пусть это будет wu_s. Представим базисные слова w, $u_\star$ в виде произведения простых слов $w = w_1 \dots w_n$, $u_\star = u_1 \dots u_{i\star} \dots u_m$. Поэтому $wu_s = w_1 \dots (w_n \cdot u_1) \dots u_{is} \dots u_m$. Если $i > 1$, то лемма верна: если $w_n u_1$ — базисное слово, то всё слово — базисное s-слово. В противном случае $w_n u_1 = P(w_n')P(u_1')$ есть линейная комбинация базисных слов $P(v_j)$ и получаем линейную комбинацию базисных s-слов с небольшими старшими словами. Если $i = 1$, то $u_{1s} = s$ или $P(u_{1s}')$. В первом случае если $w_n s$ не образует композицию умножения, то все верно. Если же образует, то представим его как линейную комбинацию базисных s_i-слов с небольшими старшими словами. По индукции можно считать, что старшие слова равны $\overline{w_n s}$. Тогда получившиеся s_i-слова автоматически базисны. Во втором случае опять достаточно рассмотреть случай $w_n = P(w_n')$.

Тогда, применяя тождество Рота — Бакстера и затем индукцию, получаем, что $P(w'_n)P(u'_1)$ есть линейная комбинация слов $P(v_{js_j})$, где v_{js_j} — нормальные s_j-слова. Опять получаем линейную комбинацию базисных s_j-слов с небольшими старшими словами.

Пусть теперь u_s — произвольный терм в алфавите $X \cup \{s\}$ с единственным вхождением s. По индукции можно считать, что u_s имеет вид wu'_s, $u'_s w$ или $P(u'_s)$, где u'_s — базисное s-слово, w — произвольный терм в X. Представим w в виде линейной комбинации базисных слов $w_1 > w_2 > \dots$ таких, что $\overline{w} = w_1$. Теперь утверждение леммы следует из первой части. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть $S \subset RB(X)$ — унитальное подмножество. Если любая композиция левого (правого) умножения элементов S тривиальна* $\mathrm{mod}(S)$, *то каждое базисное s-слово u_s представимо в виде*

$$u_s = \sum_i \alpha_i u_{is_i},$$

где $s_i \in S, u_{is_i}$ — нормальные s_i-слова и $u_{i\overline{s_i}} \leq \overline{u_s}$.

Доказательство. Индукция по старшему слову $\overline{u_s} = \overline{u_{\bar{s}}}$. Пусть лемма верна для базисных s-слов со старшими словами, меньшими $\overline{u_s}$. Слово u_s имеет вид $u_s = w_1 s w_2$ или $u_s = w_1 P(v_s) w_2$. Во втором случае по индукции v_s можно считать нормальным s-словом, а тогда и u_s — нормальное s-слово с нужным старшим словом. Пусть имеет место первый случай и w_1 непусто. Тогда по предположению индукции sw_2 есть линейная комбинация нормальных s-слов. Опять они имеют один из видов, указанных ранее. Во втором случае лемма по-прежнему верна. Первый случай сводится к тому, что можно считать, что $u_s = w_1 s w_2$ и sw_2 — нормальное s-слово, если w_1 непусто.

Пусть w_1 пусто. Разложим w_2 на простые множители, $w_2 = v_1 \dots v_l$, $l \geq 1$. Тогда $u_s = sw_2 = (s \cdot v_1) \dots v_l$, где $(s \cdot v_1)$ либо нормальное s-слово, либо композиция правого умножения. В любом случае u_s есть линейная комбинация нормальных S-слов.

Пусть w_1 непусто. Можно считать, что w_1 в разложении на простые множители заканчивается на $P(v)$, $w_1 = wP(v)$. Тогда w либо пусто, либо заканчивается на $x \in X$. Если $P(v)s$ не образует композиции, то $w_1 s w_2$ — нормальное s-слово. Если $P(v)s$ образует композицию, то в силу тривиальности композиций левого умножения $P(v)s$ есть линейная комбинация нормальных S-слов u_{is_i} с небольшими старшими словами. В силу предположения индукции можно считать, что $u_s = wu'_{s_1} w_2$ и старшее слово $\overline{u'_{s_1}}$ равно $\overline{P(v)s}$, причем wu'_{s_1} — нормальное s_1-слово. Но тогда и $wu'_{s_1} w_2$ -нормальное s_1-слово с нужным старшим словом. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть S — базис Гребнера — Ширшова в $RB(X)$, $u_1, u_2 \in \Phi^\star(X)$ и $s_1, s_2 \in S$. Если $w_1 = u_{1\overline{s_1}} = u_{2\overline{s_2}}$, где u_{is_i} — нормальные s_i-слова, $i = 1, 2$, то*

$$u_{1s_1} \equiv u_{2s_2} \,\mathrm{mod}(S, w_1).$$

Доказательство. Имеются три возможных случая.

(i) Подслова $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$ не пересекаются. Тогда существует базисное $(\star_1, \star_2)$-слово Π такое, что

$$\Pi_{\overline{s_1}, \overline{s_2}} = u_{1\overline{s_1}} = u_{2\overline{s_2}},$$

где $u_{1s_1} = \Pi_{s_1,\overline{s_2}}$ и $u_2|_{s_2} = \Pi_{\overline{s_1},s_2}$ — нормальные s_1- и s_2-слова соответственно. Тогда

$$u_{2s_2} - u_{1s_1} = \Pi_{\overline{s_1},s_2} - \Pi_{s_1,\overline{s_2}} = -\Pi_{s_1-\overline{s_1},s_2} + \Pi_{s_1,\ s_2-\overline{s_2}}.$$

В силу лемм 2.5 и 2.6 $\Pi_{s_1-\overline{s_1},s_2}$ и $\Pi_{s_1,s_2-\overline{s_2}}$ суть линейные комбинации нормальных S-слов со старшими словами, меньшими w_1. Это означает, что

$$u_{1s_1} \equiv u_{2s_2} \bmod(S, w_1).$$

(ii) Подслова $\overline{s_1}$ и $\overline{s_2}$ имеют непустое пересечение, но не содержат друг друга, например, $w = \overline{s_1}b = a\overline{s_2}$ для $a, b \in \Phi(X)$ — подслово w_1. В частности, s_1b — нормальное s_1-слово и as_2 — нормальное s_2-слово. Поэтому существует $\Pi \in \Phi^\star(X)$ такое, что

$$\Pi_{\overline{s_1}b} = u_{1\overline{s_1}} = u_{2\overline{s_2}} = \Pi_{a\overline{s_2}},$$

где Π_{s_1b} — нормальное s_1b-слово и Π_{as_2} — нормальное as_2-слово. В результате

$$u_{2s_2} - u_{1s_1} = \Pi_{as_2} - \Pi_{s_1b} = -\Pi_{s_1b-as_2} = -\Pi_{(s_1,s_2)_w}.$$

Поскольку S — базис Гребнера — Ширшова, композиция пересечения $(s_1, s_2)_w$ есть линейная комбинация нормальных S-слов с небольшими старшими словами, т. е. строго меньшими w. В силу лемм 2.5 и 2.6 $\Pi_{(s_1,s_2)_w}$ есть линейная комбинация нормальных S-слов со старшими словами, строго меньшими w_1. Утверждение доказано.

(iii) Одно из слов $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$ содержит другое как подслово. Пусть, например, $w = \overline{s_1} = u_{\overline{s_2}}$ для некоторого базисного $\star$-слова u. Тогда существует базисное $\star$-слово Π такое, что $u_{1s_1} = \Pi_{s_1}, u_{2s_2} = \Pi_{u_{s_2}}$ и $u_{1s_1} - u_{2s_2} = \Pi_{s_1-u_{s_2}} = \Pi_{(s_1,s_2)_w}$.

Теперь утверждение доказывается аналогично случаю (ii). □

Лемма 2.8. *Пусть $S \subseteq RB(X)$ — подмножество унитальных многочленов,*

$$\mathrm{Irr}(S) \triangleq \{u \in \Phi(X) \mid u \neq v_{\bar{s}},\ s \in S,\ v_s \text{ — нормальное } s\text{-слово}\}.$$

Тогда любой элемент $f \in RB(X)$ представим в виде

$$f = \sum_i \alpha_i u_i + \sum_j \beta_j v_j s_j,$$

где $u_i \in \mathrm{Irr}(S)$, $\overline{u_i} \leq \bar{f}$, $s_j \in S$, v_{js_j} — нормальные s_j-слова и $v_{j\overline{s_j}} \leq \bar{f}$.

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_i \alpha_i u_i$, $0 \neq \alpha_i \in k$, $u_1 > u_2 > \dots$. Если $u_1 \in \mathrm{Irr}(S)$, то положим $f_1 = f - \alpha_1 u_1$. Если $u_1 \notin \mathrm{Irr}(S)$, т. е. существует $s_1 \in S$ такой, что $u_1 = v_{1\overline{s_1}}$, где v_{1s_1} — нормальное s_1-слово, то пусть $f_1 = f - \alpha_1 v_1 s_1$. В обоих случаях $\overline{f_1} < \bar{f}$. Теперь результат получается индукцией по старшему слову $\bar{f}$. □

Теорема 2.9 (лемма о композиции — бриллиантовая лемма для алгебр Рота — Бакстера). *Пусть $RB(X)$ — свободная алгебра Рота — Бакстера над полем характеристики 0, S — множество унитальных элементов из $RB(X)$, $>$ — мономиальный порядок на множестве базисных слов $\Phi(X)$, определенный выше. Следующие условия эквивалентны:*

(I) *S — базис Гребнера — Ширшова в $RB(X)$;*

(II) *$f \in \mathrm{Id}(S) \Rightarrow \bar{f} = u_{\bar{s}}$ для некоторого $u \in \Phi^\star(X)$, $s \in S$;*

(III) $\mathrm{Irr}(S) = \{u \in \Phi(X) \mid u \neq v_{\bar{s}},\ s \in S,\ v_s$ — *нормальное* s-*слово*$\}$ *есть* k-*базис алгебры* $RB(X|S) = RB(X)/\mathrm{Id}(S)$.

Доказательство. (I)$\Longrightarrow$(II). Пусть $0 \neq f \in \mathrm{Id}(S)$. По леммам 2.5, 2.6 можно считать, что $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_{is_i}$, где $s_i \in S$ и u_{is_i} — нормальные s_i-слова. Пусть $w_i = u_{i\overline{s_i}}$. Расположим эти слова в невозрастающем порядке:

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_l > w_{l+1} \geq \ldots \geq w_n.$$

Докажем лемму индукцией по l и $w_1 \geq \bar{f}$.

Если $l = 1$, то $\bar{f} = u_{1\overline{s_1}}$ и результат верен. Пусть $l \geq 2$. Тогда $w_1 = u_{1\overline{s_1}} = u_{2\overline{s_2}}$. Поскольку S — базис Гребнера — Ширшова, по лемме 2.7 имеем

$$u_{2s_2} - u_{1s_1} = \sum_j \beta_j v_{js_j},$$

где $s_j \in S$, $v_{j\overline{s_j}} < w_1$ и v_{js_j} — нормальные s_j-слова. Подставив это выражение в равенство для f, мы уменьшим число l. Если при этом окажется, что $l = 2$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, то уменьшим w_1. Во всех случаях результат следует из индукционных предположений.

(II)$\Longrightarrow$(III). Пусть $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ в $RB(X|S)$, где $u_i \in \mathrm{Irr}(S)$, $u_1 > u_2 > \cdots > u_n$ и $0 \neq \alpha_i \in k$. Тогда в $RB(X)$ имеем

$$g = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathrm{Id}(S).$$

По (II) $u_1 = \bar{g} \notin \mathrm{Irr}(S)$, что невозможно. Следовательно, $\mathrm{Irr}(S)$ — k-линейно независимое подмножество в $RB(X|S)$. Из леммы 2.8 следует, что это система линейных порождающих.

(III)$\Longrightarrow$(I). По лемме 2.8 композиция $(f,g)_w$, $f, g \in S$, имеет вид $(f,g)_w = \sum\limits_i \alpha_i u_i + \sum\limits_j \beta_j v_{js_j}$, где $u_i \in \mathrm{Irr}(S)$, $s_j \in S$, v_{js_j} — нормальные s_j-слова и $v_{j\overline{s_j}} \leq \overline{(f,g)_w} < w$. Поскольку $(f,g)_w \in \mathrm{Id}(S)$, в силу (III) получаем $\alpha_i = 0$. Таким образом, $(f,g)_w \equiv 0 \bmod(S,w)$. Аналогично доказывается утверждение для композиций левого (правого) умножений. $\square$

3. Приложения

Получим результат Картье [34] о базисе свободной коммутативной алгебры Рота — Бакстера при ограничении, что k — поле характеристики 0 (в работе [34] этого ограничения нет).

Теорема 3.1. *Пусть* $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — *вполне упорядоченное множество и* $\Phi(X)$ *определено и упорядочено, как выше. Положим*

$$f = x_i x_j - x_j x_i, \quad i > j,\ i, j \in I, \tag{1}$$

$$g = P(u)x_i - x_i P(u), \quad u \in \Phi(X),\ i \in I. \tag{2}$$

Тогда множество S, *состоящее из элементов* (1) *и* (2), *образует базис Гребнера — Ширшова в* $RB(X)$.

Доказательство. Все композиции пересечения и включения очевидным образом тривиальны. Поэтому остановимся только на композициях левого умножения.

Пусть $P(v) = P^l(v')$, где $l \geq 1$, $v' \notin P(\Phi(X))$. Тогда

$$P(v)(P(u)x_i - x_iP(u)) = P^l(v') \cdot (P^t(u')x_i - x_iP^t(u')) \\ \equiv (P^l(v') \cdot P^t(u'))x_i - x_i(P^l(v') \cdot P^t(u')) \bmod(S),$$

где $l, t \geq 1$, $u', v' \notin P(\Phi(X))$. По леммам 2.1 и 2.2

$$P^l(v') \cdot P^t(u') = \alpha_{(l,t,1)}P^{l+t-1}(P(v') \cdot u') + \varepsilon \triangleq \alpha_0\varepsilon_0 + \sum_{j=1} \alpha_j\varepsilon_j,$$

где $\varepsilon \in RB(X)$, $\varepsilon_j \in P(\Phi(X))$, $\varepsilon_j < \overline{P^{l+t-1}(P(v') \cdot u')} = \overline{P^l(v') \cdot P^t(u')}$, $\alpha_j \in k$, $j = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_0 = \overline{P^{l+t-1}(P(v') \cdot u')} = \overline{P^l(v') \cdot P^t(u')} \in P(\Phi(X))$ и $\alpha_0 = \alpha_{(l,t,1)}$. Поэтому

$$P(v)(P(u)x_i - x_iP(u)) \equiv \alpha_0(\varepsilon_0x_i - x_i\varepsilon_0) + \sum_{j=1} \alpha_j(\varepsilon_jx_i - x_i\varepsilon_j) \bmod(S),$$

где $\varepsilon_mx_i - x_i\varepsilon_m \in S$ и $\overline{\varepsilon_mx_i - x_i\varepsilon_m} \leq \overline{P^l(v') \cdot (P^t(u')x_i)} = \overline{P(v) \cdot (P(u)x_i)}$, $m \geq 0$. Итак, $P(v)(P(u)x_i - x_iP(u)) \equiv 0 \bmod(S)$. $\square$

Пусть S — множество элементов $RB(X)$, как в теореме 3.1. Ясно, что алгебра $RB(X|S)$ — это свободная коммутативная алгебра Рота — Бакстера над X веса λ.

Ввиду теорем 2.9 и 3.1 получаем

Следствие 3.2 [34]. *Пусть $RB(X|S)$ — свободная коммутативная алгебра Рота — Бакстера над X веса λ над полем характеристики 0, где S, как выше. Тогда*

$$\mathrm{Irr}(S) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$$

есть k-базис $RB(X|S)$, где

$$Y_1 = \{x_1x_2 \ldots x_n \in S(X) \mid n \in \mathscr{N}^+,\ x_i \in X,\ x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\},$$

$$Y_2 = \{P^{l_1}(u_1P^{l_2}(\ldots(u_{t-1}P^{l_t}(u_t))\ldots)) \in \Phi(X) \\ \mid u_j \in Y_1,\ t \geq 1,\ l_j \geq 1,\ j = 1, 2, \ldots, t\},$$

$$Y_3 = \{uv \in \Phi(X) \mid u \in Y_1,\ v \in Y_2\}.$$

Теорема 3.3. *Любая счетно порожденная алгебра Рота — Бакстера A веса 0 вложима в 2-порожденную алгебру Рота — Бакстера.*

Доказательство. Пусть X — счетный базис A. Представим A в виде $A = RB(X|S)$, где $S = \{x_ix_j = \{x_i, x_j\},\ P(x_i) = \{P(x_i)\} \mid i, j \in \mathscr{N}^+\}$ и $u \in \Phi(X)$, $\{u\}$ означает линейную комбинацию x_t, $x_t \in X$.

Пусть $H = RB(X, a, b \mid S_1)$, где S_1 состоит из следующих соотношений:

(I) $x_ix_j = \{x_ix_j\}$, $i, j \in \mathscr{N}^+$,

(II) $P(x_i) = \{P(x_i)\}$, $i \in \mathscr{N}^+$,

(III) $aab^iab = x_i$, $i \in \mathscr{N}^+$,

(IV) $P(t) = 0$, $t \in \Phi'(X, a, b)$,

где t — любое слово из $\Phi(X, a, b)$, не содержащее подслов x_ix_j, $P(x_i)$, aab^iab, но имеющее хотя бы одно вхождение одной из букв a, b.

Положим $x_i > a > b$, $i \in \mathscr{N}^+$, и упорядочим $\Phi(X, a, b)$, как и раньше.

Легко проверяется, что S_1 — базис Гребнера — Ширшова в $RB(X,a,b)$. Действительно, композиции включения не существуют. Композиции пересечения очевидным образом тривиальны. Для композиций левого (правого) умножения можно брать умножения элементов (II) и (III) на $P(u)$, где u — любое слово из $\Phi(X,a,b)$, не содержащее подслов x_ix_j, $P(x_i)$, aab^iab, но имеющее хотя бы одно вхождение одной из букв a,b. Легко проверяется, что и эти композиции тривиальны. При этом мы пользуемся тем, что $\lambda=0$, иначе $P(u)P(t)=P(P(u)t)+P(uP(t))+\lambda P(ut)$ и слово ut после исключения возможных подслов x_ix_j, $P(x_i)$, aab^iab может не содержать букв a,b.

Итак, S_1 — базис Гребнера — Ширшова в $RB(X,a,b)$. По теореме 2.9 алгебра A вложима в H с порождающими $\{a,b\}$. $\square$

Напомним, что *дендриформной диалгеброй* [35] называется k-модуль D с двумя билинейными бинарными операциями $\prec$ и $\succ$ такими, что

$$(x\prec y)\prec z=x\prec(y\prec z+y\succ z),\quad (x\succ y)\prec z=x\succ(y\prec z),$$
$$(x\prec y+x\succ y)\succ z=x\succ(y\succ z)$$

для любых $x,y,z\in D$.

Дендриформной триалгеброй [36] называется k-модуль T с тремя билинейными бинарными операциями $\prec$, $\succ$ и $\circ$, удовлетворяющими тождествам

$$(x\prec y)\prec z=x\prec(y*z),\quad (x\succ y)\prec z=x\succ(y\prec z),\quad (x*y)\succ z=x\succ(y\succ z),$$
$$(x\succ y)\circ z=x\succ(y\circ z),\quad (x\prec y)\circ z=x\circ(y\succ z),$$
$$(x\circ y)\prec z=x\circ(y\prec z),\quad (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$$

для любых $x,y,z\in T$, где $x*y=x\prec y+x\succ y+x\circ y$.

В [29] замечено, что если R — алгебра Рота — Бакстера веса λ, то R с операциями $x\prec y=xP(y)+\lambda xy$, $x\succ y=P(x)y$ является дендриформной диалгеброй. Кроме того, R с операциями $x\prec y=xP(y)$, $x\succ y=P(x)y$, $x\circ y=\lambda xy$ является дендриформной триалгеброй. Это позволило определить в [29] универсальные обертывающие алгебры Рота — Бакстера для дендриформных диалгебр и дендриформных триалгебр.

Пусть $(D,\prec,\succ)$ — дендриформная диалгебра с линейным базисом $X=\{x_n\mid n\in I\}$ и таблицей умножения $x_i\prec x_j=\{x_i\prec x_j\}$, $x_i\succ x_j=\{x_i\succ x_j\}$, где $\{x_i\prec x_j\}$, $x_i\succ x_j=\{x_i\succ x_j\}$ — линейные комбинации $x_n\in X$. Тогда λ-алгебра Рота — Бакстера ($\lambda\neq 0$)

$$U(D)=RB(X\mid x_iP(x_j)+\lambda x_ix_j=\{x_i\prec x_j\},P(x_i)x_j=\{x_i\succ x_j\})$$

называется (и является) *универсальной обертывающей* для D. В алгебре $U(D)$ выполняются также соотношения $x_ix_jx_l-\lambda^{-1}\{x_i\prec x_j\}x_l+\lambda^{-1}x_i\{x_j\succ x_l\}$. Рассмотрим теперь в свободной алгебре Рота — Бакстера множество S, состоящее из выписанных выше трех типов соотношений алгебры $U(D)$. Непосредственная проверка показывает, что все композиции пересечения элементов из S тривиальны.

Точно так же пусть $(T,\prec,\succ,\circ)$ — дендриформная триалгебра с линейным базисом $X=\{x_n\mid n\in I\}$ и таблицей умножения $x_i\prec x_j=\{x_i\prec x_j\}$, $x_i\succ x_j=\{x_i\succ x_j\}$, $x_i\circ x_j=\{x_i\circ x_j\}$, где $\{x_i\prec x_j\}$, $\{x_i\succ x_j\}$, $\{x_i\circ x_j\}$ — линейные комбинации $x_n\in X$. Тогда λ-алгебра Рота — Бакстера ($\lambda\neq 0$)

$$U(T)=RB(X\mid x_iP(x_j)=\{x_i\prec x_j\},\ P(x_i)x_j=\{x_i\succ x_j\},\ x_ix_j=\lambda^{-1}\ \{x_i\circ x_j\})$$

называется (и является) *универсальной обертывающей* для T. Рассмотрим теперь в свободной алгебре Рота — Бакстера множество S, состоящее из выписанных выше трех типов соотношений алгебры $U(T)$. Непосредственная проверка показывает, что все композиции пересечения элементов из S тривиальны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширшов А. И.* Некоторые алгоритмические проблемы для ε-алгебр // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 132–137.
2. *Ширшов А. И.* Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 2. С. 292–296.
3. *Selected works of A. I. Shirshov.* Eds.: L. Bokut, V. Latyshev, I. Shestakov, E. Zelmanov. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2009.
4. *Бокуть Л. А.* Вложения в простые ассоциативные алгебры // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. С. 117–142.
5. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. 1978. V. 29. P. 178–218.
6. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II // Ann. Math. 1964. V. 79. P. 109–203, 205–326.
7. *Buchberger B.* An algorithmical criterion for the solvability of algebraic systems of equations [in German] // Aequationes Math. 1970. V. 4. P. 374–383.
8. *Bokut L. A., Kukin G.* Algorithmic and combinatorial algebra. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
9. *Бокуть Л. А., Фонг Ю., Ке В.-Ф., Колесников П. С.* Базисы Гребнера и Гребнера — Ширшова в алгебре и конформные алгебры // Фунд. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 669–706.
10. *Bokut L. A., Kolesnikov P. S.* Gröbner–Shirshov bases: from their incipiency to the present // J. Math. Sci. 2003. V. 116, N 1. P. 2894–2916.
11. *Bokut L. A., Kolesnikov P. S.* Gröbner–Shirshov bases, conformal algebras and pseudo-algebras // J. Math. Sci. 2005. V. 131, N 5. P. 5962–6003.
12. *Buchberger B., Winkler F.* Gröbner bases and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 251).
13. *Михалев А. А.* Лемма о слиянии и проблема равенства для цветных супералгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика. Механика. 1989. Т. 5. С. 88–91.
14. *Mikhalev A. A.* The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie p-superalgebras // Contemp. Math. 1992. V. 131, N 2. P. 91–104.
15. *Михалев А. А.* Техника композиций Ширшова для супералгебр Ли (некоммутативные базисы Гребнера) // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1995. Т. 18. С. 277–289.
16. *Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F.* Composition Diamond lemma for associative conformal algebras // J. Algebra. 2004. V. 272. P. 739–774.
17. *Kang S.-J., Lee K.-H.* Gröbner–Shirshov bases for irreducible sl_{n+1}-modules // J. Algebra. 2000. V. 232. P. 1–20.
18. *Чибриков Е. С.* О свободных конформных алгебрах Ли // Вестн. НГУ. Математика. Механика. 2004. Т. 4, № 1. С. 65–83.
19. *Chen Y.-Q., Chen Y.-S., Zhong C.-Y.* Composition-diamond lemma for modules // Czechoslovak Math. J. 2010. N 135. P. 59–76.
20. *Bokut L. A., Chen Y.-Q., Liu C.-H.* Gröbner–Shirshov bases for dialgebras // Int. J. Algebra Comp. 2010. V. 20, N 3. P. 391–415. [arXiv:0804.0638].
21. *Drensky V., Holtkamp R.* Planar trees, free nonassociative algebras, invariants and elliptic integrals // Discrete Math. 2008. V. 2. P. 1–41.
22. *Bokut L. A., Chen Y.-Q., Qiu J.-J.* Gröbner–Shirshov bases for associative algebras with multiple operators and free Rota–Baxter algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2010. V. 214. P. 89–100. [arXiv:0805. 0640v1].
23. *Baxter G.* An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity // Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 731–742.
24. *Rota G.-C.* Baxter algebras and combinatorial identities. I, II // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 5. P. 325–329, 330–334.
25. *Connes A., Kreimer D.* Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry // Comm. Math. Phys. 1998. V. 199, N 1. P. 203–242.
26. *Ebrahimi-Fard K.* Loday-type algebras and the Rota–Baxter relation // Let. Math. Phys. 2002. V. 61, N 2. P. 139–147.
27. *Ebrahimi-Fard K., Manchon D.* The combinatorics of Bogoliubov's recursion in renormalization // Renormalization and Galois theories (Eds. A. Connes, F. Fauvet, J.-P.Ramis). European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2009. P. 179–208. [arXiv:0710.3675v2].
28. *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Rota–Baxter algebras in renormalization of perturbative quantum field theory // Fields Inst. Commun. 2007. V. 50. P. 47–105.

29. *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Rota–Baxter algebras and dendriform algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2008. V. 212, N 2. P. 320–339.

30. *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Free Rota–Baxter algebras and rooted trees // J. Algebra Appl. 2008. V. 7. P. 167–194.

31. *Guo L., Keigher W.* Baxter algebras and Shuffle products // Adv. Math. 2000. V. 150. P. 117–149.

32. *Guo L., Keigher W.* On differential Rota–Baxter algebras // J. Pure Appl. Algebra. 2008. V. 212. P. 522–540.

33. *Manin Yu. I.* Computation and renormalization. I. Motivation and background. II. Time cut-off and the halting problem. [arXiv:0904.4921v2; arXiv:0908.3430v1].

34. *Cartier P.* On the structure of free Baxter algebras // Adv. Math. 1972. V. 9. P. 253–265.

35. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operands. Lect. Notes Math. 2001. V. 1763. P. 7–66. (preprint 2001, arXiv:mathe.QA/0102053)

36. *Loday J.-L., Ronco M.* Algébres de Hopf colibres // C. R. Acad. Sci. Paris. 2003. T. 337, N 3. P. 153–158.

37. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1968.

Статья поступила 15 сентября 2009 г.

Бокуть Леонид Аркадьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Школа математических наук, Южно-Китайский нормальный университет,
Гуангжоу 510631, Китай
`bokut@math.nsc.ru`

Чен Ючин, Ден Шемин
Школа математических наук, Южно-Китайский нормальный университет,
Гуангжоу 510631, Китай
`yqchen@scnu.edu.cn`, `dengxm860416@yhaoo.cn`