Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.956.223

ЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ДИРАКА

И. Ли, Н. Н. Тарханов

Аннотация. Для каждого оператора Дирака указан формально точный эллиптический комплекс длины два. Изучается задача Неймана для такого комплекса в $\mathbb{R}^n$ в формулировке Спенсера 1957 г.

Ключевые слова: оператор типа Дирака, краевая задача, нормальная разрешимость.

§ 1. Введение

Операторы Дирака на римановых многообразиях играют важнейшую роль в дифференциальной геометрии. Большинство линейных дифференциальных операторов первого порядка, имеющих геометрическую природу, являются операторами Дирака.

С точки зрения теории индекса локальные эллиптические краевые задачи играют важную, но второстепенную роль для операторов Дирака, где они появляются лишь в нечетных размерностях или в задачах переноса. Теорема Атьи — Патоди — Зингера об индексе привлекла внимание математиков к так называемым спектральным краевым условиям для оператора Дирака, что подчеркивает идею Кальдерона (1963). Прекрасное изложение теории спектральных эллиптических краевых задач для оператора Дирака можно найти в [1].

Вместе с тем локальные краевые задачи для операторов Дирака связаны, по существу, с классической литературой по теории дифференциальных уравнений с частными производными. Так, задача Коши с данными на части границы все еще остается сложной для специалистов по теории краевых задач.

С точки зрения анализа ключевой проблемой для операторного уравнения является нахождение условий, гарантирующих нормальную разрешимость этого уравнения. Под этим понимается замкнутость области значений оператора, которая может быть описана в терминах линейных непрерывных функционалов. Решения таких уравнений устойчивы и, стало быть, допускают успешную числовую обработку. Очевидно, фредгольмовость влечет нормальную разрешимость.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением евклидовых операторов типа Дирака. $(\ell \times k)$-Матрица D из скалярных дифференциальных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ называется *оператором типа Дирака*, если $D^*D = -E_k\Delta$, где E_k — единичная $(k \times k)$-матрица, Δ — (неположительный) оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ и D^* — формально сопряженный к D.

This research was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (grant TA 289/4–1).

Как обычно, мы обозначаем через $\sigma^1(D)(\xi)$ главный символ D. Ранг этой матрицы равен k для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, каждый оператор типа Дирака является переопределенным эллиптическим оператором. При $\ell = k$ такие операторы в классической литературе называют *эллиптическими*.

Мы начнем с вопроса, подобного классической задаче нахождения голоморфной функции в плоской области по ее вещественной части. Пусть $\mathscr{X} \Subset \mathbb{R}^n$ — область с гладкой границей. Пусть даны функции $f : \mathscr{X} \to \mathbb{C}^\ell$ и $u_{1,0} : \partial\mathscr{X} \to \mathbb{C}$. Найти решение u уравнения $Du = f$ в $\mathscr{X}$, у которого первая компонента совпадает с $u_{1,0}$ на границе $\mathscr{X}$.

В § 2 будет показано, что в случае, когда D — оператор Коши — Римана на плоскости, эта краевая задача удовлетворяет условию Лопатинского, пополняет сокровищницу классических фредгольмовых задач.

Будем писать $D = (A, C)$, где A — первый столбец матрицы D и C — оставшаяся часть $(\ell \times (k-1))$-матрицы. Легко проверить, что A и C суть также операторы типа Дирака. В § 3 мы сведем нашу краевую задачу к вычислению когомологий комплекса

$$0 \longrightarrow C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^{k-1}) \xrightarrow{C} C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell) \xrightarrow{A^*} C^\infty(\overline{\mathscr{X}}) \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

на шаге 1, т. е. в члене $C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$. Если $\ell = k$, доказано, что комплекс (1.1) формально точен и эллиптичен.

Для вычисления когомологий в (1.1) на шаге 1 применим классический подход, основанный на задаче Неймана (см. [2, 4.2]). В § 4 обсудим слабую версию этой задачи, в § 5 найдем слабое ортогональное разложение и в § 6 покажем, как норма Дирихле может быть использована для доказательства разрешимости задачи Неймана.

Наиболее трудный шаг в изучении задачи Неймана состоит в доказательстве регулярности оператора Неймана. Основной результат здесь восходит к [3]. В § 7 будет доказано, что оценка Кона — Ниренберга верна для (1.1), откуда последует разрешимость.

§ 2. Классическая задача

Пусть $\mathscr{X}$ — ограниченная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с гладкой границей. Отождествляя $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ с комплексной структурой $z = x_1 + \imath x_2$, рассмотрим неоднородную систему

$$\begin{aligned} \partial_1 u_1 - \partial_2 u_2 &= f_1, \\ \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 &= f_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

относительно неизвестной функции $u = u_1 + \imath u_2$ в $\mathscr{X}$, удовлетворяющей граничному условию

$$u_1 \restriction_{\partial\mathscr{X}} = u_{1,0}, \tag{2.2}$$

где $f = f_1 + \imath f_2$ и $u_{1,0}$ — заданные функции в $\mathscr{X}$ и на $\partial\mathscr{X}$ соответственно. Отметим, что (2.1) является неоднородной системой Коши — Римана на плоскости.

Если предполагать, что $f \in H^{s-1}(\mathscr{X})$ и $u_{1,0} \in H^{s-1/2}(\partial\mathscr{X})$, и искать решение $u \in H^s(\mathscr{X})$, то легко проверить, что такая краевая задача фредгольмова для каждого $s \in \mathbb{N}$. Так как свойство Фредгольма, по существу, эквивалентно эллиптичности, можно заключить, что задача (2.1), (2.2) удовлетворяет условию Лопатинского. Конечно, эти аргументы обратны тому, чему предназначено условие Лопатинского. Мы дадим прямое доказательство.

Теорема 2.1. *Краевая задача* (2.1), (2.2) *удовлетворяет условию Лопатинского.*

Доказательство. Условие Лопатинского локально, стало быть, достаточно проверить его в малой окрестности произвольной точки $x_0 \in \partial\mathscr{X}$. Так как граница $\mathscr{X}$ гладкая, по теореме Римана найдется конформное отображение $B(x_0,\varepsilon) \cap \overline{\mathscr{X}}$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, на верхнюю полуплоскость $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$ такое, что кривая $B(x_0,\varepsilon) \cap \partial\mathscr{X}$ отображается в ось x_1. Более того, система Коши — Римана сохраняется при конформных отображениях. Следовательно, можно, не ограничивая общности, считать, что $\mathscr{X}$ — верхняя полуплоскость. Для каждого фиксированного $x_2 \geq 0$ применим преобразование Фурье по x_1 к обоим уравнениям (2.1) и краевым условиям (2.2). Тогда

$$(\imath\xi_1)\hat{u}_1(\xi_1,x_2) - \partial_2\hat{u}_2(\xi_1,x_2) = \hat{f}_1(\xi_1,x_2), \quad \partial_2\hat{u}_1(\xi_1,x_2) + (\imath\xi_1)\hat{u}_2(\xi_1,x_2) = \hat{f}_2(\xi_1,x_2)$$

для всех $x_2 > 0$, а также для краевых условий $\hat{u}_1(\xi_1,0) = \hat{u}_{1,0}(\xi_1)$, где «крышка» символизирует преобразование Фурье по x_1. Отсюда получается главный символ для нашей задачи, а именно

$$\sigma_\partial(\cdot)(x_1,\xi_1) : \mathscr{S}(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{C}^2) \to \begin{array}{c} \mathscr{S}(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{C}^2) \\ \oplus \\ \mathbb{C} \end{array}, \tag{2.3}$$

где $\mathscr{S}(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{C}^2)$ — пространство всех быстро убывающих функций на полупрямой $\{x_2 \in \mathbb{R} : x_2 \geq 0\}$ со значениями в $\mathbb{C}^2$ и

$$\sigma_\partial(\cdot)(x_1,\xi_1)v = \begin{pmatrix} \partial_2 v - Av \\ v_1(0) \end{pmatrix}$$

с $A = \begin{pmatrix} 0 & -\imath\xi_1 \\ \imath\xi_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Условие Лопатинского в точности означает, что (2.3) — биективное отображение для всех $\xi_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $\xi_1 > 0$. Общее решение однородной системы $\partial_2 v - Av = 0$ для $x_2 > 0$ с начальным условием $v_1(0) = v_{1,0}$ имеет вид

$$v_1(x_2) = v_{1,0}\cosh(\xi_1 x_2) - \imath c_2 \sinh(\xi_1 x_2), \quad v_2(x_2) = \imath v_{1,0}\sinh(\xi_1 x_2) + c_2\cosh(\xi_1 x_2),$$

c_2 — произвольная константа. Если мы ищем решение в $\mathscr{S}(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{C}^2)$, достаточно выбрать постоянную c_2, а именно $c_2 = -\imath v_{1,0}$. Это доказывает инъективность (2.3).

Для доказательства сюръективности (2.3) при $\xi_1 > 0$ фиксируем функцию $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_{\geq 0},\mathbb{C}^2)$. Несложное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} v(x_2) &= v_{1,0}\exp(-\xi_1 x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} \\ &+ \int_0^{x_2} \begin{pmatrix} \cosh\xi_1(x_2-\vartheta) & -\imath\sinh\xi_1(x_2-\vartheta) \\ \imath\sinh\xi_1(x_2-\vartheta) & \cosh\xi_1(x_2-\vartheta) \end{pmatrix} g(\vartheta)\,d\vartheta + c_2\begin{pmatrix} -\imath\sinh(\xi_1 x_2) \\ \cosh(\xi_1 x_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

является общим решением системы $\partial_2 v - Av = g$ для $x_2 > 0$ с начальным условием $v_1(0) = v_{1,0}$. Это решение имеет параметр c_2 и не принадлежит пространству

$\mathscr{S}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{C}^2)$ при произвольном выборе c_2. Однако существует единственная константа c_2, для которой это так. Действительно, сумма последних двух членов в правой части (2.4), как легко проверить, равна

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{x_2} \exp \xi_1(x_2-\vartheta)(\imath g_1(\vartheta)+g_2(\vartheta))d\vartheta + c_2\exp(\xi_1 x_2)\right)\begin{pmatrix}-\imath\\ 1\end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{x_2} \exp\left(-\xi_1(x_2-\vartheta)\right)\left(-\imath g_1(\vartheta)+g_2(\vartheta)\right)d\vartheta + c_2\exp(-\xi_1 x_2)\right)\begin{pmatrix}\imath\\ 1\end{pmatrix}.$$

Выберем c_2 так, чтобы первый член исчезал на бесконечности, т. е.

$$c_2 = -\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\xi_1\vartheta\right)\left(\imath g_1(\vartheta)+g_2(\vartheta)\right)d\vartheta.$$

Отсюда получаем функцию

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_2}^{\infty} \exp \xi_1(x_2-\vartheta)(\imath g_1(\vartheta)+g_2(\vartheta))\, d\vartheta \begin{pmatrix}-\imath\\ 1\end{pmatrix},$$

являющуюся быстро убывающей функцией от $x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Поскольку второй член быстро убывает, сюръективность доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.1 показывает, что проверка условия Лопатинского, по существу, столь же трудна, сколь конструкция параметрикса для краевой задачи.

§ 3. Анализ

Пусть D — $(\ell \times k)$-матрица, состоящая из скалярных дифференциальных операторов первого порядка в $\mathbb{R}^n$ таких, что $D^*D = -E_k\Delta$.

Если $\ell = k$, то найдется решение этого операторного уравнения при $n = 2n'$ среди $(2^{n'-1} \times 2^{n'-1})$-матриц. Имея решение при каком-то одном n, можно получить их для меньших значений, просто опуская излишние производные.

Отметим, что для $\ell = k$ с необходимостью имеем $DD^* = -E_k\Delta$, так как D^* — «обратная» матрица для D. Следовательно, для $n = 2n'$ существует формально самосопряженное решение уравнения в множестве операторов со значениями в $(2^{n'} \times 2^{n'})$-матриц. В самом деле, обладая решением для $D^*D = -E_k\Delta$, положим

$$\begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\mathscr{X}$ — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$ и f — заданная функция на $\mathscr{X}$ со значениями в $\mathbb{C}^\ell$ из соболевского класса $H^{s-1}(\mathscr{X}, \mathbb{C}^\ell)$, s — натуральное число. Рассмотрим неоднородный оператор типа Дирака $Du = f$ с неизвестной функцией $u \in H^s(\mathscr{X}, \mathbb{C}^k)$.

Оператор D переопределенный эллиптический, стало быть, все обобщенные решения уравнения $Du = f$, по существу, принадлежат локально пространству $H^s(\mathscr{X}, \mathbb{C}^k)$. Будем рассматривать решение u как столбец соболевских функций на $\mathscr{X}$, т. е.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u'' \end{pmatrix},$$

где u_1 — функция на $\mathscr{X}$ с комплексными значениями и u'' принимает значения в $\mathbb{C}^{k-1}$ (усеченный столбец).

Поиск решения u уравнения $Du = f$ через его «скалярную» составляющую $u_1 \in H^s(\mathscr{X})$ является задачей, опирающейся на классический результат о восстановлении голоморфной функции по ее вещественной части. Эти вопросы изучаются в [2, 1.2.5].

Усилим эту задачу следующим образом. Пусть $u_{1,0} \in H^{s-1/2}(\partial\mathscr{X})$ — заданная функция на границе области $\mathscr{X}$. Найти решение u уравнения $Du = f$ в $\mathscr{X}$ такое, что $u_1 = u_{1,0}$ на $\partial\mathscr{X}$.

Сначала найдем необходимое условие разрешимости этой задачи. Будем ссылаться на нее как на задачу

$$Du = f \text{ в } \mathscr{X}, \quad u_1 = u_{1,0} \text{ на } \partial\mathscr{X} \tag{3.1}$$

(см. (2.1), (2.2)). Отметим, что если $k = 1$, то (3.1) в точности задача Коши для уравнения типа Дирака $Du = f$.

Будем использовать запись $D = (A, C)$, где A — первый столбец матрицы D и C — остальная часть $(\ell \times (k-1))$-матрицы. Так как

$$D^*D = \begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix} (A, C) = \begin{pmatrix} A^*A & A^*C \\ C^*A & C^*C \end{pmatrix} = -E_k \Delta,$$

имеем

$$A^*A = -\Delta, \quad A^*C = 0, \quad C^*A = 0, \quad C^*C = -E_{k-1}\Delta. \tag{3.2}$$

Из первого и последнего равенств в (3.2) вытекает, что A и C суть операторы типа Дирака. Оператор C, возможно, отсутствует, кроме $\ell = k$.

Лемма 3.1. *Если функция $u \in H^s(\mathscr{X}, \mathbb{C}^k)$ является решением* (3.1), *то u_1 удовлетворяет соотношениям*

$$-\Delta u_1 = A^* f \text{ в } \mathscr{X}, \quad u_1 = u_{1,0} \text{ на } \partial\mathscr{X}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Равенство $Du = f$, очевидно, равносильно равенству $Au_1 + Cu'' = f$ в $\mathscr{X}$. Применяя оператор A^* к обеим частям последнего равенства, ввиду (3.2) получим

$$A^*Au_1 = A^*f - A^*Cu'' = A^*f,$$

что и требовалось. □

Получили, что u_1 должно быть решением задачи Дирихле (3.3) в $\mathscr{X}$ с заданными A^*f и $u_{1,0}$. Поскольку задача Дирихле однозначно разрешима, с этого момента будем предполагать, что функция $u_1 \in H^s(\mathscr{X})$ определяется из (3.3).

Нам осталось найти оставшуюся компоненту u'' функции u. Эти усеченные столбцы удовлетворяют переопределенной эллиптической системе $Cu'' = f - Au_1$ в области $\mathscr{X}$.

Второе равенство (3.2) легко приводит к необходимому условию локальной разрешимости этой системы в $\mathscr{X}$, а именно $A^*(f - Au_1) = 0$, что выполнено за счет собственно выбора u_1. В случае $\ell = k$ это условие, как доказано в [4], также достаточно для локальной разрешимости.

Обозначим через $\mathscr{D}$ кольцо всех скалярных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Каждая $(\ell \times k)$-матрица из скалярных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ определяет гомоморфизм левых $\mathscr{D}$-модулей $\mathscr{D}_\ell \to \mathscr{D}_k$, задаваемый умножением на матрицу справа, поэтому элементы $\mathscr{D}_\ell$ можно представлять как ℓ-строки с элементами из $\mathscr{D}$.

Теорема 3.2. *Пусть $\ell = k$. тогда последовательность*

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow \mathscr{D}_{k-1} \xleftarrow{C} \mathscr{D}_\ell \xleftarrow{A^*} \mathscr{D} \longleftarrow 0 \tag{3.4}$$

является свободной резольвентой левого $\mathscr{D}$-модуля $M = \operatorname{coker} C$, т. е. $M = \mathscr{D}_{k-1}/\mathscr{D}_\ell \circ C$.

Доказательство. Поскольку $A^*A = -\Delta$, оператор A^* отличен от нуля. Значит, надо проверить точность (3.4) только для члена $\mathscr{D}_\ell$. Предположим, что элемент $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ из $\mathscr{D}_\ell$ удовлетворяет $p \circ C = 0$. Имеем $DD^* = AA^* + CC^*$, откуда

$$p \circ (DD^*) = p \circ A \circ A^* + p \circ C \circ C^* = p \circ A \circ A^*. \tag{3.5}$$

Так как $\ell = k$, заключаем, что $DD^* = -E_\ell \Delta$ ввиду того, что $-D^*/\Delta$ — обратная к D матрица. Стало быть, из (3.5) вытекает, что

$$(pA) \circ A^* = -\Delta p. \tag{3.6}$$

Из (3.6) получаем, что $p \circ A$ делится на Δ, ибо наибольший общий делитель Δ и элементов строки A^* равен 1. Отсюда скалярный дифференциальный оператор $q = -(pA)/\Delta$ удовлетворяет уравнению $q \circ A^* = p$. Точность (3.4) доказана. $\square$

Легко видеть, что для $\ell \neq k$ теорема 3.2 в общем случае неверна.

Далее будем считать, что $\ell = k$. Это позволит нам использовать подход, включающий задачу Неймана для комплекса (1.1) (см. [2, 4.1]).

§ 4. Задача Неймана

Следующая лемма доказана в [5].

Лемма 4.1. *Пусть $\ell = k$. Дифференциальные операторы A и C совместно образуют эллиптический комплекс над $\mathscr{X}$:*

$$0 \longrightarrow C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^{k-1}) \xrightarrow{C} C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell) \xrightarrow{A^*} C^\infty(\overline{\mathscr{X}}) \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Лапласиан Δ^0 комплекса (4.1) на шаге 0 эллиптичен, так как

$$\Delta^0 = C^*C = -E_{k-1}\Delta$$

согласно (3.2).

Поскольку D — квадратная матрица скалярных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, заключаем, что

$$-E_\ell \Delta = DD^* = (A, C) \begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix} = AA^* + CC^*.$$

Отсюда вытекает, что лапласиан $\Delta^1 = AA^* + CC^*$ комплекса (4.1) на шаге 1 эллиптичен.

Наконец, лапласиан комплекса Δ^2 (4.1) на шаге 2 эллиптичен, так что

$$\Delta^2 = A^*A = -\Delta$$

по (3.2). $\square$

В этом разделе мы рассмотрим «слабый вариант» задачи Неймана для эллиптического комплекса (4.1). Введем обозначения:

$$\mathscr{E}^0 = C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^{k-1}), \quad \mathscr{E}^1 = C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell), \quad \mathscr{E}^2 = C^\infty(\overline{\mathscr{X}});$$

$$\mathscr{L}^0 = L^2(\mathscr{X}, \mathbb{C}^{k-1}), \quad \mathscr{L}^1 = L^2(\mathscr{X}, \mathbb{C}^{\ell}), \quad \mathscr{L}^2 = L^2(\mathscr{X});$$
$$d^0 = C, \quad d^1 = A^*, \quad d^i = 0 \text{ для } i \neq 0, 1.$$

Так как $\mathscr{X}$ ограниченная, ясно, что $\mathscr{E}^i \hookrightarrow \mathscr{L}^i$ и $\mathscr{L}^i$ совпадают с пополнением $\mathscr{E}^i$ по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^i}$.

Пусть $\mathscr{D}_T^i$ — множество всех сечений $u \in \mathscr{L}^i$, для которых существует последовательность $\{u_\nu\}$ со следующими свойствами:

1) $u_\nu \in \mathscr{E}^i$;

2) $\{u_\nu\}$ сходится к u в $\mathscr{L}^i$;

3) $\{du_\nu\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{L}^{i+1}$.

Отображение $T : \mathscr{D}_T^i \to \mathscr{L}^{i+1}$, определенное равенством $Tu = \lim du_\nu$, где $\{u_\nu\}$ — последовательность, обладающая свойствами 1–3, называют *максимальным оператором, порожденным* d.

Отметим, что T корректно определен. Действительно, если $\{u'_\nu\}$ — еще одна последовательность, обладающая свойствами 1–3, и $f = \lim du'_\nu$, то для любой $g \in \mathscr{E}^{i+1}$ с компактным носителем во внутренности $\mathscr{X}$ получаем

$$(Tu - f, g)_{\mathscr{L}^{i+1}} = \lim(du_\nu - du'_\nu, g)_{\mathscr{L}^{i+1}} = \lim(u_\nu - u'_\nu, d^* g)_{\mathscr{L}^i} = 0,$$

откуда $Tu = f$. Мы будем рассматривать T как неограниченный оператор из $\mathscr{L}^i$ в $\mathscr{L}^{i+1}$ с областью задания $\mathscr{D}_T^i$. Поскольку $\mathscr{D}_T^i$ содержит $\mathscr{E}^i$, оператор T плотно определенный и замкнутый.

Из леммы Дюбуа-Реймона и единственности слабого предела вытекает, что если $u \in \mathscr{D}_T^i$, то $Tu = du$ в смысле распределений в $\mathscr{X}$.

Лемма 4.2. *Оператор T обладает свойствами $T\mathscr{D}_T^i \subset \mathscr{D}_T^{i+1}$ и $T^2 = 0$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{D}_T^i$ и $\{u_\nu\}$ — последовательность со свойствами 1–3. Положим $f_\nu = du_\nu$. Тогда $Tu = \lim f_\nu$. Так как $df_\nu = 0$, получаем, что $Tu \in \mathscr{D}_T^{i+1}$ и $T(Tu) = 0$. $\square$

Таким образом, мы имеем следующий комплекс гильбертовых пространств и замкнутых линейных отображений между ними:

$$\mathscr{L}^\cdot : 0 \longrightarrow \mathscr{L}^0 \xrightarrow{T} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{T} \mathscr{L}^2 \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

L^2-когомология $\{C, A^*\}$ на $\mathscr{X}$ та же, что и когомология комплекса (4.2), стало быть,

$$H^i(\mathscr{L}^\cdot) = \frac{\ker\{T : \mathscr{D}_T^i \to \mathscr{L}^{i+1}\}}{\operatorname{im}\{T : \mathscr{D}_T^{i-1} \to \mathscr{L}^i\}}.$$

Определим теперь сопряженный T^* к T, как обычно делается для неограниченных операторов. А именно, пусть $\mathscr{D}_{T^*}^i$ — множество всех элементов $g \in \mathscr{L}^i$ таких, что существует $v \in \mathscr{L}^{i-1}$ со свойством

$$(Tu, g)_{\mathscr{L}^i} = (u, v)_{\mathscr{L}^{i-1}}$$

для любой $u \in \mathscr{D}_T^{i-1}$. Определим $T^* : \mathscr{D}_{T^*}^i \to \mathscr{L}^{i-1}$, полагая $T^* g = v$. Оператор T^* корректно определен, ибо область $\mathscr{D}_T^{i-1}$ плотна в $\mathscr{L}^{i-1}$. Легко видеть, что если $g \in \mathscr{D}_{T^*}^i \cap \mathscr{E}^i$, то $T^* g = d^* g$, где d^* — формально сопряженный к d.

Более того, по теореме Стокса элементы $\mathscr{D}_{T^*}^i$, гладкие вплоть до границы $\mathscr{X}$, удовлетворяют некоторым условиям на $\partial\mathscr{X}$. Запишем их в виде $n(g) = 0$ на $\partial\mathscr{X}$, где $n(g)$ — условия Коши на g относительно d^* (см. [2, разд. 3.2.2]). Равенство $n(g) = 0$ означает, что коэффициенты g в каждой точке из $\partial\mathscr{X}$ удовлетворяют однородной системе линейных уравнений, гладко варьируемой над $\partial\mathscr{X}$.

Лемма 4.3. *$T^*\mathscr{D}^i_{T^*} \subset \mathscr{D}^{i-1}_{T^*}$ и $T^{*2} = 0$.*

Доказательство. Действительно, если $g \in \mathscr{D}^i_{T^*}$ и $u \in \mathscr{D}^{i-2}_T$, то по определению и лемме 4.1 получаем

$$(Tu, T^*g)_{\mathscr{L}^{i-1}} = (T(Tu), g)_{\mathscr{L}^i} = 0.$$

Тем самым $T^*g \in \mathscr{D}^{i-1}_{T^*}$ и $T^*(T^*g) = 0$, что и требовалось. □

Введем оператор L на $\mathscr{L}^i$ с областью определения $\mathscr{D}^i_L$, обладающий тем свойством, что если $u \in \mathscr{D}^i_L \cap \mathscr{E}^i$, то $Lu = \Delta u$, где $\Delta = d^*d + dd^*$ — лапласиан от $\{C, A^*\}$, вычисленный в лемме 4.1. А именно, запишем $\mathscr{D}^i_L$ для множества всех $u \in \mathscr{D}^i_T \cap \mathscr{D}^i_{T^*}$ таких, что $Tu \in \mathscr{D}^{i+1}_{T^*}$ и $T^*u \in \mathscr{D}^{i-1}_T$. Тогда оператор $L : \mathscr{D}^i_L \to \mathscr{L}^i$ определен так:

$$Lu = T^*Tu + TT^*u$$

(см. [2, § 4.2]).

Задача Неймана для комплекса (4.1) на многообразии $\overline{\mathscr{X}}$ в L^2 состоит в следующем:

(**NP**) когда для сечения $f \in \mathscr{L}^i$ существует $u \in \mathscr{D}^i_L$ такая, что $Lu = f$, и как u зависит от f?

§ 5. Слабое ортогональное разложение

Слабое ортогональное разложение составляет первый шаг в решении задачи Неймана. Положим

$$\mathscr{H}^i = \{u \in \mathscr{D}^i_T \cap \mathscr{D}^i_{T^*} : Tu = T^*u = 0\}$$

для $i = 0, 1, 2$. Так как операторы T и T^* замкнуты, $\mathscr{H}^i$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{L}^i$. Обозначим через H ортогональный проектор $\mathscr{L}^i$ на $\mathscr{H}^i$.

Лемма 5.1. *Включение $u \in \mathscr{H}^i$ имеет место тогда и только тогда, когда $u \in \mathscr{D}^i_L$ и $Lu = 0$.*

Доказательство. Если $u \in \mathscr{H}^i$, то, очевидно, $u \in \mathscr{D}^i_L$ и $Lu = 0$. Если $Lu = 0$, то $(Lu, u)_{\mathscr{L}^i} = 0$, и поскольку

$$(Lu, u)_{\mathscr{L}^i} = \|Tu\|^2_{\mathscr{L}^{i+1}} + \|T^*u\|^2_{\mathscr{L}^{i-1}},$$

имеем $u \in \mathscr{H}^i$. □

Теорема 5.2. *Оператор L самосопряженный, $(L+1)^{-1}$ существует, ограничен и определен всюду в $\mathscr{L}^i$.*

Доказательство. Так как T — замкнутый оператор и область его определения плотна, то же верно и для T^* и $(T^*)^* = T$. Следовательно, операторы $(TT^* + 1)^{-1}$ и $(T^*T + 1)^{-1}$ существуют, замкнуты, самосопряженные и определены всюду в $\mathscr{L}^i$ (см. [6, с. 118]).

Легко теперь проверить, что $(L+1)^{-1}$ существует, ограничен, всюду определен и задается формулой

$$(L+1)^{-1} = (TT^* + 1)^{-1} + (T^*T + 1)^{-1} - 1,$$

что завершает доказательство. □

Следствие 5.3 (слабое ортогональное разложение). *Образ L ортогонален $\mathscr{H}^i$, и*

$$\mathscr{L}^i = \mathscr{H}^i \oplus \overline{L\mathscr{D}_L^i}, \tag{5.1}$$

где $\overline{L\mathscr{D}_L^i}$ означает замыкание $L\mathscr{D}_L^i$ в $\mathscr{L}^i$.

Доказательство. Результат следствия вытекает немедленно из самосопряженности L и леммы 5.1. □

В частности, если $L\mathscr{D}_L^i$ замкнут, то мы приходим к «строгому ортогональному разложению»

$$\mathscr{L}^i = \mathscr{H}^i \oplus T^*T\mathscr{D}_L^i \oplus TT^*\mathscr{D}_L^i. \tag{5.2}$$

Определение 5.4. Пусть $L\mathscr{D}_L^i$ замкнут и $f \in \mathscr{L}^i$, тогда $f = Hf + Lu$, где $u \in \mathscr{D}_L^i$. *Оператор Неймана* $N : \mathscr{L}^i \to \mathscr{D}_L^i$ определяется равенством $Nf = u - Hu$.

Заметим, что N корректно определен. Действительно, если $f = Hf + Lu'$, где $u' \in \mathscr{D}_L^i$, то $L(u - u') = 0$, откуда

$$(u - Hu) - (u' - Hu') = (u - u') - H(u - u') = 0.$$

Соберем основные свойства оператора Неймана. Они обобщают аналогичные свойства оператора Грина из теории Ходжа и для задачи Неймана проистекают из необходимости расширения теории Ходжа на случай многообразий с краем.

Лемма 5.5. *Пусть $L\mathscr{D}_L^i$ замкнут. Тогда оператор Неймана N обладает следующими свойствами.*

1. *Оператор N ограниченный, самосопряженный, $HN = NH = 0$, и имеет место ортогональное разложение*

$$f = Hf + T^*TNf + TT^*Nf \tag{5.3}$$

для всех $f \in \mathscr{L}^i$.

2. *Если $f \in \mathscr{D}_T^i$ и $Tf = 0$, то $TNf = 0$. Если, кроме того, $L\mathscr{D}_L^{i+1}$ замкнут, то $TNf = NTf$.*

3. *Если $f \in \mathscr{D}_{T^*}^i$ и $T^*f = 0$, то $T^*Nf = 0$. Если, кроме того, $L\mathscr{D}_L^{i-1}$ замкнут, то $T^*Nf = NT^*f$.*

Доказательство. 1. Равенства $HN = NH = 0$ и формула (5.3) вытекают непосредственно из определения N.

Далее, по теореме о замкнутом графике существует константа $c > 0$ такая, что если $u \in \mathscr{D}_L^i$ ортогонально $\mathscr{H}^i$, то $\|Lu\|_{\mathscr{L}^i} \geq c\|u\|_{\mathscr{L}^i}$. Применяя это к Nf, получаем

$$\|Nf\|_{\mathscr{L}^i} \leq \frac{1}{c}\|LNf\|_{\mathscr{L}^i} = \frac{1}{c}\|f - Hf\|_{\mathscr{L}^i} \leq \frac{1}{c}\|f\|_{\mathscr{L}^i}.$$

Отсюда N ограничен.

Наконец, самосопряженность оператора Неймана следует непосредственно из теоремы 5.2, так как

$$(Nf, g)_{\mathscr{L}^i} = (Nf, Hg + LNg)_{\mathscr{L}^i} = (Nf, LNg)_{\mathscr{L}^i} = (LNf, Ng)_{\mathscr{L}^i} = (f, Ng)_{\mathscr{L}^i}.$$

2. Пусть $f \in \mathscr{D}_L^i$. Тогда из (5.3) и леммы 4.2 получаем $T^*TNf \in \mathscr{D}_T^i$ и $Tf = 0$ влечет $TT^*TNf = 0$. Отсюда легко вытекает, что $TNf = 0$.

Если также $L\mathscr{D}_L^{i+1}$ замкнут, то для любого $f \in \mathscr{D}_T^i$ имеем $Tf = TT^*TNf$ с одной стороны и $Tf = TT^*NTf$ — с другой. Отсюда $L(TNf - NTf) = 0$, и так как $TNf - NTf$ ортогонально $\mathscr{H}^{i+1}$, выводим $TNf - NTf = 0$, что и требовалось.

3. Доказательство аналогично доказательству п. 2. $\square$

По лемме 4.1 лапласиан Δ, по существу, сводится к обычному оператору Лапласа в $\mathbb{R}^n$, применяемому покомпонентно. Отсюда следует, что элементы $u \in \mathscr{H}^i$ гармоничны в $\mathscr{X}$, стало быть, оператор Неймана N, если он существует, сохраняет внутреннюю регулярность.

§ 6. Норма Дирихле

Начиная с классических случаев, норма Дирихле была важным техническим инструментом изучения задачи Неймана. Для любых $u, v \in \mathscr{D}^i_T \cap \mathscr{D}^i_{T^*}$ внутреннее произведение Дирихле определено равенством

$$D(u,v) = (Tu, Tv)_{\mathscr{L}^{i+1}} + (T^*u, T^*v)_{\mathscr{L}^{i-1}} + (u,v)_{\mathscr{L}^i}$$

и норма Дирихле определяется как $D(u) = \sqrt{D(u,u)}$.

Пространство $\mathscr{D}^i_T \cap \mathscr{D}^i_{T^*}$ с нормой Дирихле есть полное (гильбертово) пространство. Оно обозначается через $\mathscr{D}^i$.

Поскольку $D(u) \geq \|u\|_{\mathscr{L}^i}$ для всех $u \in \mathscr{D}^i$, существует лишь один самосопряженный оператор S с областью определения $\mathscr{D}^i_S \subset \mathscr{D}^i$ такой, что если $u \in \mathscr{D}^i_S$ и $v \in \mathscr{D}^i$, то

$$D(u,v) = (Su, v)_{\mathscr{L}^i}. \tag{6.1}$$

В следующей лемме дано описание оператора L, полезное ввиду того, что наши оценки будут проводиться в норме $D(u)$.

Лемма 6.1. *Имеют место равенства $\mathscr{D}^i_L = \mathscr{D}^i_S$ и $L = S - 1$, где оператор S определен в* (6.1).

Доказательство. Если $u \in \mathscr{D}^i_L$ и $v \in \mathscr{D}^i$, то $D(u,v) = ((L+1)u, v)_{\mathscr{L}^i}$ выполнено. Отсюда ввиду единственности S имеем $S = L + 1$. $\square$

Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на векторном пространстве $\mathscr{L}$. Будем говорить, что норма $\|\cdot\|_1$ *вполне непрерывна относительно нормы* $\|\cdot\|_2$, если каждая последовательность из $\mathscr{L}$, ограниченная по норме $\|\cdot\|_1$, обладает сходящейся по норме $\|\cdot\|_2$ подпоследовательностью.

Лемма 6.2. *Если норма D на $\mathscr{D}^i$ вполне непрерывна относительно $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^i}$, то $\mathscr{H}^i$ конечномерно.*

Доказательство. Заметим, что если $u, v \in \mathscr{H}^i$, то $D(u,v) = (u,v)_{\mathscr{L}^i}$. Допустим, что размерность $\mathscr{H}^i$ бесконечна. Тогда существует бесконечная последовательность $\{u_\nu\}$ ортогональных элементов в $\mathscr{H}^i$. Поскольку $D(u_\nu) = \|u_\nu\|_{\mathscr{L}^i} = 1$, последовательность $\{u_\nu\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Но это не согласуется с тем фактом, что если $\nu \neq \mu$, то $\|u_\nu - u_\mu\|_{\mathscr{L}^i} = \sqrt{2}$. $\square$

Лемма 6.3. *Если норма D на $\mathscr{D}^i$ вполне непрерывна относительно $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^i}$, то существует константа $c > 0$ такая, что для любой $u \in \mathscr{D}^i$, ортогональной к $\mathscr{H}^i$, имеет место неравенство*

$$\|Tu\|^2_{\mathscr{L}^{i+1}} + \|T^*u\|^2_{\mathscr{L}^{i-1}} \geq c\|u\|^2_{\mathscr{L}^i}.$$

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{L}^{i+1} \times \mathscr{L}^{i-1}$ с нормой

$$\|\{f, v\}\| = \left(\|f\|^2_{\mathscr{L}^{i+1}} + \|v\|^2_{\mathscr{L}^{i-1}}\right)^{1/2}.$$

Пусть $M : \mathscr{D}^i \to \mathscr{L}^{i+1} \times \mathscr{L}^{i-1}$ — отображение, определенное равенством $Mu = \{Tu, T^* u\}$. Заметим, что M — замкнутый оператор.

Докажем, что ранг M замкнут. Допустим, что $M\mathscr{D}^i$ не замкнут. Тогда найдется последовательность $\{u_\nu\}$ в $\mathscr{D}^i$ такая, что $\lim Mu_\nu = \{f, v\}$ и $\{f, v\} \notin M\mathscr{D}^i$.

Положим $u'_\nu = u_\nu - Hu_\nu$. Тогда u'_ν ортогональны $\mathscr{H}^i$ и $\lim Mu'_\nu = \{f, v\}$. Если $\|u'_\nu\|_{\mathscr{L}^i}$ ограничены, то $D(u'_\nu) = \left(\|Mu'_\nu\|^2 + \|u'_\nu\|^2_{\mathscr{L}^i}\right)^{1/2}$ также ограничены. Тогда по предположению $\{u'_\nu\}$ обладает подпоследовательностью, имеющей пределом u, и так как M замкнуто, то $Mu = \{f, v\}$, а это противоречит предположению о том, что $\{f, v\} \notin M\mathscr{D}^i$. Стало быть, за счет выбора в случае необходимости подходящей подпоследовательности можно на самом деле считать, что $\lim \|u'_\nu\|_{\mathscr{L}^i} = \infty$.

Пусть теперь $U_\nu = u'_\nu / \|u'_\nu\|_{\mathscr{L}^i}$. Тогда $\lim \|MU_\nu\| = 0$ и $D(U_\nu)$ ограничены. Поэтому $\{U_\nu\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{U_{\nu_k}\}$ такую, что

$$\lim U_{\nu_k} = U, \quad \lim MU_{\nu_k} = \{0, 0\}.$$

Отсюда $MU = 0$, так что $U \in \mathscr{H}^i$. Поскольку U_ν ортогонально к $\mathscr{H}^i$, выводим, что $U = 0$, однако $\|U_\nu\|_{\mathscr{L}^i} = 1$. Полученное противоречие показывает, что ранг $M\mathscr{D}^i$ замкнут в $\mathscr{L}^{i+1} \times \mathscr{L}^{i-1}$.

Пусть R — ограничение M на ортогональное дополнение $\mathscr{H}^i$ в $\mathscr{D}^i$. Тогда R взаимно однозначно и имеет замкнутый ранг. По теореме о замкнутом графике обратный R^{-1} ограничен. Следовательно, есть $c > 0$ такое, что $\|Ru\|^2 \geq c\|u\|^2_{\mathscr{L}^i}$. Лемма доказана. □

Теорема 6.4. *Если норма D на $\mathscr{D}^i$ вполне непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^i}$, то $L\mathscr{D}^i_L$ замкнуто.*

Доказательство. По лемме 6.3 существует $c > 0$ такое, что для любой $u \in \mathscr{D}^i_L$, ортогональной к $\mathscr{H}^i$, имеем

$$(Lu, u)_{\mathscr{L}^i} \geq c\|u\|^2_{\mathscr{L}^i},$$

стало быть, $\|Lu\|_{\mathscr{L}^i} \geq c\|u\|_{\mathscr{L}^i}$.

Пусть $f = \lim Lu_\nu$. Можно считать, что u_ν ортогональны к $\mathscr{H}^i$, тем самым $\|u_\nu\|_{\mathscr{L}^i}$ равномерно ограничены. Поэтому $\{u_\nu\}$ обладает подпоследовательностью со сходящимися средними арифметическими (см. [6, с. 32, 38]). Обозначив этот предел через u, получим $f = Lu$, что завершает доказательство. □

Вопрос о том, когда норма D на $\mathscr{D}^i$ вполне непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^i}$, в общем случае весьма труден и требует специального изучения. Мы приведем несколько следствий.

Следствие 6.5. *Пусть норма D на $\mathscr{D}^i$ вполне непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^i}$. Тогда задача Нейман разрешима на шаге i в том смысле, что существуют операторы H и N в $\mathscr{L}^i$ со свойствами* 1–3 *из леммы* 5.5.

Доказательство. Результат следствия вытекает непосредственно из леммы 5.5 и теоремы 6.4. □

В частности, задача Неймана разрешима на шаге 2, так как она сводится к классической задаче Дирихле, поставленной в L^2.

Для ограниченных областей $\mathscr{X}$ подпространство $\mathscr{H}^0$ обычно бесконечномерно. Значит, по лемме 6.2 норма Дирихле D не может быть вполне непрерывной относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^0}$ на $\mathscr{D}^0$. Однако имеет место следующий результат.

Теорема 6.6. *Если норма D на $\mathscr{D}^1$ вполне непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$, то $L\mathscr{D}^0_L$ замкнуто.*

Доказательство. Достаточно доказать, что существует константа $c > 0$ такая, что $\|Lf\|_{\mathscr{L}^0} \geq c\|f\|_{\mathscr{L}^0}$ для любой $f \in \mathscr{D}^0_L$, ортогональной к $\mathscr{H}^0$.

Во-первых, если $u \in \mathscr{D}^0_L$, то $Tu \in \mathscr{D}^1$ и $Tu \perp \mathscr{H}^1$. По лемме 6.3 легко выводим, что

$$\|T^*Tu\|^2_{\mathscr{L}^0} = \|Lu\|^2_{\mathscr{L}^0} \geq c\|Tu\|^2_{\mathscr{L}^1}.$$

Далее, так как $f \perp \mathscr{H}^0$, ввиду слабого ортогонального разложения (5.1) находим, что $f \in \overline{L\mathscr{D}^0_L}$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $u \in \mathscr{D}^0_L$ такая, что $\|f - Lu\|_{\mathscr{L}^0} < \varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\mathscr{L}^0} &\leq (Lu, f)_{\mathscr{L}^0} + \varepsilon\|f\|_{\mathscr{L}^0} \leq \|Tu\|_{\mathscr{L}^1}\|Tf\|_{\mathscr{L}^1} + \varepsilon\|f\|_{\mathscr{L}^0} \\ &\leq \frac{1}{c}\|Lu\|_{\mathscr{L}^0}\|Lf\|_{\mathscr{L}^0} + \varepsilon\|f\|_{\mathscr{L}^0} \leq \frac{1}{c}\|f\|_{\mathscr{L}^0}\|Lf\|_{\mathscr{L}^0} + \varepsilon\left(\frac{1}{c}\|Lf\|_{\mathscr{L}^0} + \|f\|_{\mathscr{L}^0}\right).\end{aligned}$$

Так как ε можно сделать произвольно малым путем выбора Lu достаточно близким к f, получаем $\|Lf\|_{\mathscr{L}^0} \geq c\|f\|_{\mathscr{L}^0}$, и доказательство закончено. □

Следующий результат вытекает непосредственно из леммы 6.4 и теоремы 6.6. Напомним, что $\mathscr{H}^0 = \ker T^0$.

Следствие 6.7. *Пусть норма D на $\mathscr{D}^1$ вполне непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$. Тогда $f = Hf + T^*NTf$ для любого сечения $f \in \mathscr{D}^0_T$, где $H : \mathscr{L}^0 \to \mathscr{H}^0$ — ортогональное проектирование.*

Дифференциальный оператор $d^0 = C$ переопределенный и эллиптический. Так как

$$\mathscr{H}^0 = \{u \in \mathscr{L}^0 \cap C^\infty(\mathscr{X}, \mathbb{C}^{k-1}) : Cu = 0\},$$

оператор H^0 является обобщением классического проектора Бергмана. Из следствия 6.7 вытекает, что $H^0 = 1 - T^*NT$.

§ 7. Регулярность

Доказательство регулярности оператора Неймана вблизи границы — наиболее трудная часть решения задачи Неймана. Основной результат касательно регулярности восходит к Кону и Ниренбергу [3].

Ограничимся обсуждением задачи Неймана на шаге 1, так как это является единственным открытым вопросом.

По теореме Реллиха вложение $H^s(\mathscr{X}, \mathbb{C}^\ell) \hookrightarrow L^2(\mathscr{X}, \mathbb{C}^\ell)$ компактно при $s > 0$. Отсюда следует, что норма D на $\mathscr{D}^1$ вполне непрерывна относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$, если найдется вещественное $s > 0$ со свойством

$$\|u\|_{H^s(\mathscr{X}, \mathbb{C}^\ell)} \leq cD(u) \tag{7.1}$$

для любой $u \in C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$ такой, что $(\sigma^1(C)(\nu))^*u = 0$ на $\partial\mathscr{X}$, где $\nu(x)$ — внешняя нормаль к границе $\mathscr{X}$ в точке $x \in \partial\mathscr{X}$. *Априорные* оценки типа (7.1) называют *субэллиптическими оценками*, для них теряется $1 - s$ в порядке оцениваемых производных.

В [3, теорема III] оценка (7.1) с $s = 1/2$ доказана как следствие оценки

$$\int\limits_{\partial\mathscr{X}} |u|^2\, ds \le cD(u) \tag{7.2}$$

для любой $u \in C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$ с нулевыми данными Коши на $\partial\mathscr{X}$ относительно C^*.

Теорема 7.1. *Допустим, что выполнено* (7.2). *Тогда задача Неймана разрешима на шаге* 1 *и оператор Неймана N обладает следующим свойством псевдолокальности.*

(**PL**) *Для каждого открытого множества $U \subset \overline{\mathscr{X}}$, компактного множества $K \subset U$ и $s \in \mathbb{N}$ существует константа $c > 0$, зависящая от U, K и s, такая, что для всех $f \in C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$ имеет место неравенство*

$$\|Nf\|_{H^s(K,\mathbb{C}^\ell)} \le c(\|f\|_{H^{s-1}(U,\mathbb{C}^\ell)} + \|Nf\|_{L^2(U,\mathbb{C}^\ell)}). \tag{7.3}$$

Доказательство основано на изучении коммутаторов псевдодифференциальных операторов дробного порядка в соболевских пространствах (см [3]). □

Для общих эллиптических комплексов, удовлетворяющих некоторым ограничениям типа δ-оценки второй резольвенты Спенсера, есть также геометрическое условие на границе $\partial\mathscr{X}$, достаточное для выполнения оценки (7.2). Оно состоит в «достаточной» положительности на $\partial\mathscr{X}$ определенной полуторалинейной «формы Леви» на шаге 1 для комплекса.

Запишем A и C в виде

$$A = \sum_{j=1}^n A_j \partial_j, \quad C = \sum_{j=1}^n C_j \partial_j,$$

где A_j и C_j суть ℓ-столбцы и $(\ell \times (k-1))$-матрицы комплексных чисел соответственно и ∂_j — частная производная по j-й переменной.

С этого момента будем по умолчанию считать, что A — оператор типа Дирака геометрической природы. Отсюда следует, что система $\{A_1, \dots, A_n\}$ ортонормальна в $\mathbb{C}^\ell$. Тогда имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{j=1}^n |(v, A_j)|^2 \le (v, v)$$

для любого вектора $v \in \mathbb{C}^\ell$.

Теорема 7.2. *На шаге* 1 *имеет место δ-оценка для* (4.1), *т. е. для любых векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^\ell$ справедливо неравенство*

$$-\sum_{j,k=1}^n (C_j^* v_k)^* (C_k^* v_j) \le \left|\sum_{j=1}^n A_j^* v_j\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^n C_j^* v_j\right|^2 - \sum_{j=1}^n |v_j|^2. \tag{7.4}$$

Доказательство. Так как при условии $\ell = k$ имеем $AA^* + CC^* = -E_\ell \Delta$, несложными вычислениями показывается, что

$$(A_j A_k^* + A_k A_j^*) + (C_j C_k^* + C_k C_j^*) = 2E_\ell \delta_{j,k}$$

для всех $j,k=1,\dots,n$, где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Используя это неравенство, получаем

$$\begin{aligned}
-\sum_{j,k=1}^{n}(C_j^*v_k)^*(C_k^*v_j) &= -\sum_{j,k=1}^{n} v_k^*C_jC_k^*v_j \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} v_k^*(A_jA_k^*+A_kA_j^*+C_kC_j^*-2E_\ell\delta_{j,k})v_j \\
&= \sum_{j,k=1}^{n}(A_j^*v_k)^*(A_k^*v_j)+\left|\sum_{j=1}^{n}A_j^*v_j\right|^2+\left|\sum_{j=1}^{n}C_j^*v_j\right|^2-2\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2. \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Остается оценить первую сумму в правой части (7.5). Для этого заметим, что

$$\sum_{j,k=1}^{n}(A_j^*v_k)^*(A_k^*v_j)=\sum_{\substack{j,k=1,\dots,n\\ j<k}}2\operatorname{Re}(A_j^*v_k)^*(A_k^*v_j)+\sum_{j=1}^{n}|A_j^*v_j|^2,$$

где A — ℓ-столбец и тем самым множители $A_j^*v_k$ суть комплексные числа. Отсюда

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n}(A_j^*v_k)^*(A_k^*v_j) &\le \sum_{\substack{j,k=1,\dots,n\\ j<k}}(|A_j^*v_k|^2+|A_k^*v_j|^2)+\sum_{j=1}^{n}|A_j^*v_j|^2 \\
&= \sum_{\substack{j,k=1,\dots,n\\ j<k}}|A_j^*v_k|^2+\sum_{\substack{j,k=1,\dots,n\\ j>k}}|A_j^*v_k|^2+\sum_{j=1}^{n}|A_j^*v_j|^2=\sum_{j,k=1}^{n}|A_j^*v_k|^2.
\end{aligned}$$

Подстановка этих оценок в (7.5) дает

$$\begin{aligned}
-\sum_{j,k=1}^{n}(C_j^*v_k)^*(C_k^*v_j) \le \left|\sum_{j=1}^{n}A_j^*v_j\right|^2+\left|\sum_{j=1}^{n}C_j^*v_j\right|^2-\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2 \\
+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|(v_k,A_j)|^2-(v_k,v_k)\right). \quad (7.6)
\end{aligned}$$

По неравенству Бесселя последний член в правой части неположителен, что завершает доказательство. □

«Форма Леви» для комплекса (4.1) на шаге 1 возникает из анализа соотношения $(\sigma^1(C)(\nu))^*v=0$ на $\partial\mathscr{X}$ для функции $v\in C^\infty(\overline{\mathscr{X}},\mathbb{C}^\ell)$. Напомним, что это равенство означает, что данные Коши для v на $\partial\mathscr{X}$ относительно C^* исчезают. Пусть $\varrho\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — определяющая функция для $\mathscr{X}$, т. е. $\mathscr{X}=\{x\in\mathbb{R}^n:\varrho(x)<0\}$ и $\nabla\varrho\restriction_{\partial\mathscr{X}}\neq 0$. Тогда

$$\nu(x)=\frac{\nabla\varrho(x)}{|\nabla\varrho(x)|}$$

для $x\in\partial\mathscr{X}$. Отсюда v имеет нулевые данные Коши на $\partial\mathscr{X}$ относительно C^* в том и только в том случае, если

$$\sum_{j=1}^{n}\partial_j\varrho(x)C_j^*v(x)=0 \quad (7.7)$$

для всех $x \in \partial\mathscr{X}$.

Определение 7.3. «*Форма Леви*» для комплекса (4.1) на шаге 1 является отображением, задаваемым эрмитовой формой

$$\mathscr{L}(x)(v,w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho(x)}{\partial x_j \partial x_k} (C_j^* w)^* (C_j^* v)$$

на $\mathbb{C}^\ell$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.

Геометрическое условие, упомянутое выше, на границе $\partial\mathscr{X}$ состоит в следующем: для произвольной точки $x \in \partial\mathscr{X}$ «форма Леви» $\mathscr{L}(x)(v,v)$ положительна для всех ненулевых $v \in \mathbb{C}^\ell$, удовлетворяющих (7.7). Это не зависит от выбора определяющей функции ϱ для $\mathscr{X}$.

Теорема 7.4. *Пусть $\mathscr{X}$ — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, строго псевдовыпуклая в каждой точке $x \in \partial\mathscr{X}$ в том смысле, что $\mathscr{L}(x)(v,v) > 0$ для всех $v \in \mathbb{C}^\ell \setminus \{0\}$, удовлетворяющих* (7.7). *Тогда имеет место оценка Кона — Ниренберга* (7.2).

Доказательство. Фиксируем некоторую функцию $v \in C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$ с нулевыми данными Коши на $\partial\mathscr{X}$ относительно C^*. Перепишем интеграл $\|C^* v\|^2_{\mathscr{L}^0}$, дважды проинтегрировав по частям:

$$\begin{aligned}\|C^* v\|^2_{\mathscr{L}^0} &= \int_{\mathscr{X}} \sum_{j,k=1}^{n} (C_j^* \partial_j v)^* (C_k^* \partial_k v)\, dx \\ &= \int_{\partial\mathscr{X}} \sum_{j,k=1}^{n} \big((C_j^* v)^* (C_k^* \partial_k v) * dx_j - (C_j^* v)^* (C_k^* \partial_j v) * dx_k\big) \\ &\qquad + \int_{\mathscr{X}} \sum_{j,k=1}^{n} (C_j^* \partial_k v)^* (C_k^* \partial_j v)\, dx.\end{aligned}$$

Использовав теперь оценки $*dx_j \restriction_{\partial\mathscr{X}} = \frac{\partial_j \varrho}{|\nabla\varrho|} ds$ для $j = 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned}\|C^* v\|^2_{\mathscr{L}^0} = \int_{\partial\mathscr{X}} &\Bigg(\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \partial_j \varrho C_j^* v\Bigg)^* \Bigg(\sum_{k=1}^{n} C_k^* \partial_k v\Bigg) \\ &- \sum_{j=1}^{n} (C_j^* v)^* \Bigg(\sum_{k=1}^{n} \partial_k \varrho C_k^* \partial_j v\Bigg)\Bigg) \frac{ds}{|\nabla\varrho|} + \int_{\mathscr{X}} \sum_{j,k=1}^{n} (C_j^* \partial_k v)^* (C_k^* \partial_j v)\, dx. \qquad (7.8)\end{aligned}$$

Так как $(\sigma^1(C)(\nu))^* v = 0$ на $\partial\mathscr{X}$, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j \varrho C_j^* v = \varrho Q$$

для некоторого $Q \in C^1(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^{k-1})$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n} (C_j^* v)^* \partial_j \Bigg(\sum_{k=1}^{n} \partial_k \varrho C_k^* v\Bigg) = \varrho \Bigg(\sum_{j=1}^{n} (C_j^* v)^* \partial_j Q + Q^* Q\Bigg),$$

так что

$$-\sum_{j=1}^{n}(C_j^* v)^*\left(\sum_{k=1}^{n}\partial_k \varrho C_k^* \partial_j v\right) = \mathscr{L}(x)(v,v) - \varrho\left(\sum_{j=1}^{n}(C_j^* v)^* \partial_j Q + Q^* Q\right).$$

Тем самым подынтегральная функция в интеграле по границе в правой части (7.8) равна

$$\mathscr{L}(x)(v,v) + \varrho\left(Q^*\left(\sum_{k=1}^{n} C_k^* \partial_k v\right) - \sum_{j=1}^{n}(C_j^* v)^* \partial_j Q - Q^* Q\right),$$

откуда

$$\int_{\partial\mathscr{X}} \mathscr{L}(x)(v,v)\frac{ds}{|\nabla\varrho|} = \|C^* v\|^2_{\mathscr{L}^0} - \int_{\mathscr{X}} \sum_{j,k=1}^{n} (C_j^* \partial_k v)^* (C_k^* \partial_j v)\, dx. \tag{7.9}$$

Подставив поточечную оценку (7.4) в (7.10), получим явную оценку

$$\int_{\partial\mathscr{X}} \mathscr{L}(x)(v,v)\frac{ds}{|\nabla\varrho|} \le \|A^* v\|^2_{\mathscr{L}^2} + 2\|C^* v\|^2_{\mathscr{L}^0} - \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j v\|^2_{\mathscr{L}^1} \tag{7.10}$$

для всех $v \in C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$ с нулевыми данными Коши на $\partial\mathscr{X}$ относительно C^*.

Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что существует константа $c > 0$ такая, что

$$\frac{\mathscr{L}(x)(v,v)}{|\nabla\varrho(x)|} \ge c|v|^2$$

для всех $v \in \mathbb{C}^\ell$, удовлетворяющих (7.7), и всех $x \in \partial\mathscr{X}$. □

Мы не будем пытаться обсуждать геометрический смысл «условия Леви». Заметим однако, что если $\mathscr{X}$ строго выпукла, то это условие выполнено.

Для классических операторов Дирака оно влечет одновременно разрешимость задачи Неймана и единственность решений.

Теорема 7.5. *Если область $\mathscr{X}$ псевдовыпукла в каждой граничной точке и существует точка $x \in \partial\mathscr{X}$ такая, что $\mathscr{X}$ строго псевдовыпукла в x, то $\mathscr{H}^1 = 0$.*

Доказательство. Из (7.10) легко вывести, что

$$\int_{\partial\mathscr{X}} \mathscr{L}(x)(f,f)\frac{ds}{|\nabla\varrho|} + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j f\|^2_{\mathscr{L}^1} \le \|A^* f\|^2_{\mathscr{L}^2} + 2\|C^* f\|^2_{\mathscr{L}^0}$$

для любой $f \in C^\infty(\overline{\mathscr{X}}, \mathbb{C}^\ell)$ с нулевыми данными Коши на $\partial\mathscr{X}$ относительно C^*. Поэтому если $A^* f = 0$, $C^* f = 0$ в $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}$ псевдовыпукла в каждой точке $\partial\mathscr{X}$, то каждая компонента f постоянна и

$$\int_{\partial\mathscr{X}} \mathscr{L}(x)(f,f)\frac{ds}{|\nabla\varrho|} = 0.$$

Ввиду непрерывности $\mathscr{L}(x)(f,f)$ заключаем, что $\mathscr{L}(x)(f,f) \equiv 0$ на $\partial\mathscr{X}$.

Если $\mathscr{X}$ строго псевдовыпукла в некоторой точке $x \in \partial\mathscr{X}$, то $f(x) = 0$, ибо иначе будем иметь $\mathscr{L}(x)(f,f) > 0$. Используя теперь тот факт, что $\mathscr{X}$ связно, находим, что $f \equiv 0$ всюду на $\mathscr{X}$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Booss-Bavnbek B., Wojciechowski K.* Elliptic boundary problems for Dirac operators. Basel: Birkhäuser, 1993.
2. *Tarkhanov N.* Complexes of differential operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995.
3. *Kohn J. J., Nirenberg L.* Non-coercive boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18. P. 443–492.
4. *Тарханов Н. Н.* Замечание о системе Моисила — Теодореску // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 3. С. 208–214.
5. *Palamodov V., Tarkhanov N.* Nonregular boundary problems for elliptic systems // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2009. V. 19, N 2. P. 427–440.
6. *Riesz F. Sz.-Nagy B.* Lecons d'analyse fonctionnelle. Budapest: Acad. Sci. Hongrie, 1952.

Статья поступила 29 июня 2009 г.

Ibrahim Ly (Ли Ибрахим), Nikolai Tarkhanov (Тарханов Николай Николаевич)
Institut für Mathematik
Universität Potsdam
Am Neuen Palais 10
14469 Potsdam, Germany
`lyibrahim@gmx.de`, `tarkhanov@math.uni-potsdam.de`