Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.982

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЕТЕЙ ЛОТЦА — РАБИГЕРА И МАРТИНГАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Э. Ю. Емельянов

Аннотация. С помощью теоремы 1 о сходимости из [1] доказаны результаты, относящиеся к LR- и M-сетям. Предложен единый подход к LR- и M-сетям, являющимся двумя крайними видами асимптотических абелевых сетей.

Ключевые слова: сеть Лотца — Рабигера, мартингальная сеть, констриктор.

1. Введение

Начнем с небольшого общего обсуждения. В основной части работу мы будем иметь дело с LR- и M-сетями, сначала обратимся к некоторому важному обобщению этих сетей. Это сделает более прозрачным и естественным рассмотрение LR- и M-сетей.

1.1. Сети непрерывных функций. Пусть $\Lambda = (\Lambda, \succ)$ — частично упорядоченное направленное множество. Пусть $X = (X, \tau)$ — топологическое пространство. Обозначим через $C(X, X)$ множество непрерывных функций, отображающих X в X, и через $\mathscr{NC}(X) = \mathscr{NC}_\Lambda(X)$ — множество всех сетей в $C(X, X)$, индексированных множеством Λ. Множество $\mathscr{NC}(X)$ снабжено следующей естественной операцией:

$$\mathscr{F} \bullet \mathscr{G} := (f_\lambda \circ g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \quad (\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda},\ \mathscr{G} = (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathscr{NC}(X)),$$

о которой будем говорить как о *поточечной композиции* сетей $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$.

Функцию $f \in C(X, X)$ будем отождествлять с сетью $\mathbf{f} := (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ такой, что $f_\lambda = f$ для всех $\lambda \in \Lambda$, если это не приведет к недоразумениям. Вложение $f \mapsto \mathbf{f}$ сохраняет операцию композиции в том смысле, что если $h = f \circ g$ в $C(X, X)$, то $\mathbf{h} = \mathbf{f} \bullet \mathbf{g}$ в $\mathscr{NC}(X)$.

Очевидно, $\mathscr{NC}(X)$ — полугруппа относительно операции $\bullet$. Сеть id, где $\mathrm{id}(x) = x$ для всех $x \in X$, является единицей этой полугруппы. После отождествления функций с сетями $C(X, X)$ становится подполугруппой в $\mathscr{NC}(X)$.

Пусть $x \in X$. Тогда для сети $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathscr{NC}(X)$ сеть $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$ элементов из X называют *орбитой* $\mathscr{F}$ *с началом в* x.

1.2. Асимптотическая эквивалентность сетей. Для сети $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в X и элемента $x \in X$ будем писать $\tau\text{-}\lim\limits_{\lambda \to \infty} x_\lambda = y$ или $x_\lambda \xrightarrow{\tau} y$, если сеть $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к x топологически, т. е. для любой окрестности U точки x существует $\lambda_U \in \Lambda$ такое, что $x_\lambda \in U$ для всех $\lambda \succ \lambda_U$.

Как можно асимптотически описать и изучить $\mathscr{NC}(X)$? Для этих целей необходимо понятие асимптотической эквивалентности между элементами $\mathscr{NC}(X)$. Есть по крайней мере два подхода к этому понятию, основанные на различных возможностях сравнения орбит сетей из $\mathscr{NC}(X)$. Пусть $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathscr{G} = (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — такие сети.

Первая возможность сравнения орбит $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ появляется, если разность любых двух элементов $a, b \in X$ существует как элемент из X. Это тот случай, когда (X, τ) — топологическая группа. Обозначим групповую операцию на X через $+$ и единичный элемент в X — через $\mathbf{0}$. Будем говорить, что $\mathscr{F}$ *асимптотически эквивалентна* $\mathscr{G}$, если

$$\tau\text{-}\lim_{\lambda\to\infty}(f_\lambda(x) - g_\lambda(x)) = \mathbf{0} \quad (\forall x \in X). \tag{1}$$

Вторая возможность основана на том, что мы можем сравнивать близость между двумя точками из X равномерно, например, если τ — равномеризуемая топология на X (т. е. топология равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$). Тогда говорят, что сеть $\mathscr{F}$ *асимптотически эквивалентна* $\mathscr{G}$, если для любых $x \in X$, $V \in \mathscr{U}$ найдется $\lambda_V \in \Lambda$ такое, что

$$(f_\lambda(x), g_\lambda(x)) \in V \quad (\forall \lambda \succ \lambda_V). \tag{2}$$

В обоих случаях будем писать $\mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathscr{G}$, если $\mathscr{F}$ асимптотически эквивалентно $\mathscr{G}$. Легко видеть, что $\overset{a}{\approx}$ — отношение эквивалентности на $\mathscr{NC}(X)$. Говорят, что сеть $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *асимптотически эквивалентна* функции $f \in C(X, X)$, и пишут $\mathscr{F} \overset{a}{\approx} f$, если $\mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathbf{f}$. Запись $\mathscr{F} \overset{a}{\approx} f$ в точности означает, что сеть $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сходится к функции f поточечно.

1.3. Асимптотически абелевы сети. Будем говорить, что сеть $\mathscr{F}$ *асимптотически коммутирует* с сетью $\mathscr{G}$, если

$$\mathscr{F} \bullet \mathscr{G} \overset{a}{\approx} \mathscr{G} \bullet \mathscr{F},$$

и что сеть $\mathscr{H} \in \mathscr{NC}(X)$ *асимптотически коммутирует* с функцией $f \in C(X, X)$, если $\mathscr{H} \bullet \mathbf{f} \overset{a}{\approx} \mathbf{f} \bullet \mathscr{H}$. Сеть $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ назовем *асимптотически абелевой*, если

$$\mathscr{F} \bullet \mathbf{f}_\mu \overset{a}{\approx} \mathbf{f}_\mu \bullet \mathscr{F}$$

для каждого $\mu \in \Lambda$. Разумеется, любое множество, состоящее из попарно коммутирующих функций, асимптотически абелево. Однако сеть может быть асимптотически абелева независимо от попарной коммутативности ее элементов. Например, возьмем две некоммутативные линейные изометрии S и T евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим сеть $\mathbb{N}_+^2$, снабженную покоординатным порядком. Тогда сеть $\mathscr{H} = (H_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{N}_+^2}$, где $H_{(n,m)} = \frac{2}{nm} S^{n-1} \circ T^{m-1}$, некоммутативна, так как она содержит $S = H_{(2,1)}$ и $T = H_{(1,2)}$. Однако сеть $\mathscr{H}$ асимптотически абелева, поскольку $\mathscr{H} \bullet \mathbf{H}_{(\mathbf{n_0},\mathbf{m_0})} \overset{a}{\approx} \mathbf{0} \overset{a}{\approx} \mathbf{H}_{(\mathbf{n_0},\mathbf{m_0})} \bullet \mathscr{H}$ для всех $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}_+^2$.

1.4. Два крайних случая асимптотически абелевых сетей. В данной работе мы изучаем асимптотически абелевы сети, скажем, $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, удовлетворяющие одному из следующих двух крайних условий:

$$\mathbf{f}_\mu \bullet \mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathbf{f}_\mu \overset{a}{\approx} \mathscr{F} \bullet \mathbf{f}_\mu \quad (\forall \mu \in \Lambda), \tag{3}$$

$$\mathbf{f}_\mu \bullet \mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathscr{F} \bullet \mathbf{f}_\mu \quad (\forall \mu \in \Lambda). \tag{4}$$

Грубо говоря, идея (3) в том, что сеть $\mathscr{F}$ асимптотически поглощается каждым своим элементом, а идея условия (4) в том, что сеть $\mathscr{F}$ асимптотически поглощает каждый свой элемент.

Отметим, что если сеть $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию (3), то

$$\mathbf{h} \bullet \mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathbf{h} \overset{a}{\approx} \mathscr{F} \bullet \mathbf{h}$$

для любой функции h из полугруппы $SG(\mathscr{F})$, порожденной элементами сети $\mathscr{F}$ в $C(X,X)$. Если $\mathscr{F}$ удовлетворяет (4), то

$$\mathbf{h} \bullet \mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathscr{F} \overset{a}{\approx} \mathscr{F} \bullet \mathbf{h}$$

для любого $h \in SG(\mathscr{F})$.

1.5. Сети непрерывных функций на компактном метрическом пространстве. Проиллюстрируем полезность условий (3) и (4), доказав следующее изящное элементарное утверждение.

Предложение 1. *Пусть $X = (X, \rho)$ — компактное метрическое пространство и $\mathscr{F} = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — эквинепрерывная сеть в $\mathscr{N}\mathscr{C}(X)$, удовлетворяющая одному из условий* (3), (4). *Тогда $\mathscr{F}$ равномерно сходится к некоторой функции $f \in C(X,X)$ такой, что $f \circ f = f$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathscr{F}$ не сходится равномерно. Тогда по теореме Арцела — Асколи существуют две подсети $\mathscr{F}_1 = (f_{\lambda_\alpha})_\alpha$ и $\mathscr{F}_2 = (f_{\lambda_\beta})_\beta$ в $\mathscr{F}$, равномерно сходящиеся при $\alpha \to \infty$ и $\beta \to \infty$ к функциям $\phi \in C(X,X)$ и $\psi \in C(X,X)$ соответственно, и $\phi \neq \psi$.

Если сеть $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию (3), то для любых $\mu \in \Lambda$, $x \in X$

$$\rho(f_\mu \circ f_{\lambda_\alpha}(x), f_\mu(x)) \to 0 \quad \text{и} \quad \rho(f_{\lambda_\alpha} \circ f_\mu(x), f_\mu(x)) \to 0$$

при $\alpha \to \infty$. Переход к пределу дает равенство

$$f_\mu \circ \phi = \phi \circ f_\mu = f_\mu \quad (\forall \mu \in \Lambda). \tag{3a}$$

Переходя к пределу в (3a) при $\mu = \lambda_\beta \to \infty$, получим

$$\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \psi. \tag{3b}$$

Поменяв местами подсети $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ и их пределы ϕ и ψ в (3a) и (3b), приходим к тому, что

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \phi,$$

что противоречит (3b), ибо $\psi \neq \phi$. Стало быть, $\mathscr{F}$ сходится равномерно к функции ϕ. Переходя к пределу в (3a) при $\mu = \lambda_\alpha \to \infty$, имеем $\phi \circ \phi = \phi$, и доказательство завершено в случае, если $\mathscr{F}$ удовлетворяет (3).

Если сеть $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию (4), то для любых $\mu \in \Lambda$, $x \in X$

$$\rho(f_\mu \circ f_{\lambda_\alpha}(x), f_{\lambda_\alpha}(x)) \to 0 \quad \text{и} \quad \rho(f_{\lambda_\alpha} \circ f_\mu(x), f_{\lambda_\alpha}(x)) \to 0$$

при $\alpha \to \infty$ по Λ. Переходя к пределу при $\alpha \to \infty$, получаем

$$f_\mu \circ \phi = \phi \circ f_\mu = \phi \quad (\forall \mu \in \Lambda). \tag{4a}$$

Переход к пределу в (4a) при $\mu = \lambda_\beta \to \infty$ дает

$$\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \phi. \tag{4b}$$

Поменяв местами подсети $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ и их пределы ϕ и ψ в (4b), приходим к тому, что

$$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \psi.$$

Это противоречит (4b), ибо $\psi \neq \phi$. Тем самым $\mathscr{F}$ сходится равномерно к функции ϕ. Переходя к пределу в (4a) при $\mu = \lambda_\alpha \to \infty$, получаем $\phi \circ \phi = \phi$, и утверждение доказано, если $\mathscr{F}$ удовлетворяет (4).

Итак, $\mathscr{F}$ сходится равномерно к идемпотентной функции в обоих случаях.

В настоящей работе проиллюстрировано, каким образом вышеупомянутые асимптотические понятия работают в случае линейных операторов на банаховом пространстве. Этот весьма частный случай содержит обилие интересных структур из теории операторов и снабжает нас многими хорошо изученными примерами сетей, относящихся к данной работе.

2. Операторные сети на банаховом пространстве

2.1. Определения и обозначения. Пусть X — банахово пространство, являющееся топологической группой относительно топологии, определяемой нормой $\tau := \tau_{\|\cdot\|}$. Два данных в (1) и (2) определения подходят для сетей в $\mathscr{N}\mathscr{C}(X)$. Обозначим через $L(X)$ алгебру всех ограниченных операторов на X. Далее мы будем, естественно, рассматривать сети (с множеством индексов Λ), состоящие из операторов алгебры $L(X)$, представляющих собой непрерывные функции из X в X. Множество всех таких сетей обозначим через $\mathscr{N}\mathscr{L}(X)$ и элементы множества $\mathscr{N}\mathscr{L}(X)$ будем называть *операторными сетями*. Будем использовать терминологию и обозначения из введения, заменяя $C(X,X)$ на $L(X)$ и $\mathscr{N}\mathscr{C}(X)$ на $\mathscr{N}\mathscr{L}(X)$. Отметим, что $\mathscr{N}\mathscr{L}(X)$ является алгеброй относительно операции поточечного сложения

$$(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (T_\lambda + S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

и операции $\bullet$, определенной во введении. Банахова алгебра $L(X)$ становится подалгеброй $\mathscr{N}\mathscr{L}(X)$, если отождествить операторы с сетями следующим образом: $T = \mathbf{T} = (T)_{\lambda\in\Lambda}$. Семейство $\{\mathscr{U} \in \mathscr{N}\mathscr{L}(X) : \mathscr{U} \overset{sa}{\approx} \mathbf{0}\}$ всех операторных сетей, сильно сходящихся к нулю, является векторным подпространством в $\mathscr{N}\mathscr{L}(X)$, но в общем случае это не алгебраический идеал.

Определение 1. Пусть $\mathscr{U} = (U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ и $\mathscr{V} = (V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — операторные сети на X.

(i) Будем говорить, что $\mathscr{U}$ *сильно асимптотически эквивалентна* $\mathscr{V}$, и писать $\mathscr{U} \overset{sa}{\approx} \mathscr{V}$, если

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|U_\lambda x - V_\lambda x\| = 0 \quad (\forall x \in X). \tag{5}$$

(ii) Будем говорить, что $\mathscr{U}$ *равномерно асимптотически эквивалентна* $\mathscr{V}$, и писать $\mathscr{U} \overset{ua}{\approx} \mathscr{V}$, если

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|U_\lambda - V_\lambda\| = 0. \tag{6}$$

Определение 1 согласуется с определением асимптотической эквивалентности, данным во введении. Действительно, в случае сильной асимптотической эквивалентности они даже совпадают. Для равномерной эквивалентности можно заметить, что сети $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ суть сети на нормированном пространстве $(L(X), \|\cdot\|)$

за счет отождествления оператора $T \in L(X)$ с оператором $\widetilde{T} \in L(L(X))$, действующим на $L(X)$ как левое умножение:

$$\widetilde{T}(S) = T \circ S \quad (S \in L(X)).$$

Легко увидеть, что $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \overset{ua}{\approx} (V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ тогда и только тогда, когда $(\widetilde{U}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \overset{a}{\approx} (\widetilde{V}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

2.2. Сети Лотца — Рабигера и мартингальные сети. Условия (3) и (4) применительно к операторным сетям (мы дополнительно требуем равномерную ограниченность) приводят к следующему определению.

Определение 2. Равномерно ограниченная операторная сеть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L(X)$ называется

(a) *мартингальной сетью* (для краткости *M-сетью*), если

$$\mathbf{T}_\mu \bullet \mathscr{T} \overset{sa}{\approx} \mathbf{T}_\mu \overset{sa}{\approx} \mathscr{T} \bullet \mathbf{T}_\mu \quad (\forall \mu \in \Lambda); \tag{7}$$

(b) *сетью Лотца — Рабигера* (для краткости *LR-сетью*), если

$$\mathbf{T}_\mu \bullet \mathscr{T} \overset{sa}{\approx} \mathscr{T} \overset{sa}{\approx} \mathscr{T} \bullet \mathbf{T}_\mu \quad (\forall \mu \in \Lambda). \tag{8}$$

Это определение восходит к Лотцу, исследовавшему мартингальные сети в [2] для специального случая $\Lambda = \mathbb{N}$ и назвавшему их *M-последовательностями*, и к Рабигеру, назвавшему LR-сети *M-сетями* в работе [3]. В данной статье будем использовать термин M-сеть в качестве обобщения M-последовательностей в первоначальном смысле Лотца. Очевидный пример сети Лотца — Рабигера дается любой операторной сетью $\mathscr{T} \overset{sa}{\approx} \mathbf{0}$. Другие примеры LR-сетей будут предложены ниже. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 2. *Операторная сеть $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L(X)$ является LR-сетью тогда и только тогда, когда сеть $(I - T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ представляет собой M-сеть.*

Имея в виду предложение 2, можно выбирать, какое из этих двух понятий исследовать. В настоящей работе мы предпочтем иметь дело с LR-сетями.

Для LR-сети $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ обозначим через $\widehat{\Lambda}$ множество $\Lambda \cup \{\lambda_0\}$ при $\lambda_0 \notin \Lambda$ и распространим частичный порядок из Λ на $\widehat{\Lambda}$, полагая $\lambda_0 \prec \lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть $T_{\lambda_0} := I$. Семейство $\widehat{\mathscr{T}} = (T_\lambda)_{\lambda\in\widehat{\Lambda}}$ является LR-сетью, содержащей тождественный оператор. Поскольку для LR-сетей мы будем интересоваться исключительно свойствами асимптотического характера (т. е. при $\lambda \to \infty$), можно считать, что любая LR-сеть включает в себя тождественный оператор.

В общем случае LR-сети далеки от операторных полугрупп, хотя некоторые операторные полугруппы являются LR-сетями и некоторые LR-сети представляют собой операторные полугруппы.

Следующее полезное утверждение вытекает непосредственно из определения LR-сети.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — LR-сеть на X и $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{semigroup}(\mathscr{T}))$ — сильное замыкание выпуклой оболочки мультипликативной полугруппы, порожденной $\mathscr{T}$ в $L(X)$. Тогда*

$$(C \circ T_\lambda \circ D)_{\lambda\in\Lambda} \overset{sa}{\approx} (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \quad (\forall C, D \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{semigroup}(\mathscr{T}))).$$

В частности,

$$\left(T_\lambda \circ T_\mu^k\right)_{\lambda\in\Lambda} \overset{sa}{\approx} (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \overset{sa}{\approx} \left(T_\mu^k \circ T_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda} \quad (\forall k \in \mathbb{N},\ \mu \in \Lambda).$$

В общем случае операторная сеть Υ, сильно асимптотически эквивалентная LR-сети $\mathscr{T}$, не обязательно является LR-сетью, хотя Υ может разделять с $\mathscr{T}$ ряд асимптотических свойств. Это замечание приводит к следующему понятию.

Определение 3. Операторная сеть $\Upsilon \subseteq L(X)$ называется *асимптотической LR-сетью* (для краткости *ALR-сетью*), если найдется LR-сеть $\mathscr{T}$ такая, что $\Upsilon \overset{sa}{\approx} \mathscr{T}$.

2.3. Примеры LR- и M-сетей. В следующем разделе мы изучим некоторые вопросы, касающиеся сходимости LR-сетей. Но прежде дадим несколько примеров мартингальных сетей и сетей Лотца — Рабигера, подчеркивающих важность этих понятий.

Пример 1. Весьма простые примеры может дать рассмотрение произвольной непрерывной полугруппы $(T_t)_{t\in(0,\infty)} \subseteq L(X)$, ограниченной на непустом интервале $(0, a)$ значений t. В качестве направленного множества Λ возьмем интервал $(0, a)$, снабженный порядком $\le^*$, т. е. обратным к обычному на $\mathbb{R}$, и положим $\mathscr{T} := (T_t)_{t\in(0,a)_{\le^*}}$. Тогда сильная непрерывность полугруппы $(T_t)_{t\in(0,\infty)}$ приводит в точности к условию (7) определения 2 для операторной сети $\mathscr{T}$. Стало быть, $\mathscr{T}$ — M-сеть.

Пример 2 [2, 3]. Пусть $T \in L(X)$ — сжимающее отображение (т. е. $\|T\| \le 1$). Тогда последовательность $\left(A_n^T\right)_{n=1}^{\infty}$ *чезаровских средних* $A_n^T := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k$ является LR-сетью.

В качестве обобщения можно взять систему $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ почти инвариантных интегралов в смысле Эберлейна [4] для операторной полугруппы $\mathscr{S}$ (*$\mathscr{S}$-эргодическую сеть* в современной терминологии [5, с. 75]). Тогда $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — LR-сеть.

Пример 3. Пусть $(H_t)_{t\ge0}$ — C_0-полугруппа ядерных операторов, действующих на пространстве $L_1(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$(H_t f)[x] = (4\pi t)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(x-y)^2}{4t}\right] f(y)\,dy \quad (\forall x \in X,\ t \in \mathbb{R}_+).$$

Эти операторы дают решение $u(t,x) = (H_t f)[x]$ уравнения теплопроводности на числовой прямой:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{с начальным условием } u(0,x) = f(x).$$

Тогда $(H_t)_{t\ge0}$ — LR-сеть.

В более общем случае любая однопараметрическая полугруппа вполне перемешивающих марковских операторов на L_1-пространстве (см. [5, с. 254]) является LR-сетью.

Пример 4 [2]. Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство и $1 \le p \le \infty$, и пусть $X = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Пусть $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-подалгебр Σ. Для каждого $f \in X$ пусть $C_n f \in X$ — условное математическое ожидание f относительно Σ_n. Тогда последовательность $(C_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L(A)$ является коммутативной M-сетью.

Пример 5 [6]. Обозначим через $\Lambda = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ направленное частично упорядоченное множество всех непустых конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Пусть дано

$\pi \in \Lambda$. Определим локальный оператор усреднения $A_\pi : \ell_\infty \to \ell_\infty$, полагая

$$(A_\pi \mathbf{x})_k = (A_\pi \mathbf{x})(k) := \begin{cases} x_k, & k \notin \pi, \\ \operatorname{card}(\pi)^{-1} \cdot \sum\limits_{i \in \pi} x_i, & k \in \pi. \end{cases}$$

Тогда операторная сеть $(A_\pi)_{\pi \in \Lambda}$ на ℓ_∞ является LR-сетью.

Пример 6. Пусть $A = (A, *, \|\cdot\|)$ — банахова алгебра. Изометрично вложим A в $L(A)$ следующим образом:

$$\pi(a)(x) := a * x \quad (\forall x \in A).$$

Тогда для любой аппроксимативной единицы $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в $(A, *, \|\cdot\|)$, т. е. равномерно ограниченной сети такой, что $\lim\limits_{\lambda \to \infty} e_\lambda * a = \lim\limits_{\lambda \to \infty} a * e_\lambda = a$ для всех $a \in A$, операторная сеть $(\pi(e_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \subseteq L(X)$ является M-сетью.

Другие примеры LR-сетей и мартингальных сетей можно найти в [2, 3].

3. Теорема сходимости для сетей Лотца — Рабигера

3.1. Теорема сходимости. Следующая *теорема сходимости* восходит к Лотцу [2], доказавшему ее для мартингальных последовательностей, а также к Рабигеру [3, предложение 2.3], анонсировавшему его внутри доказательства эквивалентности условий (i)–(iii) в теореме 1 для произвольных LR-сетей. Полное доказательство этой теоремы опубликовано в [1, предложение 1.2, теорема 2.1, 3.1] автором совместно с Эркурсун.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — LR-сеть на банаховом пространстве X. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) *$\mathscr{T}$ сходится сильно; в таком случае сильный предел сети $\mathscr{T}$ является проекцией на фиксированное пространство $\operatorname{Fix}(\mathscr{T})$ в $\mathscr{T}$;*

(ii) *для любого $x \in X$ сеть $(T_\lambda x)_{\lambda \in \Lambda}$ имеет слабую точку сгущения;*

(iii) *имеет место равенство*

$$X = \operatorname{Fix}(\mathscr{T}) \oplus \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda) X}; \tag{9}$$

(iv) $\operatorname{Fix}(\mathscr{T})$ *разделяет фиксированное пространство $\operatorname{Fix}(\mathscr{T}^*)$ сопряженной сети $\mathscr{T}^* := (T_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Формула, несколько более слабая, чем (9), доказана в [1, предложение 1.2], а именно

$$X = \operatorname{Fix}(\Theta) \oplus \overline{\operatorname{span} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda) X}. \tag{10}$$

Однако (10) влечет (9) непосредственно. В самом деле, пусть $x = (I - T_{\lambda_1}) u$ и $y = (I - T_{\lambda_2}) w$ из $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda) X$. Так как $(T_\lambda \circ (I - T_\mu))_{\lambda \in \Lambda} \overset{sa}{\approx} 0$ для каждого $\mu \in \Lambda$, согласно (8) получаем

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|x - (I - T_\lambda) x\| = \lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda x\| = 0, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \|y - (I - T_\lambda) y\| = \lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda y\| = 0.$$

Поэтому

$$x + y = \lim_{\lambda \to \infty} (I - T_\lambda)(x + y) \in \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (I - T_\lambda) X}.$$

С помощью аппроксимации находим, что последняя формула справедлива для произвольных $x, y \in \overline{\operatorname{span} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (I - T_\lambda)X}$. Отсюда

$$\overline{\operatorname{span} \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (I - T_\lambda)X} = \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (I - T_\lambda)X}.$$

Отметим, что эквивалентность утверждений (i)–(iii) для $\mathscr{S}$-эргодических сетей доказана Эберлейном [4]. Эквивалентность утверждения (iv) другим утверждениям, по существу, установлена в [7], где она найдена для последовательности чезаровских средних оператора.

Следующее утверждение для ALR-сетей очевидно.

Следствие 1. *Пусть $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — ALR-сеть на банаховом пространстве X. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(i) *$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ сильно сходится к проекции;*

(ii) *для каждого $x \in X$ сеть $(U_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ имеет слабую точку сгущения.*

3.2. Наследование сильной сходимости при мажорировании. В качестве первого применения теоремы сходимости рассмотрим наследование сильной сходимости LR-сетей при мажорировании. Допустим, что конус положительных элементов в упорядоченном банаховом пространстве X порождающий, т. е. $X = X_+ - X_+$.

Определение 4 [8, определение 10]. Упорядоченное банахово пространство X называют *идеально упорядоченным*, если любой порядковый интервал $[x, y] \subseteq X$ слабо компактен и для любой сети $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq X_+$ такой, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|x_\lambda - y\| = 0$, справедливо

$$\lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{dist}([0, x_\lambda], [0, y]) = 0. \tag{11}$$

Многие известные банаховы пространства такие, как банаховы решетки с порядково непрерывной нормой, и предсопряженные к алгебрам фон Неймана, идеально упорядоченны (см. [9, разд. 2.1, 3.1]).

Теорема 2. *Пусть X — идеально упорядоченное банахово пространство и $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $\mathscr{S} = (S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — операторные сети такие, что*

$$0 \le S_\lambda x \le T_\lambda x \quad (\forall x \in X_+).$$

Если $\mathscr{S}$ — LR-сеть и $\mathscr{T}$ сильно сходится, то $\mathscr{S}$ сильно сходится.

Доказательство. Пусть $z \in X_+$ и $T_\lambda z \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Тогда согласно (11)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{dist}([0, T_\lambda z], [0, y]) = 0,$$

откуда $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \operatorname{dist}(S_\lambda z, [0, y]) = 0$. Сеть $(S_\lambda z)_{\lambda\in\Lambda}$ имеет слабую точку сгущения, ибо порядковый интервал $[0, y]$ слабо компактен. Стало быть, для любого элемента $x \in X$, всегда являющегося разностью двух положительных, сеть $(T_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ имеет слабую точку сгущения. По теореме 1 отсюда вытекает сильная сходимость $\mathscr{S}$.

Теорема 2 доказана в [10, теорема 1.1] для LR-сети чезаровских средних на банаховой решетке с порядково непрерывной нормой. Затем в [3, предложение 2.4] этот результат был распространен на произвольные LR-сети на банаховых решетках с порядково непрерывной нормой. Впоследствии в [8, теорема 13] условие порядковой непрерывности нормы было ослаблено до предположения идеальной упорядоченности. Отметим, что теорема 2 остается верной, если потребовать, чтобы $\mathscr{S}$ было лишь ALR-сетью. Более того, она допускает непосредственное распространение на случай, когда сеть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ асимптотически мажорирует (в смысле [11, с. 636]) положительную ALR-сеть $\mathscr{S} = (S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, т. е.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup \operatorname{dist}(T_\lambda x - S_\lambda x, X_+) = 0 \quad (\forall x \in X_+).$$

3.3. Констрикторы операторных сетей. Для дальнейших приложений теоремы сходимости нам понадобится следующее

Определение 5. Пусть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — операторная сеть на банаховом пространстве X. Подмножество $A \subseteq X$ называют *констриктором* $\mathscr{T}$, если

$$\lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{dist}(T_\lambda x, A) = 0 \quad (\forall x \in B_X), \tag{12}$$

где B_X — единичный шар в X. Обозначим семейство всех констрикторов $\mathscr{T}$ через $\operatorname{Con}(\mathscr{T})$.

Это понятие впервые появилось в [12] применительно к однопараметрической дискретной марковской полугруппе. В последние два десятилетия понятие констриктора абелевой полугруппы линейных операторов на банаховом пространстве изучалось многими авторами (соответствующие результаты и дальнейшие ссылки см. в [9, 13]). Заметим, что понятие констриктора асимптотическое в том смысле, что $\operatorname{Con}(\mathscr{U}) = \operatorname{Con}(\mathscr{T})$ при $\mathscr{U} \overset{sa}{\approx} \mathscr{T}$.

Теорема 3. *Всякая LR-сеть, содержащая слабо компактный оператор, сильно сходится.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — LR-сеть на банаховом пространстве X и T_{λ_0} слабо компактен. Положим $M := \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|$. Пусть $x \in B_X$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \operatorname{dist}(T_\lambda x, T_{\lambda_0}(M \cdot B_X)) = 0,$$

так как $\|T_\lambda x - T_{\lambda_0} \circ T_\lambda x\| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $T_\lambda x \in M \cdot B_X$ для любого λ. Поэтому сильное замыкание $\overline{T_{\lambda_0}(M \cdot B_X)}$ множества $T_{\lambda_0}(M\cdot B_X)$ является слабо компактным констриктором $\mathscr{T}$. Значит, для каждого $x \in X$ сеть $(T_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda}$ имеет слабую точку сгущения. Сильная сходимость $\mathscr{T}$ следует из теоремы 1.

3.4. Теорема расщепления для ALR-сетей с компактным констриктором. Следующий результат надлежит рассматривать как вариант теоремы Ласота — Ли — Йорке — Фона — Сайна (см. [9, теорема 1.3.3]) для ALR-сетей.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{T} = (T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq L(X)$ — ALR-сеть на банаховом пространстве X с компактным констриктором. Тогда $\mathscr{T}$ сильно сходится к проектору конечного ранга.*

Доказательство. Пусть A — компактный констриктор $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ — LR-сеть такая, что $\mathscr{T}' \overset{sa}{\approx} \mathscr{T}$. Тогда множество A также является констриктором $\mathscr{T}'$. Согласно определению констриктора ввиду компактности A каждая орбита $\mathscr{T}'$ и, стало быть, каждая орбита $\mathscr{T}$ имеют сильную (а значит, и слабую) точку сгущения. В силу следствия 1 обе сети $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}'$ сильно сходятся (к проектору на фиксированное пространство $\operatorname{Fix}(\mathscr{T}') \subseteq X$ в $\mathscr{T}'$). Так как A компактен и $B_{\operatorname{Fix}(\mathscr{T}')} = B_X \cap \operatorname{Fix}(\mathscr{T}') \subseteq A$, замкнутый единичный шар $\operatorname{Fix}(\mathscr{T}')$ компактен.

Стало быть, $\dim(\mathrm{Fix}(\mathscr{T}')) < \infty$, и обе сети $\mathscr{T}'$ и $\mathscr{T}$ сильно сходятся к проектору конечного ранга.

Отметим, что компактность констриктора A сети $\mathscr{T}$ в теореме 4 нельзя заменить условием, что $A = K + \varepsilon B_X$, где K компактен и $0 \le \varepsilon < 1$. В качестве примера можно взять LR-сеть чезаровских средних оператора T_1 из [9, пример 1.3.8] на банаховом пространстве c_0 исчезающих последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Emel'yanov E. Yu., Erkursun N.* Generalization of Eberlein's and Sine's ergodic theorems to LR-nets // Владикавказск. мат. журн. 2007. Т. 9, № 3. С. 22–26.

2. *Lotz H. P.* Tauberian theorems for operators on L^∞ and similar spaces // Functional analysis: surveys and recent results, III (Paderborn, 1983). Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 117–133. (Math. Stud.; V. 90).

3. *Räbiger F.* Stability and ergodicity of dominated semigroups. II. The strong case // Math. Ann. 1993. V. 297. P. 103–116.

4. *Eberlein W. F.* Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. P. 217–240.

5. *Krengel U.* Ergodic theorems/ Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (De Gruyter Stud. Math.; V. 6).

6. *Emel'yanov E. Yu., Zaharopol R.* Convergence of Lotz–Räbiger nets of operators on spaces of continuous functions // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 2010. V. 55, N 1. P. 1–26.

7. *Sine R.* A mean ergodic theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. P. 438–439.

8. *Emel'yanov E. Yu., Wolff M. P. H.* Positive operators on Banach spaces ordered by strongly normal cones // Positivity. 2003. V. 7, N 1–2. P. 3–22.

9. *Emel'yanov E. Yu.* Non-spectral asymptotic analysis of one-parameter operator semigroups. Basel: Birkhäuser, 2007. (Operator theory: advances and applications; V. 173).

10. *Arendt W., Batty C. J. K.* Domination and ergodicity for positive semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114. P. 743–747.

11. *Emel'yanov E. Yu., Kohler U., Räbiger F., Wolff M. P. H.* Stability and almost periodicity of asymptotically dominated semigroups of positive operators. // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 2633–2642.

12. *Lasota A., Li T. Y., Yorke J. A.* Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 286. P. 751–764.

13. *Lasota A., Mackey M. C.* Chaos, fractals, and noise. Stochastic aspects of dynamics. New York: Springer-Verl., 1994. (Appl. Math. Sci.; V. 97).

Статья поступила 10 июля 2009 г.

Емельянов Эдуард Юрьевич
Department of Mathematics
Middle East Technical University
Ankara 06531 Turkey
eduard@metu.edu.tr