

## О ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ В ПОЛОСЕ

В. И. Лотов

**Аннотация.** Получены асимптотические представления для тройного преобразования над совместным распределением времени пребывания случайного блуждания в полосе (а также в полуплоскости) за  $n$  шагов и положения в момент  $n$  при условии неограниченного удаления границ этих множеств. На распределение скачков блуждания накладываются условия крамеровского типа.

**Ключевые слова:** случайное блуждание, время пребывания в полосе, факторизационные тождества, производящие функции, асимптотический анализ.

### 1. Постановка задачи. Основной результат

Пусть  $\{X_n, n \geq 1\}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $n \geq 1$ . Для произвольного борелевского множества  $D \subset \mathbb{R}$  положим

$$T_n = T_n(D) = \sum_{k=1}^n I_{\{S_k \in D\}},$$

где  $I_A(\omega) = 1$ , если  $\omega \in A$ , и  $I_A(\omega) = 0$  в противном случае. Таким образом,  $T_n$  есть время пребывания случайного блуждания в множестве  $D$  на интервале времени  $[1, \dots, n]$ , т. е. число точек  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , таких, что  $S_k \in D$ .

Мы будем полагать везде  $D = [-a, b]$ , где  $-a \leq b$ . При этом будем говорить о *двуграничной задаче*, если оба числа  $a$  и  $b$  конечны. Если же  $a = \infty$ ,  $b < \infty$  или  $a < \infty$ ,  $b = \infty$ , то будем говорить об *однуграничной задаче*.

Конечная цель исследований здесь состоит в нахождении вероятностей  $\mathbf{P}(T_n = k)$  и изучении их поведения при больших  $n$ , в том числе для случая, когда множество  $D$  само зависит от  $n$ . Здесь существуют разные подходы. Для простейших блужданий частного вида применимы комбинаторные методы [1, 2]. Наибольшее число публикаций относится к случаю  $D = (0, \infty)$  и связанному с ним закону арксинуса (см., например, [3, 4]). Хорошо известны предельные теоремы о времени пребывания, основанные на использовании сходимости распределений функционалов от траекторий случайного блуждания к распределению соответствующих функционалов от предельных процессов. Весьма подробная библиография и результаты этого направления исследований содержатся в [5, 6].

Разумеется, изучение времени пребывания по своему типу относится к граничным задачам для случайных блужданий, т. е. к нахождению вероятностей,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-12131).

связанных с взаимным расположением траекторий случайного блуждания, и границы некоторого множества. Известно, что для многих граничных задач наиболее глубокие результаты, в том числе полные асимптотические разложения вероятностей, получаются с использованием аппарата факторизационных тождеств (см. [7–9] и библиографию в них). По этой причине вполне естественным представляется желание применить к изучению распределения времени пребывания технику факторизационных исследований, достаточно хорошо разработанную к настоящему времени, и получить на этом пути новые результаты. Определенные шаги в этом направлении уже предпринимались в работах [10–12].

Факторизационный метод обычно состоит из нескольких этапов. На первом из них находятся факторизационные тождества для двойных или тройных преобразований над распределением исследуемого граничного функционала. Как правило, в общем случае они не приводят к выражениям, пригодным для дальнейшего их обращения. По этой причине на втором этапе в рамках той или иной схемы асимптотического анализа (например, при неограниченном удалении границы рассматриваемого множества) выделяется главная часть полученных на первом этапе преобразований и оценивается погрешность такого приближения; в широких условиях она оказывается пренебрежимо малой. Этот этап наиболее сложен. Здесь в полной мере требуется использовать весьма тонкие свойства компонент факторизации. На третьем этапе производится обращение главных частей преобразований, как правило, асимптотическое. Это может осуществляться с помощью контурного интегрирования с применением метода перевала [7, 9], или прямыми вычислениями [8].

Заметим, что для блужданий, скачки которых удовлетворяют условию Крамера, детальное исследование аналитических свойств компонент факторизации проведено в [7]. На результатах этой работы базируются теперь многие исследования в граничных задачах.

Упомянутые работы [10–12] относятся к первому этапу изучения распределения времени пребывания — нахождению факторизационных представлений для кратных производящих функций. В них применяется весьма сложная техника матричной факторизации, для которой перспектива дальнейшего обращения полученных представлений выглядит мало продуктивной. Замечания по этому поводу содержатся в [13]. По-прежнему актуальным представляется исследование времени пребывания в терминах компонент обычной одномерной (и хорошо изученной) факторизации.

Первый этап этой работы выполнен в [13], где в терминах обычной факторизации найдены тождества для тройных преобразований над совместным распределением пары  $(T_n, S_n)$  в однограничной и двуграничной задачах. Эти тождества дают явные выражения для тройных преобразований в однограничных задачах, однако в случае двух границ искомые преобразования входят в тождества неявно. В обоих случаях результаты формулируются в терминах специального вида проекционных операторов над компонентами факторизации, вычисление которых нетрудно произвести, если распределение  $X_1$  обладает экспоненциальной плотностью на одной из полуосей в однограничной задаче или же на обеих полуосях в двуграничной задаче. Для случайных блужданий с произвольным распределением скачков полученные тождества не дают компактных выражений производящих функций, пригодных для дальнейшего их обращения. Поэтому в данной работе производится асимптотический анализ

полученных в [13] факторизационных представлений при условии, что  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ , с целью выделения более просто устроенных главных частей.

Тем самым настоящая работа является продолжением [13] и соответствует второму этапу исследований. Основными результатами этой статьи являются асимптотические представления для тройных преобразований над совместным распределением пары  $(T_n, S_n)$  в однограничной и двуграничной задачах и, как следствие, для производящих функций над распределением  $T_n$  (теорема 1). Они состоят в выделении сравнительно просто устроенных главных частей и оценивании остатков, которые оказываются экспоненциально малыми по сравнению с главными частями. Дополнительно на распределение  $X_1$  накладываются условия крамеровского типа.

Как правило, асимптотическое поведение коэффициентов степенного ряда определяется поведением суммы этого ряда в окрестности единицы. Как показывают асимптотические исследования распределения момента первого выхода случайного блуждания из полуплоскости или из полосы [7, 8], даже для получения полных асимптотических разложений вероятностей в условиях Крамера достаточно знать поведение соответствующей производящей функции в окрестности единицы; на оставшейся части единичной окружности модуль производящей функции отличается экспоненциально малым множителем. По этой причине ниже находится асимптотическое представление функции

$$\begin{aligned}
 f_{a,b}(z, u, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}(u^{T_n([-a,b])} e^{\lambda S_n}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n([-a,b]) = k, S_n \in dx)
 \end{aligned}$$

только вблизи единицы по переменным  $z$  и  $u$ .

Чтобы избежать длинных формулировок, приведем в этом разделе асимптотическое представление для  $f_{a,b}(z, u, 0)$ . Для этого нам потребуется ряд обозначений. Все они связаны с компонентами факторизации, определение которых также следует напомнить.

Введем сначала лестничные моменты  $\eta_{\pm}$  и лестничные высоты  $\chi_{\pm}$ :

$$\eta_- = \inf\{n \geq 1 : S_n < 0\}, \quad \eta_+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \quad \chi_{\pm} = S_{\eta_{\pm}}.$$

Здесь полагаем  $\eta_+ = \infty$ , если  $S_n \leq 0$  при всех  $n$ , и  $\eta_- = \infty$ , если все  $S_n \geq 0$ . На событиях  $\{\eta_{\pm} = \infty\}$  величины  $\chi_{\pm}$  будем считать неопределенными.

Пусть  $R_{\pm}(z, \lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_{\pm}} \exp\{\lambda \chi_{\pm}\}; \eta_{\pm} < \infty)$  при  $|z| \leq 1$ ,  $\text{Re } \lambda = 0$ . Эти функции являются компонентами известной факторизации (см., например, [14])

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_+(z, \lambda)R_-(z, \lambda)R_0(z), \tag{1}$$

где

$$R_0(z) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n = 0) \right\}.$$

Известно также, что при  $|z| < 1$ ,  $\text{Re } \lambda = 0$  справедливы представления

$$R_-(z, \lambda) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n < 0) \right\},$$

$$R_+(z, \lambda) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{E}(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0) \right\}.$$

Везде в дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия крамеровского типа.

A1. Распределение  $X_1$  содержит абсолютно непрерывную компоненту.

A2.  $|\varphi(\lambda)| < \infty$  при  $-\gamma \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ , где  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\beta + \gamma > 0$ ,  $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ .

Значения чисел  $\gamma$  и  $\beta$  будут ниже каждый раз уточняться.

Если  $\mu_1 = \mathbf{E}X_1 = 0$  и  $\gamma > 0$ ,  $\beta > 0$ , то, как следует из условия A2, при некотором  $\delta_1 > 0$  функция  $1 - z\varphi(\lambda)$  имеет ровно два вещественных нуля  $\lambda_{\pm}(z)$ ,  $z \in [1 - \delta_1, 1]$ ,  $\lambda_-(z) \leq 0 \leq \lambda_+(z)$ . Функции  $\lambda_{\pm}(z)$  могут быть аналитически продолжены в некоторую  $\delta$ -окрестность отрезка  $[1 - \delta_1, 1]$  с разрезом по лучу  $z \geq 1$ . При этом  $\lambda_{\pm}(z)$  по-прежнему остаются нулями функции  $1 - z\varphi(\lambda)$ . Если же  $\mu_1 \geq 0$  и  $\beta > 0$ , то при таких же  $z$  гарантируется только существование нуля  $\lambda_+(z) \geq 0$ . Этот нуль будет также существовать при условии  $\mu_1 < 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\varphi(\beta) > 1$ . Аналогично нуль  $\lambda_-(z)$  всегда существует, если  $\mu_1 \leq 0$  и  $\gamma > 0$ , а также при  $\mu_1 > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\varphi(\gamma) > 1$ . При выполнении условия A2 факторизация (1) справедлива в области  $-\gamma \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \beta$ . Функции  $\lambda_{\pm}(z)$  в случае их существования являются также нулями компонент факторизации:  $R_{\pm}(z, \lambda_{\pm}(z)) = 0$ . Эти и ряд других используемых в дальнейшем сведений подробно изложены в [7]. Положим  $\lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}(1)$ . Тогда, очевидно,  $\lambda_{\pm} = 0$  при  $\mu_1 = 0$ ;  $\lambda_- = 0$ ,  $\lambda_+ > 0$  при  $\mu_1 < 0$  и  $\lambda_- < 0$ ,  $\lambda_+ = 0$  при  $\mu_1 > 0$ .

Все последующие утверждения, использующие функции  $\lambda_{\pm}(s)$ ,  $\lambda_{\pm}(z)$ , распространяются только на те ситуации, когда эти функции существуют в соответствии с условием A2 и сделанными выше замечаниями.

Обозначим

$$\begin{aligned} V(z, s, \lambda) &= \frac{R_+(s, \lambda)R_+(z, \lambda_+(s))}{(\lambda - \lambda_+(s))R'_+(s, \lambda_+(s))R_+(z, \lambda)}, \\ U(z, s, \lambda) &= \frac{R_-(s, \lambda)R_-(z, \lambda_-(s))}{(\lambda - \lambda_-(s))R'_-(s, \lambda_-(s))R_-(z, \lambda)}, \\ H_1(z, s) &= U(z, s, \lambda_+(s)), \quad H_2(z, s) = V(z, s, \lambda_-(s)), \\ H(z, s) &= H_1(z, s)H_2(z, s), \quad \mu(s) = e^{\lambda_-(s) - \lambda_+(s)}, \end{aligned} \quad (2)$$

и пусть  $L_{\delta} = \{s : |s| < 1, |s - 1| < \delta\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и выполнены условия A1, A2, в которых  $\gamma > 0$  и  $\beta > 0$ . Тогда существуют  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что при  $z \in L_{\delta}$ ,  $s = zu \in L_{\delta}$  имеет место представление

$$\begin{aligned} (1 - s)(1 + f_{a,b}(z, u, 0)) &= 1 - U(z, s, 0) \frac{1 - H_2(z, s)\mu^b(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{\lambda_-(s)a} \\ &\quad - V(z, s, 0) \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{-\lambda_+(s)b} + (u - 1)\Delta(z, s), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $|\Delta(z, s)| \leq C_1 e^{-\varepsilon a} + C_2 e^{-\varepsilon b}$  при  $|z| < |s|$ .

Здесь и далее буквами  $C, C_1, C_2, \dots$  обозначаются константы; одна и та же буква может соответствовать различным константам в разных выражениях.

**ЗАМЕЧАНИЯ.** 1. Отметим, что значения  $a = \infty$  или  $b = \infty$  в (3) не исключаются. Учитывая тот факт, что при  $s \in L_{\delta}$  для малых  $\delta$  имеет место  $|\mu(s)| < 1$ ,

$\operatorname{Re} \lambda_-(s) < 0, \operatorname{Re} \lambda_+(s) > 0$ , получаем из (3) соответствующие представления для однограничных задач. Например,

$$(1-s)(1+f_{\infty,b}(z,u,0)) = 1 - V(z,s,0)e^{-\lambda_+(s)b} + (u-1)\Delta(z,s),$$

где  $|\Delta(z,s)| \leq Ce^{-\varepsilon b}$  при  $|z| < |s|$ .

2. Как показано ниже, участвующие в (3) функции

$$\left| \frac{1 - H_2(z,s)\mu^b(s)}{1 - H(z,s)\mu^{b+a}(s)} \right|, \quad \left| \frac{1 - H_1(z,s)\mu^a(s)}{1 - H(z,s)\mu^{b+a}(s)} \right|$$

отделены от 0 равномерно по  $a$  и  $b$ , а также имеет место сходимость  $\lambda_{\pm}(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 1$ . По этой причине остаточный член  $\Delta(z,s)$  в (3) с ростом  $a$  и  $b$  убывает экспоненциально быстро по сравнению с главной частью.

3. Представление (3) сильно упрощается, если предположить, что распределение  $X_1$  обладает плотностью вида

$$f(t) = \begin{cases} c_1 e^{-\alpha_1 t}, & t > 0, \\ c_2 e^{\alpha_2 t}, & t \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\alpha_i > 0, c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_2$ . В этом случае  $\Delta(z,s) \equiv 0$ ,

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda(c_2 - c_1) - \alpha_1 \alpha_2}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)}$$

(эта функция существует в полосе  $-\alpha_2 < \operatorname{Re} \lambda < \alpha_1$ ) и

$$1-z\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \lambda(\alpha_1 - \alpha_2 + z(c_2 - c_1)) + \alpha_1 \alpha_2(z - 1)}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)} = \frac{(\lambda - \lambda_+(z))(\lambda - \lambda_-(z))}{(\lambda - \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)}.$$

В силу известных свойств единственности факторизации (1) можно положить

$$R_+(z,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(z)}{\lambda - \alpha_1}, \quad R_-(z,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(z)}{\lambda + \alpha_2}, \quad (5)$$

и простой подсчет приводит к формулам

$$H_1(z,s) = \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{\lambda_+(s) - \lambda_-(z)}, \quad H_2(z,s) = \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda_-(s) - \lambda_+(z)}, \quad (6)$$

$$V(z,s,0) = \frac{\lambda_+(z) - \lambda_+(s)}{\lambda_+(z)}, \quad U(z,s,0) = \frac{\lambda_-(z) - \lambda_-(s)}{\lambda_-(z)}. \quad (7)$$

## 2. Предварительные результаты

Полученные в [13] результаты являются отправной точкой наших исследований, поэтому мы приведем их формулировки.

Пусть  $D = [-a, b]$ . Введем функции

$$Q_0(z,u,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{[-a,b]} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

$$Q_1(z,u,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{(-\infty,-a)} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

$$Q_2(z, u, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \int_{(b, \infty)} e^{\lambda x} \mathbf{P}(T_n = k, S_n \in dx),$$

где  $|z| < 1$ ,  $|uz| < 1$  и  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . В [13] установлено, что

$$u(Q_1(z, u, \lambda) + Q_2(z, u, \lambda))(1 - z\varphi(\lambda)) + (1 + Q_0(z, u, \lambda))(1 - zu\varphi(\lambda)) = 1. \quad (8)$$

Перепишем (8) в виде

$$\begin{aligned} 1 + Q_1(z, u, \lambda) + Q_2(z, u, \lambda) + Q_0(z, u, \lambda) \\ = \frac{1}{1 - zu\varphi(\lambda)} (1 + (1 - u)(Q_1(z, u, \lambda) + Q_2(z, u, \lambda))). \end{aligned}$$

Очевидно, левая часть этого равенства равна  $1 + f_{a,b}(z, u, \lambda)$ , т. е.

$$1 + f_{a,b}(z, u, \lambda) = \frac{1}{1 - zu\varphi(\lambda)} (1 + (1 - u)(Q_1(z, u, \lambda) + Q_2(z, u, \lambda))). \quad (9)$$

Итак, для нахождения функции  $f_{a,b}(z, u, \lambda)$  достаточно знать функции  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ . Уравнение (8) решалось в [13] методом типа Винера — Хопфа, в результате чего найдены представления функций  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ , через компоненты факторизации функций  $1 - z\varphi(\lambda)$ ,  $1 - zu\varphi(\lambda)$ . Для формулировки этого результата введем дополнительные обозначения.

Для всякой функции  $g$  вида

$$g(z, s, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG_{z,s}(x), \quad \text{где} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG_{z,s}(x)| < \infty,$$

определим операторы  $L_{\pm}$ , которые действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} (L_+g)(z, s, \lambda) &= \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} g(z, s, \lambda) \right]^{(b, \infty)}, \\ (L_-g)(z, s, \lambda) &= \frac{R_-(s, \lambda)}{R_-(z, \lambda)} \left[ \frac{R_-(z, \lambda)}{R_-(s, \lambda)} g(z, s, \lambda) \right]^{(-\infty, -a)}. \end{aligned}$$

Здесь используется обозначение

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG(x) \right]^A = \int_A e^{\lambda x} dG(x).$$

Введенные таким образом операторы сами зависят от  $z$  и  $s$ , однако для краткости записи мы не отражаем этот факт в обозначениях операторов.

Обозначим  $s = zu$ ,  $q_i(z, s, \lambda) \equiv Q_i(z, s/z, \lambda)$ ,  $h(z, s, \lambda) \equiv z(s - z)^{-1}$ . В [13] получена

**Теорема 2.** Пусть  $D = [-a, b]$ ,  $-a \leq 0 \leq b$ . Тогда при  $|z| < 1$ ,  $|s| < 1$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} q_1(z, s, \lambda) &= (L_-h)(z, s, \lambda) - (L_-L_+h)(z, s, \lambda) + (L_-L_+q_1)(z, s, \lambda), \\ q_2(z, s, \lambda) &= (L_+h)(z, s, \lambda) - (L_+L_-h)(z, s, \lambda) + (L_+L_-q_2)(z, s, \lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

**Следствие 1.** Для  $D = [-a, \infty)$ ,  $-a \leq 0$ , имеем

$$q_1(z, s, \lambda) = (L_-h)(z, s, \lambda) \tag{11}$$

и аналогично для  $D = (-\infty, b]$ ,  $b \geq 0$ , —

$$q_2(z, s, \lambda) = (L_+h)(z, s, \lambda). \tag{12}$$

Несмотря на то, что формулы (10) задают итерационные процессы для нахождения функций  $q_i$ , они приводят к достаточно простым явным выражениям для  $q_i$  лишь в частных ситуациях, когда, к примеру, компоненты факторизации являются дробно-линейными функциями (см. [13], а также теорему 4 ниже). Однако для распределений  $X_1$  более общего вида простых выражений для  $q_i$  найти не удастся, поэтому для целей дальнейшего обращения производящих функций приходится довольствоваться их асимптотическими представлениями, которые будут получены ниже. Если предположить, что  $a \rightarrow \infty$  и  $b \rightarrow \infty$ , то в условиях Крамера (см. ниже) выражения вида  $(L_{\pm}g)(z, s, \lambda)$  в окрестности единицы по переменным  $z$  и  $s$  можно приблизить более простыми, отделив при этом экспоненциально малые погрешности такого приближения. Подставив полученные приближения в (10), придем к асимптотическим представлениям для функций  $q_1, q_2$ , а затем и для  $f_{a,b}(z, u, \lambda)$ . Это все будет сделано в следующих разделах.

Как показывают формулы (10), в них произошел переход от переменных  $z$  и  $u$  к переменным  $z$  и  $s$ . Это обстоятельство в ряде случаев делает полезным переход от двойного преобразования над  $T_n(D)$  к преобразованию над  $T_n(\bar{D})$ , поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}u^{T_n(D)} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{E}u^{n-T_n(\bar{D})} = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}v^{T_n(\bar{D})}, \tag{13}$$

где  $s = zu, v = u^{-1}$ .

### 3. Асимптотический анализ операторов $L_{\pm}$

Обозначим через  $\Pi$  множество функций  $g$ , имеющих вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \|g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty.$$

Для произвольного  $t \in \mathbb{R}$ , следуя [8], введем множества

$$\Pi(t) = \{g(\lambda) : g(\lambda + t) \in \Pi\},$$

$$\Pi_-(t) = \left\{ g \in \Pi(t) : g(\lambda) = \int_{(-\infty, 0]} e^{\lambda y} dG(y), \operatorname{Re} \lambda = t \right\},$$

$$\Pi_+(t) = \left\{ g \in \Pi(t) : g(\lambda) = \int_{[0, \infty)} e^{\lambda y} dG(y), \operatorname{Re} \lambda = t \right\}$$

и для  $g \in \Pi(t)$  и  $g \in \Pi_{\pm}(t)$  положим  $\|g\|_t = \int e^{ty} |dG(y)|$  с очевидными соглашениями относительно области интегрирования. В формулировках нижеследующих лемм 1–3 переменные  $z$  и  $s$  можно считать независимыми.

Сначала нам потребуется лемма 1 из [8] и следующее ее видоизменение.

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия A1, A2. Тогда найдутся  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что при

$$s \in L_\delta = \{s : |s| < 1, |s - 1| < \delta\}, \quad |z| \leq 1,$$

существует хотя бы одна из функций  $\lambda_\pm(s)$  и справедливы представления

$$\frac{R_\pm(z, \lambda)}{R_\pm(s, \lambda)} = \frac{R_\pm(z, \lambda_\pm(s))}{(\lambda - \lambda_\pm(s))R'_\pm(s, \lambda_\pm(s))} + \psi_\pm(z, s, \lambda),$$

в которых производная берется по переменной  $\lambda$ ,  $\psi_\pm(z, s, \lambda) \in \Pi_\pm(\lambda_\pm \pm \varepsilon)$ , причем нормы этих функций  $\|\psi_\pm(z, s, \cdot)\|_{\lambda_\pm \pm \varepsilon}$  ограничены равномерно по  $s \in L_\delta$  и  $|z| \leq 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$w_+(s, \lambda) = \frac{R_+(s, \lambda)(\lambda + \gamma + 1)}{\lambda - \lambda_+(s)}, \quad w_-(s, \lambda) = \frac{R_-(s, \lambda)(\lambda - \beta - 1)}{\lambda - \lambda_-(s)}.$$

Известно [8], что при некоторых  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  выполняется

$$w_+^{\pm 1}(s, \lambda) \in \Pi_+(\lambda_+ \pm \varepsilon), \quad w_-^{\pm 1}(s, \lambda) \in \Pi_-(\lambda_- \pm \varepsilon), \quad s \in L_\delta,$$

причем нормы этих функций ограничены равномерно по  $s \in L_\delta$ . Выделяя особенность в точке  $\lambda = \lambda_+(s)$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} &= \frac{R_+(z, \lambda)(\lambda + \gamma + 1)}{(\lambda - \lambda_+(s))w_+(s, \lambda)} \\ &= \frac{R_+(z, \lambda_+(s))(\lambda + \gamma + 1)}{(\lambda - \lambda_+(s))w_+(s, \lambda)} + \frac{(R_+(z, \lambda) - R_+(z, \lambda_+(s)))(\lambda + \gamma + 1)}{(\lambda - \lambda_+(s))w_+(s, \lambda)}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\psi_+^{(1)}(z, s, \lambda) \equiv \frac{(R_+(z, \lambda) - R_+(z, \lambda_+(s)))(\lambda + \gamma + 1)}{(\lambda - \lambda_+(s))w_+(s, \lambda)} \in \Pi_+(\lambda_+ + \varepsilon).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + \gamma + 1}{(\lambda - \lambda_+(s))w_+(s, \lambda)} &= w_+^{-1}(s, \lambda) \\ &+ \frac{\lambda_+(s) + \gamma + 1}{\lambda - \lambda_+(s)} \left[ w_+^{-1}(s, \lambda_+(s)) + (\lambda - \lambda_+(s)) \frac{w_+^{-1}(s, \lambda) - w_+^{-1}(s, \lambda_+(s))}{\lambda - \lambda_+(s)} \right] \\ &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(s))R'_+(s, \lambda_+(s))} + w_+^{-1}(s, \lambda) + (\lambda_+(s) + \gamma + 1) \frac{w_+^{-1}(s, \lambda) - w_+^{-1}(s, \lambda_+(s))}{\lambda - \lambda_+(s)} \\ &\equiv \frac{1}{(\lambda - \lambda_+(s))R'_+(s, \lambda_+(s))} + \psi_+^{(2)}(s, \lambda), \end{aligned}$$

где  $\psi_+^{(2)}(s, \lambda) \in \Pi_+(\lambda_+ + \varepsilon)$  наряду с  $w_+^{-1}(s, \lambda)$  (см. [7]). Остается положить

$$\psi_+(z, s, \lambda) = \psi_+^{(1)}(z, s, \lambda) + R_+(z, \lambda_+(s))\psi_+^{(2)}(s, \lambda).$$

Утверждение для  $R_-(z, \lambda)R_-^{-1}(s, \lambda)$  доказывается аналогично. Лемма доказана.

В дальнейшем число  $\varepsilon > 0$  выбирается в соответствии с утверждением этой леммы. Заметим также, что из определения функции  $\psi_+(z, s, \lambda)$  вытекает равенство  $\psi_+(s, s, \lambda) \equiv 1$ . По этой причине функцию  $\psi_+(z, s, \lambda)$  можно представить в виде

$$\psi_+(sv, s, \lambda) = 1 + (v - 1)\psi_+^{(0)}(sv, s, \lambda), \quad z = sv,$$

с теми же свойствами аналитичности по  $\lambda$  у  $\psi_+^{(0)}(z, s, \lambda)$ , что и  $\psi_+(z, s, \lambda)$ . Точно так же обстоит дело и с функцией  $\psi_-(z, s, \lambda)$ . Этим мы будем пользоваться в доказательствах следующих двух лемм.



**Лемма 2.** Пусть выполнены условия A1, A2, при этом предполагается, что  $\beta > 0$  и  $\varphi(\beta) > 1$ , если  $\mathbf{E}X_1 < 0$ . Тогда для всякой функции  $g(\lambda) = \int_{(-\infty, 0]} e^{\lambda y} dG(y) \in \Pi_-(0)$  существует  $\delta > 0$  такое, что при  $|z| < 1$ ,  $s \in L_\delta$ ,  $\text{Re } \lambda \leq$

$\lambda_+$  имеет место представление

$$(L_+g)(z, s, \lambda) = V(z, s, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}g(\lambda_+(s)) + \frac{(z - s)R_+(s, \lambda)}{sR_+(z, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{z,s}(y),$$

где  $V(z, s, \lambda)$  из (2) и для любых  $x \geq 0$

$$\int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} |d\varphi_{z,s}(y)| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)(b+x)} \|g\|_\tau, \quad \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon,$$

$$\left| \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} d\varphi_{z,s}(y) \right| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \text{Re } \tau)(b+x)} |g(\tau)|, \quad \text{Re } \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon.$$

**Доказательство.** Воспользуемся утверждением леммы 1 и замечанием, сделанным после ее доказательства. При  $s \in L_\delta$  имеет место неравенство  $\text{Re } \lambda_+(s) > \lambda_+$ , тем самым при  $\text{Re } \lambda \leq \lambda_+$  получаем

$$\left[ \frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(s)} \right]^{[b, \infty)} = - \int_b^\infty e^{\lambda y} \int_{(-\infty, 0]} e^{-\lambda_+(s)(y-t)} dG(t) dy$$

$$= -g(\lambda_+(s)) \int_b^\infty e^{(\lambda - \lambda_+(s))y} dy = \frac{g(\lambda_+(s))e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}}{\lambda - \lambda_+(s)}.$$

Поэтому

$$(L_+g)(z, s, \lambda) = \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left[ \left( \frac{R_+(z, \lambda_+(s))}{(\lambda - \lambda_+(s))R'_+(s, \lambda_+(s))} + 1 \right) + (z - s)s^{-1}\psi_+^{(0)}(z, s, \lambda) \right] g(\lambda) \Big]^{(b, \infty)}$$

$$= V(z, s, \lambda)e^{(\lambda - \lambda_+(s))b}g(\lambda_+(s)) + \frac{(z - s)R_+(s, \lambda)}{sR_+(z, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d_y \int_{(-\infty, 0]} \Psi_{z,s}(y - t) dG(t),$$

где функция  $\Psi_{z,s}$  удовлетворяет соотношению

$$\psi_+^{(0)}(z, s, \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} d\Psi_{z,s}(y), \quad \text{Re } \lambda \leq \lambda_+ + \varepsilon.$$

Положим

$$\varphi_{z,s}(y) = \int_{(-\infty, 0]} \Psi_{z,s}(y - t) dG(t).$$

В силу свойств функции  $\psi_+(z, s, \lambda)$ , установленных в лемме 1, при  $\tau \leq \lambda_+ + \varepsilon$  равномерно по  $s$  и  $z$  выполняется (см. лемму 2 из [7])

$$\left| \int_v^\infty e^{\tau y} d\Psi_{z,s}(y) \right| \leq \int_v^\infty e^{\tau y} |d\Psi_{z,s}(y)|$$

$$= \int_v^\infty e^{(\lambda_+ + \varepsilon)y - (\lambda_+ + \varepsilon - \tau)y} |d\Psi_{z,s}(y)| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)v}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} |d\varphi_{z,s}(y)| &\leq \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} d_y \int_{(-\infty, 0]} |\Psi_{z,s}(y-t)| |dG(t)| \\ &= \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau u} |d\Psi_{z,s}(u)| \int_{(-\infty, 0]} e^{\tau t} |dG(t)| \leq C e^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)(b+x)} \|g\|_\tau, \end{aligned}$$

а также при  $\operatorname{Re} \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \left| \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} d\varphi_{z,s}(y) \right| &= \left| \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau u} d\Psi_{z,s}(u) \int_{(-\infty, 0]} e^{\tau t} dG(t) \right| \\ &\leq C e^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \operatorname{Re} \tau)(b+x)} |g(\tau)|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия А1, А2, при этом предполагается, что  $\gamma > 0$  и  $\varphi(\gamma) > 1$ , если  $\mathbf{E}X_1 > 0$ . Тогда для любой функции  $g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} dG(y) \in \Pi_+(0)$  существует  $\delta > 0$  такое, что при  $|z| < 1$ ,  $s \in L_\delta$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_-$  имеет место представление

$$(L_-g)(z, s, \lambda) = U(z, s, \lambda) e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a} g(\lambda_-(s)) + \frac{(z-s)R_-(s, \lambda)}{sR_-(z, \lambda)} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_{z,s}(y),$$

в котором  $U(z, s, \lambda)$  из (2) и для любых  $x \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y} |d\theta_{z,s}(y)| \leq C e^{(\lambda_- - \varepsilon - \tau)(a+x)} \|g\|_\tau, \quad \tau \geq \lambda_- - \varepsilon,$$

$$\left| \int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y} d\theta_{z,s}(y) \right| \leq C e^{(\lambda_- - \varepsilon - \operatorname{Re} \tau)(a+x)} |g(\tau)|, \quad \operatorname{Re} \tau \geq \lambda_- - \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Главные части полученных асимптотических представлений и характер оценок остатков не изменятся, если брать  $[b, \infty)$  вместо  $(b, \infty)$  в определении оператора  $L_+$  и  $(-\infty, -a]$  вместо  $(-\infty, -a)$  в определении  $L_-$ .

2. Простые вычисления показывают, что остаточный член в лемме 2 отсутствует, если  $\mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha_1 t}$ ,  $t > 0$ . Точно так же при условии  $\mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha_2 t}$ ,  $t < 0$ , в лемме 3 имеет место  $\theta_{z,s}(y) \equiv 0$ .

#### 4. Асимптотические представления производящих функций в однограничных задачах

Займемся теперь нахождением с помощью полученных лемм асимптотических представлений для функций  $f_{a,b}(z, u, \lambda)$  в однограничных задачах.

Пусть  $a = \infty$ ,  $0 \leq b < \infty$ ,  $e(z, s, \lambda) \equiv 1$ . Применяя (12) и лемму 2, при  $|z| < 1$  получаем

$$\begin{aligned} (s-z)z^{-1}q_2(z, s, \lambda) &= (L_+e)(z, s, \lambda) = \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left[ \frac{R_+(z, \lambda)}{R_+(s, \lambda)} \right]^{(b, \infty)} \\ &= V(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} + \frac{(z-s)R_+(s, \lambda)}{sR_+(z, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{z,s}^{(1)}(y), \end{aligned} \quad (14)$$

где при  $x \geq 0$  равномерно по  $z$  и  $s \in L_\delta$

$$\int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} |d\varphi_{z,s}^{(1)}(y)| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)(b+x)}, \quad \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon. \quad (15)$$

Аналогичным образом с помощью (11) и леммы 3 при  $b = \infty$ ,  $|z| < 1$  имеем

$$\begin{aligned} (s-z)z^{-1}q_1(z, s, \lambda) &= (L_-e)(z, s, \lambda) = \frac{R_-(s, \lambda)}{R_-(z, \lambda)} \left[ \frac{R_-(z, \lambda)}{R_-(s, \lambda)} \right]^{(-\infty, -a)} \\ &= U(z, s, \lambda)e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a} + \frac{(z-s)R_-(s, \lambda)}{sR_-(z, \lambda)} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_{z,s}^{(1)}(y), \end{aligned} \quad (16)$$

где равномерно по  $s \in L_\delta$  при  $x \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y} |d\theta_{z,s}^{(1)}(y)| \leq Ce^{(\lambda_- - \varepsilon - \tau)(a+x)}, \quad \lambda_- - \varepsilon \leq \tau. \quad (17)$$

Подставляя полученные представления (14) и (16) в (9) и переходя к переменной  $v = u^{-1}$  в соответствии с (13), получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и выполнены условия A1, A2. Тогда существуют  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что при  $|sv| < 1$ ,  $s \in L_\delta$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  имеют место представления:

1) если  $\beta > 0$  и, кроме того,  $\varphi(\beta) > 1$  при  $\mathbf{E}X_1 < 0$ , то

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n((b, \infty))} e^{\lambda S_n}) &= \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \\ &\times \left\{ 1 - V(sv, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} - \frac{(v-1)R_+(s, \lambda)}{R_+(sv, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{sv,s}^{(1)}(y) \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\int_{(b, \infty)} |d\varphi_{sv,s}^{(1)}(y)| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon)b}$  равномерно по множеству  $|sv| < 1$ ,  $s \in L_\delta$ ,

2) если  $\gamma > 0$  и  $\varphi(\gamma) > 1$  при  $\mathbf{E}X_1 > 0$ , то

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n((-\infty, -a))} e^{\lambda S_n}) &= \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \\ &\times \left\{ 1 - U(sv, s, \lambda)e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a} - \frac{(v-1)R_-(s, \lambda)}{R_-(sv, \lambda)} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_{sv,s}^{(1)}(y) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\int_{-\infty}^{-a} |d\theta_{sv,s}^{(1)}(y)| \leq Ce^{(\lambda_- - \varepsilon)a}$  равномерно по множеству  $|sv| < 1$ ,  $s \in L_\delta$ .

**Следствие 2.** Пусть  $a \leq 0$  и выполнено условие  $\mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha t}$ ,  $t < 0$ . Тогда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n((-\infty, -a))} e^{\lambda S_n}) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left( 1 - \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(sv)}{\lambda - \lambda_-(sv)} e^{(\lambda_-(s) - \lambda)a} \right).$$

Если  $b \geq 0$  и выполнено условие  $\mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha t}$ ,  $t > 0$ , то

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}(v^{T_n((b, \infty))} e^{\lambda S_n}) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left( 1 - \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(sv)}{\lambda - \lambda_+(sv)} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \right).$$

Это утверждение следует из замечания 2 разд. 3 и простого вида компонент факторизации (см. [13]):

$$R_-(s, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_-(s)}{\lambda + \alpha}, \quad \text{если } \mathbf{P}(X_1 < t) = ce^{\alpha t}, \quad t < 0,$$

$$R_+(s, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda_+(s)}{\lambda - \alpha}, \quad \text{если } \mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

Пусть для краткости  $T_n = T_n((b, \infty))$ . Из (18) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-s} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}v^{T_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n (1 - \mathbf{E}v^{T_n}) \\ &= \frac{V(sv, s, 0)e^{-\lambda_+(s)b}}{(1-s)} + \frac{(v-1)R_+(s, 0)}{(1-s)R_+(sv, 0)} \int_{(b, \infty)} d\varphi_{sv, s}^{(1)}(y). \quad (20) \end{aligned}$$

Далее,

$$\mathbf{E}v^{T_n} = 1 + (v-1)\mathbf{E}T_n + \frac{(v-1)^2}{2}\mathbf{E}T_n(T_n-1) + \dots$$

Обозначим

$$v(s) = -\frac{R_+(s, 0)}{\lambda_+(s)R'_+(s, \lambda_+(s))}, \quad Z(s, v) = \frac{R_+(sv, \lambda_+(s))}{R_+(sv, 0)}.$$

Здесь  $V(sv, s, 0) = v(s)Z(s, v)$ . Функция  $Z(s, v)$  аналитична по переменной  $v$  в окрестности единицы при  $s \in L_\delta$ ,  $Z(s, 1) = 0$ , поэтому

$$\frac{R_+(sv, \lambda_+(s))}{R_+(sv, 0)} = (v-1)A(s) + \dots, \quad A(s) = \left. \frac{\partial Z(s, v)}{\partial v} \right|_{v=1}.$$

Таким образом, из (20) при  $v = 1$  выводим следующее представление.

**Следствие 3.** В условиях теоремы 3 найдется число  $\delta > 0$  такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbf{E}T_n((b, \infty)) = \frac{v(s)e^{-\lambda_+(s)b}A(s)}{s-1} + \frac{1}{s-1} \int_{(b, \infty)} d\varphi_{s, s}^{(1)}(y), \quad s \in L_\delta.$$

Аналогичное утверждение легко формулируется и для  $\mathbf{E}T_n((-\infty, -a))$ .

### 5. Асимптотика производящих функций в двуграничной задаче

Здесь мы рассматриваем ситуацию, когда  $D = [-a, b]$ ,  $a \geq 0, b \geq 0$ . Предполагается, что выполнены одновременно условия лемм 2 и 3, что обеспечивает существование двух нулей  $\lambda_{\pm}(s)$  при  $s \in L_{\delta}$ . Изложение построено следующим образом. Сначала находятся асимптотические представления для оставшихся слагаемых в правых частях (10) (асимптотика первых слагаемых  $(L_{\pm}h)(z, s, \lambda)$  уже найдена выше). Подстановка этих представлений в (10) и последующий достаточно сложный анализ полученных выражений приводят к асимптотическим представлениям для функции  $q_2(z, s, \lambda)$  (теорема 5) и функции  $q_1(z, s, \lambda)$  (теорема 6). Для нахождения асимптотического представления функции  $f_{a,b}(z, u, \lambda)$  остается подставить полученные выражения для  $q_i(z, s, \lambda)$  в (9). Получается тем самым достаточно громоздкое выражение, которое в целях экономии места не выписывается, а приводится только более компактное выражение для  $f_{a,b}(z, u, 0)$ , что и завершает доказательство теоремы 1 в самом конце этой работы.

Итак, в соответствии с леммой 3 находим

$$(L_-q_2)(z, s, \lambda) = U(z, s, \lambda)e^{(\lambda-(s)-\lambda)^a}q_2(z, s, \lambda_-(s)) + \frac{(z-s)R_-(s, \lambda)}{sR_-(z, \lambda)} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_{z,s}^{(2)}(y), \quad (21)$$

где равномерно по  $|z| < 1, s \in L_{\delta}$  при  $x \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y} |d\theta_{z,s}^{(2)}(y)| \leq Ce^{(\lambda-\varepsilon-\tau)(a+x)} \|q_2(z, s, \cdot)\|_{\tau}, \quad \lambda_- - \varepsilon \leq \tau, \\ \left| \int_{-\infty}^{-a-x} e^{\tau y} d\theta_{z,s}^{(2)}(y) \right| \leq Ce^{(\lambda_- - \varepsilon - \operatorname{Re} \tau)(a+x)} |q_2(z, s, \tau)|, \quad \lambda_- - \varepsilon \leq \operatorname{Re} \tau. \quad (22)$$

Применив лемму 2 и (16), получаем (напомним, что  $\mu(s) = e^{\lambda-(s)-\lambda_+(s)}$ )

$$(L_+L_-h)(z, s, \lambda) = V(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} \left\{ \frac{zU(z, s, \lambda_+(s))\mu^a(s)}{(s-z)} - \frac{zR_-(s, \lambda_+(s))}{sR_-(z, \lambda_+(s))} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(1)}(y) \right\} + \frac{(z-s)R_+(s, \lambda)}{sR_+(z, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{z,s}^{(2)}(y), \quad (23)$$

где при  $x \geq 0$  равномерно по  $s \in L_{\delta}$  и  $|z| < 1$

$$\int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} |d\varphi_{z,s}^{(2)}(y)| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)(b+x)} \|(L_-h)(z, s, \cdot)\|_{\tau}, \quad \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon, \\ \left| \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} d\varphi_{z,s}^{(2)}(y) \right| \leq Ce^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \operatorname{Re} \tau)(b+x)} |(L_-h)(z, s, \tau)|, \quad \operatorname{Re} \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon.$$

Используя лемму 2 и (21), находим

$$(L_+L_-q_2)(z, s, \lambda) = V(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b} \times \left\{ U(z, s, \lambda_+(s))q_2(z, s, \lambda_-(s))\mu^a(s) + \frac{(z-s)R_-(s, \lambda_+(s))}{sR_-(z, \lambda_+(s))} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(2)}(y) \right\} + \frac{(z-s)R_+(s, \lambda)}{sR_+(z, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{z,s}^{(3)}(y); \quad (24)$$

здесь равномерно по  $|z| < 1$ ,  $s \in L_\delta$  при  $x \geq 0$

$$\int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} |d\varphi_{z,s}^{(3)}(y)| \leq C e^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \tau)(b+x)} \|(L_-q_2)(z, s, \cdot)\|_\tau, \quad \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon,$$

$$\left| \int_{(b+x, \infty)} e^{\tau y} d\varphi_{z,s}^{(3)}(y) \right| \leq C e^{-(\lambda_+ + \varepsilon - \operatorname{Re} \tau)(b+x)} |(L_-q_2)(z, s, \tau)|, \quad \operatorname{Re} \tau \leq \lambda_+ + \varepsilon.$$

Подставляя выражения (14), (23) и (24) в (10) и используя вновь обозначения (2), получим

$$q_2(z, s, \lambda) = \frac{zV(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)} \quad (25)$$

$$\times \left\{ 1 - H_1(z, s)\mu^a(s) \left( 1 - \frac{s-z}{z} q_2(z, s, \lambda_-(s)) \right) + \frac{s-z}{z} \Delta_1(z, s) \right\} + \Delta_2(z, s, \lambda),$$

где

$$\Delta_1(z, s) = \frac{R_-(s, \lambda_+(s))}{R_-(z, \lambda_+(s))} \left( \frac{z}{s} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(1)}(y) + \frac{z-s}{s} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(2)}(y) \right), \quad (26)$$

$$\Delta_2(z, s, \lambda) = \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \left( \frac{z-s}{s} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d(\varphi_{z,s}^{(3)}(y) - \varphi_{z,s}^{(2)}(y)) - \frac{z}{s} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{z,s}^{(1)}(y) \right).$$

Для нахождения  $q_2(z, s, \lambda_-(s))$  положим  $\lambda = \lambda_-(s)$  в (25). Используя обозначения (2) для функций  $H$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ , получим

$$q_2(z, s, \lambda_-(s))(1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)) = z(s-z)^{-1}H_2(z, s)\mu^b(s) \left( 1 - H_1(z, s)\mu^a(s) + \frac{s-z}{z} \Delta_1(z, s) \right) + \Delta_2(z, s, \lambda_-(s)),$$

$$1 - (s-z)z^{-1}q_2(z, s, \lambda_-(s)) = 1 - \frac{H_2(z, s)\mu^b(s)(1 - H_1(z, s)\mu^a(s) + \frac{s-z}{z} \Delta_1(z, s)) + \frac{s-z}{z} \Delta_2(z, s, \lambda_-(s))}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} = \frac{1 - H_2(z, s)\mu^b(s)(1 + \frac{s-z}{z} \Delta_1(z, s)) + \frac{s-z}{z} \Delta_2(z, s, \lambda_-(s))}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned}
 q_2(z, s, \lambda) &= \frac{zV(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)} \\
 &\times \left\{ 1 - H_1(z, s)\mu^a(s) \frac{1 - H_2(z, s)\mu^b(s) \left(1 + \frac{s-z}{z}\Delta_1(z, s)\right) + \frac{s-z}{z}\Delta_2(z, s, \lambda_-(s))}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} \right. \\
 &+ \left. \frac{s-z}{z}\Delta_1(z, s) \right\} + \Delta_2(z, s, \lambda) = \frac{zV(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)} \left\{ \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} \right. \\
 &+ \left. \frac{(s-z)(H(z, s)\mu^{b+a}(s)\Delta_1(z, s) - H_1(z, s)\mu^a(s)\Delta_2(z, s, \lambda_-(s)))}{z(1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s))} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{s-z}{z}\Delta_1(z, s) \right\} + \Delta_2(z, s, \lambda) \\
 &= \frac{zV(z, s, \lambda)e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)} \left\{ \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} + \Delta_3(z, s) \right\} + \Delta_2(z, s, \lambda),
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_3(z, s) = \frac{s-z}{z} \frac{\Delta_1(z, s) - \Delta_2(z, s, \lambda_-(s))H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)}.$$

Вспоминая, что в условиях (4) остаточные члены в утверждениях лемм 2 и 3 отсутствуют, приходим к выводу, что в этом частном случае обращаются в нуль величины  $\Delta_1(z, s)$  и  $\Delta_2(z, s, \lambda)$ . Используя (5)–(7), получаем следующее выражение:

$$q_2(z, s, \lambda) = \frac{z(\lambda_+(s) - \alpha_1)(\lambda_+(s) + \alpha_2)}{s(\lambda - \lambda_+(z))(\lambda_+(s) - \lambda_-(z))} \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}.$$

Правую часть можно упростить в силу того, что

$$\frac{(\lambda_+(s) - \lambda_+(z))(\lambda_+(s) - \lambda_-(z))}{(\lambda_+(s) - \alpha_1)(\lambda_+(s) + \alpha_2)} = 1 - z\varphi(\lambda_+(s)) = 1 - \frac{z}{s}.$$

Аналогичным путем вычисляется и  $q_1(z, s, \lambda)$  для этой ситуации. В итоге получаем следующее утверждение (см. также [13]).

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие (4). Тогда при  $a \geq 0, b \geq 0$

$$\begin{aligned}
 q_1(z, s, \lambda) &= \frac{z(\lambda_-(s) - \lambda_-(z))}{(s-z)(\lambda - \lambda_-(z))} \frac{1 - H_2(z, s)\mu^b(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}, \\
 q_2(z, s, \lambda) &= \frac{z(\lambda_+(s) - \lambda_+(z))}{(s-z)(\lambda - \lambda_+(z))} \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}.
 \end{aligned}$$

Выражения для  $q_i(z, s, \lambda)$  легко обращаются по  $\lambda$ .

**Следствие 4.** В условиях теоремы 4 для любого  $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n u^k \mathbf{P}(T_n = k, S_n \geq b+x) \\
 = \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{(1-u)\lambda_+(z)} \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{-\lambda_+(s)b - \lambda_+(z)x}, \quad s = zu.
 \end{aligned}$$

Далее можно воспользоваться тождеством (9) и использовать в вычислениях тот факт, что  $\lambda_+(s)\lambda_-(s) = \alpha_1\alpha_2(s-1)$  (это следует из теоремы Виета). В итоге получаем

**Следствие 5.** В условиях теоремы 4

$$1 + f_{a,b}(z, u, \lambda) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left\{ 1 - \frac{\lambda_+(s) - \lambda_+(z)}{\lambda - \lambda_+(z)} \frac{1 - H_1(z, s)\mu^a(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{(\lambda - \lambda_+(s))b} \right\} \\ - \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} \left\{ \frac{\lambda_-(s) - \lambda_-(z)}{\lambda - \lambda_-(z)} \frac{1 - H_2(z, s)\mu^b(s)}{1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)} e^{(\lambda_-(s) - \lambda)a} \right\}, \quad s = zu.$$

Теперь займемся оцениванием остаточных членов  $\Delta_i$  в общем случае. Это будет делаться в предположении, что  $\mathbf{E} X_1 = 0$ . В этом случае  $\lambda_{\pm} = 0$  и в окрестности единицы, разрезанной по лучу  $z \geq 1$ , имеют место разложения (корень квадратный везде понимается в смысле главного значения)

$$\lambda_{\pm}(z) = \pm\psi_1(1 - z)^{1/2} + \psi_2(1 - z) + \dots$$

(см. [7]), где  $\psi_1 = \sqrt{2/\sigma^2}$ ,  $\psi_2 = \mu_3/(3\sigma^4)$ ,  $\mu_k = \mathbf{E} X_1^k$ ,  $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$ .

Далее везде предполагаем, что  $z \in L_{\delta}$  наряду с  $s \in L_{\delta}$  при малом  $\delta > 0$  и, кроме того,  $|z| < |s|$ .

Оценим сначала  $\Delta_1(z, s)$ . Заметим, что

$$\left| \frac{R_-(s, \lambda_+(s))}{R_-(z, \lambda_+(s))} \right| \leq \left| \frac{R_-(s, \lambda_+(s))}{\lambda_+(s) - \lambda_-(s)} \right| \left| \frac{\lambda_+(s) - \lambda_-(z)}{R_-(z, \lambda_+(s))} \right| \left| \frac{\lambda_+(s) - \lambda_-(s)}{\lambda_+(s) - \lambda_-(z)} \right| \\ \leq \frac{C|1 - s|^{1/2}}{|(1 - s)^{1/2} + (1 - z)^{1/2}|} \leq C_1.$$

Поэтому

$$|\Delta_1(z, s)| \leq C_1 \left| \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(1)}(y) \right| + C_2 \left| \frac{z - s}{s} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(2)}(y) \right|.$$

При малых  $\delta$  имеем  $0 < \operatorname{Re} \lambda_+(s) < \varepsilon/2$ , поэтому в силу (17) и (22) получаем

$$\left| \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(1)}(y) \right| \leq C e^{-(\varepsilon - \operatorname{Re} \lambda_+(s))a} \leq C e^{-\varepsilon a/2}, \quad (27)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(s)y} d\theta_{z,s}^{(2)}(y) \right| \leq C e^{-\varepsilon a/2} |q_2(z, s, \lambda_+(s))|. \quad (28)$$

Функция  $q_2(z, s, \lambda)$  определена при  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  и аналитична в области  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Выразив функцию  $Q_2$  из (8), получим

$$q_2(z, s, \lambda) = Q_2(z, u, \lambda) = \frac{1 - (1 + Q_0(z, u, \lambda))(1 - zu\varphi(\lambda))}{u(1 - z\varphi(\lambda))} - Q_1(z, u, \lambda), \quad (29)$$

откуда видно, что  $q_2(z, s, \lambda)$  аналитически продолжается в область  $\operatorname{Re} \lambda < \operatorname{Re} \lambda_+(z)$ . При  $|z| < |s|$  будет выполняться  $\operatorname{Re} \lambda_+(s) < \operatorname{Re} \lambda_+(z)$ , что оправдывает использование величины  $q_2(z, s, \lambda_+(s))$  в правой части (28).

Полагая  $\lambda = \lambda_{\pm}(s)$  в (29), для  $|z| < |s|$  получим

$$q_2(z, s, \lambda_{\pm}(s)) + q_1(z, s, \lambda_{\pm}(s)) = \frac{z}{s - z}. \quad (30)$$

Это соотношение представляет самостоятельный интерес, по своей форме оно напоминает одно из известных тождеств Вальда.



Пусть далее  $\tilde{q}_2(z, s, \lambda)$  совпадает с  $q_2(z, s, \lambda)$  при  $a = \infty$ . Тогда, очевидно,

$$\tilde{q}_2(z, s, \lambda_{\pm}(s)) = \frac{z}{s - z}$$

и для вещественных  $z \in (1 - \delta, 1)$  и  $s \in (z, 1)$

$$\left| \frac{s - z}{z} q_2(z, s, \lambda_{\pm}(s)) \right| \leq \left| \frac{s - z}{z} \tilde{q}_2(z, s, \lambda_{\pm}(s)) \right| = 1.$$

Следовательно, при  $z \in L_{\delta}$ ,  $s \in L_{\delta}$ ,  $|z| < |s|$ , где  $\delta$  достаточно мало, будет иметь место оценка

$$|(s - z)q_2(z, s, \lambda_{\pm}(s))| \leq 2. \quad (31)$$

Этот же результат можно получить, пользуясь найденными выше представлениями для  $(L_+h)(z, s, \lambda_+(s))$ ,  $(L_+L_-h)(z, s, \lambda_+(s))$ ,  $(L_+L_-q_2)(z, s, \lambda_+(s))$ .

Вместе с (27) и (28) все это приводит для таких  $z$  и  $s$  к оценке

$$|\Delta_1(z, s)| \leq Ce^{-\varepsilon a/2}.$$

Оценим далее величину

$$\Delta_2(z, s, \lambda_-(s)) = \frac{R_+(s, \lambda_-(s))}{R_+(z, \lambda_-(s))} \left( \frac{z - s}{s} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda_-(s)y} d(\varphi_{z,s}^{(3)}(y) - \varphi_{z,s}^{(2)}(y)) - \frac{z}{s} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda_-(s)y} d\varphi_{z,s}^{(1)}(y) \right).$$

Как и выше, устанавливаем, что

$$\left| \frac{R_+(s, \lambda_-(s))}{R_+(z, \lambda_-(s))} \right| \leq C,$$

и в силу (15)

$$\left| \int_{(b, \infty)} e^{\lambda_-(s)y} d\varphi_{z,s}^{(1)}(y) \right| \leq Ce^{-(\varepsilon - \operatorname{Re} \lambda_-(s))b} \leq Ce^{-\varepsilon b}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \left| \int_{(b, \infty)} e^{\lambda_-(s)y} d(\varphi_{z,s}^{(3)}(y) - \varphi_{z,s}^{(2)}(y)) \right| &\leq \left| \int_{(b, \infty)} e^{\lambda_-(s)y} d\varphi_{z,s}^{(2)}(y) \right| \\ &+ \left| \int_{(b, \infty)} e^{\lambda_-(s)y} d\varphi_{z,s}^{(3)}(y) \right| \leq e^{-(\varepsilon - \operatorname{Re} \lambda_-(s))b} (|(L_-h)(z, s, \lambda_-(s))| \\ &+ |(L_-q_2)(z, s, \lambda_-(s))|) \leq e^{-\varepsilon b} (|(L_-h)(z, s, \lambda_-(s))| + |(L_-q_2)(z, s, \lambda_-(s))|). \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями

$$(L_-h)(z, s, \lambda_-(s)) = \frac{z}{s - z}, \quad (L_-q_2)(z, s, \lambda_-(s)) = q_2(z, s, \lambda_-(s)),$$

которые сразу же следуют из (16) и (21) (первое из них также следует из (29) при  $b = \infty$ , второе — из сопоставления (10) и (30)). Учитывая (31), получаем в итоге

$$|\Delta_2(z, s, \lambda_-(s))| \leq Ce^{-\varepsilon b} (1 + |(s - z)q_2(z, s, \lambda_-(s))|) \leq C_1 e^{-\varepsilon b}.$$

Наконец, покажем, что

$$\frac{1}{|1 - H(z, s)\mu^{b+a}(s)|} \leq C < \infty \quad (32)$$

при  $s \in L_\delta, z \in L_\delta, |z| < |s|$ . Напомним (см. (2)), что

$$H(z, s) = a_-(s)a_+(s) \frac{R_-(z, \lambda_-(s))}{R_-(z, \lambda_+(s))} \frac{R_+(z, \lambda_+(s))}{R_+(z, \lambda_-(s))},$$

где

$$a_-(s) = \frac{R_-(s, \lambda_+(s))}{(\lambda_+(s) - \lambda_-(s))R'_-(s, \lambda_-(s))}, \quad a_+(s) = \frac{R_+(s, \lambda_-(s))}{(\lambda_-(s) - \lambda_+(s))R'_+(s, \lambda_+(s))}.$$

Очевидно,  $|\mu(s)| \leq 1$ ,  $a_-(s)a_+(s) = 1 + O(\sqrt{1-s})$ ,  $s \rightarrow 1$ . Далее, величина  $\frac{R_-(z, \lambda_-(s))}{R_-(z, \lambda_+(s))} \frac{R_+(z, \lambda_+(s))}{R_+(z, \lambda_-(s))}$  обращается в нуль при  $s = z$ , следовательно, она не превосходит по модулю  $1/2$  при достаточно близких  $s$  и  $z$ . Отсюда следует (32).

Остаточный член  $\Delta_2(z, s, \lambda)$  имеет вид

$$\Delta_2(z, s, \lambda) = \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \int_b^\infty e^{\lambda y} d\varphi_{z,s}(y).$$

Покажем, что  $|\Delta_2(z, s, 0)| \leq Ce^{-\varepsilon b}$ . Имеем

$$\left| \frac{R_+(s, 0)}{R_+(z, 0)} \right| = \left| \frac{-\lambda_+(s)R'_+(s, \lambda_+(s)) + \dots}{-\lambda_+(z)R'_+(z, \lambda_+(z)) + \dots} \right| = \left| \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{1-z}} \left( \frac{R'_+(s, \lambda_+(s))}{R'_+(z, \lambda_+(z))} + \dots \right) \right| \leq C.$$

В соответствии с (26)

$$\begin{aligned} \left| \int_b^\infty d\varphi_{z,s}(y) \right| &\leq \left| \frac{z}{s} \int_b^\infty d\varphi_{z,s}^{(1)}(y) \right| + \left| \frac{z-s}{s} \int_b^\infty (d\varphi_{z,s}^{(2)}(y) + d\varphi_{z,s}^{(3)}(y)) \right| \\ &\leq C_1 e^{-\varepsilon b} + C_2 |s-z| e^{-\varepsilon b} (|(L-h)(z, s, 0)| + |(L-q_2)(z, s, 0)|). \end{aligned}$$

В силу (16) и (21) имеем

$$\begin{aligned} |(s-z)(L-h)(z, s, 0)| \\ \leq \left| \frac{a_-(s)e^{\lambda_-(s)a} R_-(z, \lambda_-(s))}{R_-(z, 0)} \right| + \left| \frac{(z-s)R_-(s, 0)}{sR_-(z, 0)} \int_{-\infty}^{-a} d\theta_{z,s}^{(1)}(y) \right| \leq C, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_-(z, \lambda_-(s))}{R_-(z, 0)} \right| &= \left| \frac{(\lambda_-(s) - \lambda_-(z))R'_-(z, \lambda_-(z)) + \dots}{-\lambda_-(z)R'_-(z, \lambda_-(z)) + \dots} \right| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{1-s} - \sqrt{1-z})R'_-(z, \lambda_-(z)) + \dots}{\sqrt{1-z}R'_-(z, \lambda_-(z)) + \dots} \right| \leq C, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} |(s-z)(L-q_2)(z, s, 0)| &\leq \left| \frac{a_-(s)e^{\lambda_-(s)a} R_-(z, \lambda_-(s))(s-z)q_2(z, \lambda_-(s))}{R_-(z, 0)} \right| \\ &+ \left| \frac{(s-z)^2 R_-(s, 0)}{sR_-(z, 0)} \int_{-\infty}^{-a} d\theta_{z,s}^{(2)}(y) \right| \leq C_1 + C_2 e^{-\varepsilon a} |(s-z)^2 q_2(z, s, 0)|. \end{aligned}$$

Пусть, как и выше,  $\tilde{q}_2(z, s, 0)$  совпадает с  $q_2(z, s, 0)$  при  $a = \infty$ . Тогда для вещественных  $z \in (1 - \delta, 1)$  и  $s \in (z, 1)$

$$\left| \frac{s-z}{z} q_2(z, s, 0) \right| \leq \left| \frac{s-z}{z} \tilde{q}_2(z, s, 0) \right| \leq \left| \frac{s-z}{z} \tilde{q}_2(z, s, \lambda_+(s)) \right| \leq \frac{1}{|z|}.$$

Следовательно, при  $z \in L_\delta$ ,  $s \in L_\delta$ ,  $|z| < |s|$ , где  $\delta$  достаточно мало, будет иметь место оценка

$$|(s-z)q_2(z, s, 0)| \leq 2.$$

Тем самым доказано следующее утверждение. Перед его формулировкой напомним, что величины  $V(z, s, \lambda)$ ,  $U(z, s, \lambda)$ ,  $H(z, s)$ ,  $H_i(z, s)$ ,  $\mu(s)$  введены ранее перед формулировкой теоремы 1, функции  $q_i(z, s, \lambda)$  — перед формулировкой теоремы 2.

**Теорема 5.** Пусть  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и выполнены условия A1, A2, в которых  $\gamma > 0$  и  $\beta > 0$ . Тогда существуют  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что при  $z \in L_\delta$ ,  $s \in L_\delta$  и  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  имеет место представление

$$q_2(z, s, \lambda) = \frac{zV(z, s, \lambda) e^{(\lambda-\lambda_+(s))b}}{(s-z)} \left( \frac{1-H_1(z, s)\mu^a(s)}{1-H(z, s)\mu^{b+a}(s)} + (s-z)\varepsilon_1(z, s) \right) + \Delta(z, s, \lambda),$$

в котором  $|\varepsilon_1(z, s)| \leq C_1 e^{-\varepsilon a} + C_2 e^{-\varepsilon b}$  при  $|z| < |s|$  и функция  $\Delta(z, s, \lambda)$  имеет вид

$$\Delta(z, s, \lambda) = \frac{R_+(s, \lambda)}{R_+(z, \lambda)} \int_{(b, \infty)} e^{\lambda y} d\varphi_{z, s}(y), \quad |\Delta(z, s, 0)| \leq C e^{-\varepsilon b}.$$

Симметричными рассуждениями может быть получена следующая

**Теорема 6.** Пусть  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  и выполнены условия A1, A2, в которых  $\gamma > 0$  и  $\beta > 0$ . Тогда существуют  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что при  $z \in L_\delta$ ,  $s \in L_\delta$  и  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  имеет место представление

$$q_1(z, s, \lambda) = \frac{zU(z, s, \lambda) e^{(\lambda_-(s)-\lambda)a}}{(s-z)} \left( \frac{1-H_2(z, s)\mu^b(s)}{1-H(z, s)\mu^{b+a}(s)} + (s-z)\varepsilon_2(z, s) \right) + \tilde{\Delta}(z, s, \lambda),$$

в котором  $|\varepsilon_2(z, s)| \leq C_1 e^{-\varepsilon a} + C_2 e^{-\varepsilon b}$  при  $|z| < |s|$  и функция  $\tilde{\Delta}(z, s, \lambda)$  имеет вид

$$\tilde{\Delta}(z, s, \lambda) = \frac{R_-(s, \lambda)}{R_-(z, \lambda)} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_{z, s}(y), \quad |\tilde{\Delta}(z, s, 0)| \leq C e^{-\varepsilon a}.$$

Напомним, что ранее мы установили соотношение (см. (9))

$$1 + f_{a,b}(z, u, \lambda) = \frac{1}{1 - s\varphi(\lambda)} (1 + (1-u)(q_1(z, s, \lambda) + q_2(z, s, \lambda))).$$

Подставляя в правую часть этого тождества полученные в теоремах 5 и 6 асимптотические представления функций  $q_1$  и  $q_2$ , приходим к соответствующему представлению и для  $f_{a,b}(z, u, \lambda)$ . Следствие этого утверждения, которое получается при  $\lambda = 0$ , приведено в начале статьи (теорема 1).

Автор благодарен рецензенту, конструктивные замечания которого способствовали улучшению работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chung K. L., Hunt G. A. On the zeros of  $\sum_1^n \pm 1$  // Ann. Math. 1949. V. 50, N 2. P. 385–400.
2. Takacs L. On a generalization of the arc-sine law // Ann. Appl. Probab. 1996. V. 6, N 3. P. 1035–1041.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
4. Спичер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
5. Скороход А. В., Слободенюк Н. П. Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наук. Думка, 1970.
6. Бородин А. Н., Ибрагимов И. А. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 195. С. 3–286.
7. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
8. Лотов В. И. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1095–1108.
9. Лотов В. И. Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. 2 // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 4. С. 873–879.
10. Семенов А. Т. Асимптотические разложения для распределения времени пребывания случайного блуждания в отрезке // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 4. С. 918–930.
11. Лугавов В. С., Рогозин Б. А. Факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 389–406.
12. Лугавов В. С. О компонентах факторизационного представления для времени пребывания полунепрерывных случайных блужданий в полосе // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 800–809.
13. Лотов В. И. Факторизационные тождества для времени пребывания случайного блуждания в полосе // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 146–155.
14. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

*Статья поступила 1 июля 2009 г.*

Лотов Владимир Иванович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090  
lotov@math.nsc.ru