Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И ФОРМУЛА СЛЕДА ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

Н. М. Асланова

Аннотация. Исследована асимптотика функции распределения и вычислен регуляризованный след краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения с граничным условием, зависящим от спектрального параметра.

Ключевые слова: гильбертово пространство, ядерный оператор, дискретный спектр, резольвента, регуляризованный след.

Введение. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — норма в нем.

Пусть также $\mathbf{L}_2 = L_2(H,(0,1)) \oplus H$. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2$ задается как

$$(Y,Z)_{\mathbf{L}_2} = \int\limits_0^1 (y(t),z(t))\,dt + (y_1,z_1),$$

где $Y=\{y(t),y_1\}$, $Z=\{z(t),z_1\}$; $y(t)$, $z(t)\in L_2(H,(0,1))$; $y_1,z_1\in H$.

В пространстве $L_2(H,(0,1))$ рассмотрим задачу

$$l[y] \equiv -y''(t) + \frac{\nu^2-\frac14}{t^2}y(t) + Ay(t) + q(t)y = \lambda y(t), \quad \nu\ge 1, \tag{1}$$

$$y'(1) - \lambda y(1) = 0, \tag{2}$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор в H (можно считать, что $A>E$, E — единичный оператор в H), являющийся обратным для вполне непрерывного.

Предположим также, что операторная функция $q(t)$ слабо измерима, $\|q(t)\|$ как функция от t ограничена на $[0,1]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $q(t)$ имеет вторую слабую производную на $[0,1]$ и $q^{(l)}(t)$ $(l=0,1,2)$ при каждом $t\in[0,1]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H, т. е. $q^{(l)}(t)\in\sigma_1$, $[q^{(l)}(t)]^* = q^{(l)}(t)$;

2) функции $\|q^{(l)}(t)\|_1$ $(l=0,1,2)$ ограничены на отрезке $[0,1]$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в σ_1);

3) $\int\limits_0^1 (q(t)f,f)\,dt = 0$ при любом $f\in H$.

При $q(t)\equiv 0$ с задачей (1), (2) в пространстве $\mathbf{L}_2$ можно связать самосопряженный оператор L_0 с областью определения

$$D(L_0) = \{Y\in\mathbf{L}_2 \mid l[y]\in L_2(H,(0,1)) \ \text{ и } \ y_1 = y(1)\},$$

действующий как $L_0(Y) = \{l[y], y'(1)\}$. Легко проверить, что так определенный оператор самосопряженный и для $Y = \{y(t), y(1)\} \in D(L_0)$ выполняется $y(0) = y'(0) = 0$.

При $q(t) \not\equiv 0$ соответствующий оператор обозначим через L: $L = L_0 + Q$, где $Q : Q\{y(t), y(1)\} = \{q(t)y(t), 0\}$ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathbf{L}_2$.

Цель настоящей работы — установить дискретность спектра задачи (1), (2), изучить асимптотическое распределение собственных значений, зная асимптотику собственных чисел оператора A, и получить формулу регуляризованного следа оператора L.

Отметим, что асимптотическое распределение собственных значений краевых задач для дифференциально-операторного уравнения Штурма — Лиувилля без особенностей на конечном отрезке и со спектральным параметром в граничных условиях изучено в работах [1–3].

В работах [4–13] исследованы спектр и регуляризованный след для различных операторов. Подробная библиография по этой теме имеется в [12].

1. Дискретность спектра. Сначала исследуем задачу (1), (2) при $q(t) \equiv 0$. Условия $A > E$ в H и $\nu \geq 1$ влекут положительную определенность оператора L_0 в $\mathbf{L}_2$. Действительно, для любого $Y \in D(L_0)$ имеем

$$(L_0 Y, Y)_{\mathbf{L}_2} = \int_0^1 \left(-y''(t) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} y(t) + (Ay(t), y(t)) \right) dt + (y'(1), y(1))$$

$$\geq \int_0^1 \|y'(t)\|^2 \, dt + \int_0^1 \|y(t)\|^2 \, dt.$$

Поскольку вложение $W_2^1(H; (0,1)) \subset C(H, [0,1])$ непрерывно, то (см. [14, с. 48; 15, теорема 1.7.7]) $\|y(1)\| \leq C \|y(t)\|_{W_2^1(H;(0,1))}$, где $C > 0$ — некоторая константа. Следовательно,

$$(L_0 Y, Y)_{\mathbf{L}_2} \geq C \left(\int_0^1 \|y(t)\|^2 \, dt + \|y(1)\|^2 \right) = C \|Y\|^2_{\mathbf{L}_2},$$

т. е. оператор L_0 положительно определен.

Пусть числа $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$ являются собственными значениями, а элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ — соответствующими им ортонормированными в H собственными векторами оператора A. Положим $y(t) \in D(A)$, $t \in [0,1]$, и $y_k(t) = (y(t), \varphi_k)$. Тогда

$$(y, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t)|^2, \quad \left(\left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} E + A \right) y, y \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} + \gamma_k \right) |y_k(t)|^2. \quad (1.1)$$

Теорема 1.1. *При условии вполне непрерывности A^{-1} в H оператор L_0 имеет дискретный спектр.*

Доказательство. Так как L_0 положительно определен, по теореме Реллиха для доказательства дискретности спектра достаточно показать компактность в L_2 множества векторов [16, с. 386].

$$\mathbf{Y} = \left\{ Y \in D(L_0) / (L_0 Y, Y) = \int_0^1 \left[(y'(t), y'(t)) + \left(\left(\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} E + A \right) y(t), y(t) \right) \right] dt \leq 1 \right\}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $R = R(\varepsilon)$, что*

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2\, dt + \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 < \varepsilon.$$

Доказательство. Из равенств (1.1) следует, что если $Y \in \mathbf{Y}$, то

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2\, dt = \frac{1}{\gamma_R}\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2 \gamma_R\, dt$$
$$\le \frac{1}{\gamma_R}\int_0^1 (Ay(t), y(t))\, dt \le \frac{1}{\gamma_R}(L_0 Y, Y) \le \frac{1}{\gamma_R}.$$

Так как $\gamma_R \to \infty$ при $R \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $R(\varepsilon)$, что $\frac{1}{\gamma_R} < \varepsilon^2(\sqrt{2}-1)^2$. Значит, при таком R выполняется неравенство

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2\, dt < \varepsilon^2(\sqrt{2}-1)^2. \tag{1.3}$$

С другой стороны, учитывая (1.2), имеем

$$\sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 = \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int_0^1 (y_k^2(t))'\, dt \right| = \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| \int_0^1 2y_k'(t) y_k(t)\, dt \right|$$
$$\le 2\left(\sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k'(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=R+1}^{\infty} \int_0^1 |y_k(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{2}{\sqrt{\gamma_R}} < 2\varepsilon(\sqrt{2}-1).$$

Из (1.3) и последнего неравенства получим

$$\int_0^1 \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(t)|^2\, dt + \sum_{k=R+1}^{\infty} |y_k(1)|^2 < \varepsilon(\sqrt{2}-1)^2 + 2\varepsilon(\sqrt{2}-1) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Пусть $Y \in \mathbf{Y}$. Через E_R обозначим множество всех вектор-функций $\widetilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_R\}$, где $\tilde{y}_k = \{y_k(t), y_k(1)\} \in L_2(0,1) \oplus C$. Из леммы 1.1 следует, что множество E_R есть ε-сеть в $\mathbf{L}_2$ для множества $\mathbf{Y}$. Поэтому для доказательства компактности множества $\mathbf{Y}$ надо доказать компактность в $\mathbf{L}_2$ множества E_R. Так как $|y_k(1)| \le 1 \quad (k = 1, \dots, R)$, для этого достаточно показать, что к $y_k(t)$ $(k = 1, \dots, R)$ применим критерий компактности в $L_2(0,1)$ [17, с. 291].

Нам следует показать, что функции $y_k(t)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в метрике $L_2(0,1)$. Согласно (1.2)

$$\int_0^1 |y_k(t)|^2\, dt = \int_0^1 \int_0^t |y_k'(\tau)|^2\, d\tau dt \le \int_0^1 |y_k'(\tau)|^2\, d\tau \le 1.$$

Это доказывает равномерную ограниченность функций $y_k(t)$. Для доказательства равномерной непрерывности заметим, что

$$|y_k(t+\eta) - y_k(t)| \le \int\limits_0^\eta |y_k'(t+\xi)|\, d\xi,$$

и продолжим $y_k(t)$ вне $(0,1)$ нулем.

Имеем

$$\int\limits_0^1 |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2\, dt = \int\limits_0^{1-\eta} |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2\, dt + \int\limits_{1-\eta}^1 |y_k(t)|^2\, dt, \tag{1.4}$$

$$\int\limits_{1-\eta}^1 |y_k(t)|^2\, dt = \int\limits_{1-\eta}^1 \left| \int\limits_0^t y_k'(\tau)\, d\tau \right|^2 dt \le \int\limits_{1-\eta}^1 \left| \int\limits_0^1 y_k'(\tau)\, d\tau \right|^2 dt \le \eta, \tag{1.5}$$

$$\int\limits_0^{1-\eta} |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2\, dt \le \int\limits_0^{1-\eta} \left(\int\limits_0^\eta |y_k'(\tau+t)|\, d\tau \right)^2 dt$$

$$\le \int\limits_0^{1-\eta} \eta \int\limits_0^\eta |y_k'(\tau+t)|^2\, d\tau\, dt \le \int\limits_0^{1-\eta} \eta \int\limits_0^1 |y_k'(\tau)|^2\, d\tau\, dt < \eta(1-\eta) < \eta. \tag{1.6}$$

Если $|\eta| < \varepsilon$, то, учитывая (1.5), (1.6) в (1.4), получим

$$\int\limits_0^1 |y_k(t+\eta) - y_k(t)|^2\, dt < 2\varepsilon,$$

что показывает равностепенную непрерывность множества E_R.

Этим завершается доказательство дискретности спектра L_0.

2. Асимптотическое распределение собственных значений оператора L_0. Предположим, что собственные числа оператора A таковы, что $\gamma_n \sim a \cdot n^\alpha$ $(n \to \infty,\ a > 0,\ \alpha > 0)$.

Учитывая спектральное разложение оператора A, для коэффициентов $y_k(t) = (y(t), \varphi_k)$ получаем следующую задачу:

$$-y_k''(t) + \frac{\nu^2 - \frac14}{t^2} y_k(t) = (\lambda - \gamma_k) y_k(t), \quad t \in (0,1), \tag{2.1}$$

$$y_k'(1) - \lambda y_k(1) = 0. \tag{2.2}$$

Решение задачи (2.1) из $L_2(0,1)$ имеет вид

$$y_k(t) = \sqrt{t} J_\nu(t\sqrt{\lambda - \gamma_k}).$$

Для того чтобы оно удовлетворяло (2.2), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac12 J_\nu(\sqrt{\lambda - \gamma_k}) + \sqrt{\lambda - \gamma_k} J_\nu'(\sqrt{\lambda - \gamma_k}) - \lambda J_\nu(\sqrt{\lambda - \gamma_k}) = 0 \tag{2.3}$$

хотя бы при одном γ_k $(\lambda \ne \gamma_k)$. Таким образом, спектр оператора L_0 состоит из тех вещественных $\lambda \ne \gamma_k$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют (2.3).

Обозначим $z = \sqrt{\lambda - \gamma_k}$. Тогда уравнение (2.3) приобретает вид

$$zJ'_\nu(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z) = 0 \tag{2.4}$$

и с учетом соотношения [18, с. 56]

$$zJ'_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z) - \nu J_\nu(z)$$

имеем

$$zJ_{\nu-1}(z) + (1/2 - \nu - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z) = 0. \tag{2.5}$$

Отыщем собственные значения оператора L_0, меньшие γ_k. Этим значениям соответствуют мнимые корни уравнения (2.5).

Беря $z = 2i\sqrt{y}$ и применяя равенство [18, с. 51]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} = \frac{J_\nu(2i\sqrt{y})}{(i\sqrt{y})^\nu},$$

запишем уравнение (2.5) в виде

$$2i\sqrt{y}(i\sqrt{y})^{\nu-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu)} + \left(4y - \gamma_k - \nu + \frac{1}{2}\right)(i\sqrt{y})^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} = 0,$$

или

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu)} + \left(4y - \gamma_k - \nu + \frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{(4n+2)(\nu+n) - \left(\gamma_k + \nu - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+n)(\nu+n)} = 0. \tag{2.6}$$

Так как $(4w+2)(\nu+w) - \left(\gamma_k + \nu - \frac{1}{2}\right) = 0$ в точках

$$w = -\frac{\nu + \frac{1}{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4} + \gamma_k}}{2},$$

коэффициенты при y в (2.6) становятся положительными при

$$n > \left[-\frac{\nu + \frac{1}{2}}{2} + \frac{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4} + \gamma_k}}{2}\right]. \tag{2.7}$$

Пусть N — число положительных нулей ряда (2.6), W — число перемен знака в последовательности его коэффициентов. Так как радиус сходимости этого ряда бесконечен, по правилу знаков Декарта [19, с. 52] $W - N$ представляет собой неотрицательное четное число. Согласно (2.7) в нашем случае $W = 1$, поэтому $N = 1$, т. е. начиная с некоторого k уравнение (2.6) имеет точно один положительный корень, которому соответствует мнимый корень уравнения (2.5).

Найдем асимптотику мнимых корней уравнения (2.5). Обозначая $z = iy$ и пользуясь асимптотикой $J_\nu(z)$ при больших по модулю мнимых z [20, с. 976]:

$$J_\nu(iy) = I_\nu(y)e^{\frac{\pi}{2}\nu i}, \quad I_\nu(y) \sim \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}\left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{2y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right),$$

получим $y \sim \frac{\nu^2-\frac{9}{4}}{4} + \sqrt{\gamma_k - \sqrt{\gamma_k}(\nu^2-\frac{1}{4})}$, откуда

$$\lambda_k \sim \frac{2\nu^2+\frac{7}{2}}{4}\sqrt{\gamma_k}.$$

Найдем асимптотику тех решений уравнения (2.3), которые больше γ_k, другими словами, вещественных корней уравнения (2.5).

Учитывая следующую асимптотику при больших $|z|$ [18, с. 222]:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{nz}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

получаем, что

$$\operatorname{ctg}\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{z}{\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k - \nu}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

откуда

$$z_{m,k} = \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi m + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

где m принимает большие целые значения.

Итак, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Собственные числа оператора L_0 распадаются на две серии:*

$$\lambda_k \sim \frac{2\nu^2+\frac{7}{2}}{4}\sqrt{\gamma_k}; \quad \lambda_{m,k} = \gamma_k + z_{m,k}^2 = \gamma_k + \alpha_m,$$

где $\alpha_m \sim \left(\pi m + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2$.

Обозначим мнимые корни (2.5) через $x_{0,k}$, а вещественные корни — через $x_{m,k}$.

Теперь докажем следующие две леммы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2.2. *Уравнение* (2.5) *имеет лишь вещественные и мнимые корни.*

Доказательство. Пусть α будет комплексным корнем функции $zJ'_\nu(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z)$, тогда $\alpha_0 = \bar{\alpha}$ также будет корнем этой функции, так как для $J_\nu(z)$ ряд

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\frac{z}{2})^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

имеет вещественные коэффициенты. Из уравнения Бесселя с $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \alpha_0$ следует, что [18, с. 531]

$$\int_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\alpha_0 t)\,dt = \frac{x}{\alpha^2-\alpha_0^2}\left(J_\nu(\alpha x)\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx} - J_\nu(\alpha_0 x)\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}\right),$$

и, таким образом, принимая во внимание, что $\alpha^2 \neq \alpha_0^2$, $J_\nu(\alpha t) = \overline{J_\nu(\alpha_0 t)}$, получаем

$$\int_0^1 t|J_\nu(\alpha t)|^2\,dt = \frac{1}{\alpha^2-\alpha_0^2}(J_\nu(\alpha)\alpha_0 J'_\nu(\alpha_0) - J_\nu(\alpha_0)\alpha J'_\nu(\alpha)).$$

Имея в виду, что $\alpha_0 J'_\nu(\alpha_0) = \left(\alpha_0^2 + \gamma_k - \frac{1}{2}\right) J_\nu(\alpha_0)$, $\alpha J'_\nu(\alpha) = \left(\alpha^2 + \gamma_k - \frac{1}{2}\right) J_\nu(\alpha)$, выводим

$$\int\limits_0^1 t|J_\nu(\alpha t)|^2\,dt = \frac{J_\nu(\alpha)J_\nu(\alpha_0)\left(\alpha_0^2 + \gamma_k - \frac{1}{2}\right) - J_\nu(\alpha_0)J_\nu(\alpha)\left(\alpha^2 + \gamma_k - \frac{1}{2}\right)}{\alpha^2 - \alpha_0^2}$$
$$= \frac{\left(\alpha_0^2 - \alpha^2\right)}{\alpha^2 - \alpha_0^2}|J_\nu(\alpha)|^2 = -|J_\nu(\alpha)|^2.$$

Подынтегральное выражение слева положительно, а справа получили отрицательное число; противоречие. Лемма доказана.

Пусть C — прямоугольный контур с вершинами

$$\pm iB, \quad \pm iB + m\pi + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{\pi}{4} = \pm iB + A_m,$$

где B — большое положительное число, который обходит начало координат и мнимый корень $-ix_{0,k}$ — по малой полуокружности справа от мнимой оси и $ix_{0,k}$ — слева.

Лемма 2.3. *Если m — достаточно большое целое число, то число корней функции $z^{-\nu}\left(zJ'_\nu(z) + \left(\frac{1}{z} - z^2 + \gamma_k\right)J_\nu(z)\right)$ между мнимой осью и линией $\operatorname{Re} z = m\pi + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ в точности равно m.*

Доказательство. Поскольку $z^{-\nu}\left[zJ'_\nu(z) + \left(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\right)J_\nu(z)\right]$ является целой функцией от z, число ее корней внутри C равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{\left[z^{-\nu}(zJ'_\nu(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z))\right]'}{z^{-\nu}(zJ'_\nu(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z))}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{\left[z^{-\nu}(-zJ_{\nu+1}(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k + \nu)J_\nu(z))\right]'}{z^{-\nu}(zJ'_\nu(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z))}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{-J_{\nu+1}(z)(1/2 - z^2 - \gamma_k + \nu) + 2\nu J_{\nu+1}(z) - 3zJ_\nu(z)}{-zJ_{\nu+1}(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k + \nu)J_\nu(z)}\,dz.$$

Здесь мы воспользовались тождествами [18, с. 55]

$$zJ'_\nu(z) = \nu J_\nu(z) - zJ_{\nu+1}(z), \quad zJ'_{\nu+1}(z) = zJ_\nu(z) - (\nu+1)J_{\nu+1}(z).$$

Поскольку подынтегральная функция нечетная, в окрестности нуля порядок числителя $O(z^{\nu+1})$, знаменателя — $O(z^\nu)$, интеграл вдоль левой части контура превращается в нуль.

Рассмотрим интегралы по оставшимся трем сторонам контура. Заметим сначала, что на этих сторонах [18, с. 88, 221]

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}\{1 + \eta_{1,\nu}(z)\},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}\{1 + \eta_{2,\nu}(z)\}, \quad J_\nu(z) = \frac{H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)}{2},$$

где $\eta_{1,\nu}(z)$, $\eta_{2,\nu}(z)$ будут порядка $O(1/z)$, когда $|z|$ велик;

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB}\frac{-J_{\nu+1}(z)(1/2-z^2-\gamma_k+\nu)+2\nu J_{\nu+1}(z)-3zJ_\nu(z)}{-zJ_{\nu+1}(z)+(1/2-z^2-\gamma_k+\nu)J_\nu(z)}\,dz$$
$$\sim\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{iB}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{iB}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1+\eta_{2,\nu+1}(z)}{1+\eta_{2,\nu}(z)}\right][1+O(e^{2iz})]\,dz\to\frac{m}{2}+\frac{\nu}{4}+\frac{1}{8}.$$

Аналогично интеграл по нижней стороне стремится к этой же величине.

Для вычисления интеграла вдоль четвертой стороны воспользуемся соотношением [18, с. 547]

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}-\operatorname{tg}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\nu+1}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

при большом $|z|$.

Так как $O(1/z)$ остается ограниченной на правой части контура, учитывая

$$\int\limits_{-iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dz=0,$$

получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right]dz$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}^{iB+m\pi+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\nu+1}{2z}+\operatorname{tg}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)dz\sim-\frac{1}{4}(2\nu+1)+O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Следовательно, предел интеграла по всему контуру равен $m+O\left(\frac{1}{m}\right)$, а поскольку интеграл должен быть целым числом, он равен m. Лемма доказана.

Через $N(\lambda, L_0)$ обозначим функцию распределения собственных значений оператора L_0:

$$N(\lambda,L_0)=\sum_{\lambda_j(L_0)<\lambda}1=N_1(\lambda)+N_2(\lambda),$$

где $N_1(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_k<\lambda}1$, $N_1(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_{n,k}<\lambda}1$. Поскольку $\gamma_k\sim a\cdot k^\alpha$, имеем

$$\lambda_k\sim\frac{2\nu^2+\frac{7}{2}}{4}\sqrt{a}k^{\frac{\alpha}{2}}=c_1k^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$N_1(\lambda) \sim \frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}} \lambda^{\frac{2}{\alpha}}. \tag{2.8}$$

Из асимптотики $x_{m,k}$ вытекает, что можно найти такое c, что при больших m

$$\pi m < x_{m,k} < \pi m + c.$$

Учитывая это неравенство и лемму 2.3, получим, что $N_2(\lambda)$ меньше $N_2'(\lambda)$ — числа положительных целочисленных пар (m, k), удовлетворяющих неравенству

$$\pi^2 m^2 + ak^\alpha < \lambda, \tag{2.9}$$

больше $N_2''(\lambda)$ — числа целочисленных положительных пар таких, что $(\pi m + c)^2 + ak^\alpha < \lambda$:

$$N_2''(\lambda) < N_2(\lambda) \le N_2'(\lambda). \tag{2.10}$$

Следовательно, из (2.9) и (2.10) можно получить (см. [21, § 3, лемма 2])

$$\frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}} - (c+1)\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\pi}\lambda^{\frac{1}{2}} \le N_2''(\lambda) \le N_2(\lambda) \le N_2'(\lambda) \le \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}},$$

где $\gamma = \int\limits_0^\pi \cos^2 t \sin t^{\frac{2}{\alpha}-1}\, dt$. Отсюда

$$N_2(\lambda) \sim \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}}. \tag{2.11}$$

Таким образом, из (2.8) и (2.11) вытекает, что

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}}\lambda^{\frac{2}{\alpha}} + \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}}.$$

Итак, если $\alpha > 2$, то

$$N(\lambda, L_0) \sim \frac{2\gamma\lambda^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}}}{\pi\alpha\sqrt{a}}$$

и, стало быть,

$$\lambda_n(L_0) \sim dn^{\frac{2+\alpha}{2\alpha}} \quad (d = [2\gamma/\pi\alpha\sqrt{a}]^{-2\alpha/2+\alpha}).$$

Если же $\alpha < 2$, то $N(\lambda, L_0) \sim \frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}}\lambda^{\frac{2}{\alpha}}$ и тем самым $\lambda_n(L_0) \sim c_1 n^{\frac{\alpha}{2}}$.

При $\alpha = 2$ будет $N(\lambda) \sim \left[\frac{1}{c_1^{\frac{2}{\alpha}}} + \frac{2\gamma}{\pi\alpha\sqrt{a}}\right]\lambda$, откуда $\lambda_n(L_0) \sim dn$.

Определим асимптотику собственных чисел оператора $L = L_0 + Q$. Поскольку Q — ограниченный оператор в $\mathbf{L}_2$, из соотношения для резольвент операторов L_0 и L [22, с. 180]:

$$R_\lambda(L) = R_\lambda(L_0) - R_\lambda(L) Q R_\lambda(L_0), \tag{2.12}$$

заключаем, что спектр L также дискретен.

Пользуясь (2.12) и также свойством s чисел вполне непрерывных операторов [22, с. 44, 49], по той же схеме, что и в [2], можно получить следующую асимптотику для собственных чисел оператора $L - \mu_n(L)$: $\mu_n(L) \sim dn^\delta$.

Таким образом, получена

Теорема 2.1. *Пусть* $\gamma_n \sim an^\alpha$ $(0 < a,\ \alpha = \text{const})$. *Тогда*

$$\lambda_n(L_0) \sim \mu_n(L) \sim dn^\delta, \tag{2.13}$$

где

$$\delta = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha+2} & \text{при } \alpha > 2, \\ \frac{\alpha}{2} & \text{при } \alpha < 2, \\ 1 & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \tag{2.14}$$

3. Регуляризованный след оператора L. Пусть A_0 — самосопряженный положительный дискретный оператор, $R_0(\lambda)$ — его резольвента, $\{\varphi_j\}$ — базис из его собственных векторов, $\{\lambda_n\}$ — его собственные значения, $\{\mu_n\}$ — собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей. В работе [11] доказана

Теорема 1. *Пусть оператор* B *таков, что* $D(A_0) \subset D(B)$, *и пусть существует число* $\delta \in [0, 1)$ *такое, что оператор* $BA_0^{-\delta}$ *продолжается до ограниченного, и некоторое число* $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, *такое, что* $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$ — *ядерный оператор. Тогда существуют подпоследовательность натуральных чисел* $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ *и последовательность контуров* $\Gamma_m \in C$ *такие, что при* $\omega \geq \frac{\delta}{l}$ *верна формула*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_i - \lambda_i) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\operatorname{tr}(BR_0(\lambda))^k d\lambda\right) = 0. \tag{3.1}$$

В частности, при $\omega \geq \delta$ *верна формула*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_i - \lambda_i - (B\varphi_i, \varphi_i)) = 0.$$

Возьмем $\alpha > 2$, $L_0 \equiv A$, $Q \equiv B$. Тогда по теореме 2.1 при $\delta = 0$, $\omega < \frac{\alpha-2}{2\alpha}$ все условия приведенной выше теоремы 1 удовлетворяются, поэтому для разности собственных значений L_0 и L справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n - (Q\psi_n, Q\psi_n)_{\mathbf{L_2}}) = 0,$$

где $\psi_1, \psi_2, \dots$ — ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0; $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n)$ назовем *регуляризованным следом оператора* L.

Вычислим норму собственной функции оператора L_0 в L_2. Для этого воспользуемся равенством [18, с. 531]

$$\int\limits_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)\,dt = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}[J_\nu(\alpha)\beta J_\nu'(\beta) - J_\nu(\beta)\alpha J_\nu'(\alpha)].$$

Переходя к пределу при $\alpha \to \beta$, получим

$$\int\limits_0^1 tJ_\nu^2(\beta t)\,dt = \frac{\beta {J'}_\nu^2(\beta) - J_\nu(\beta)(J_\nu'(\beta) + \beta J_\nu''(\beta))}{2\beta}.$$

Учитывая тождества

$$J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}J_\nu(z), \quad J''_\nu(z) = -J'_{\nu+1}(z) - \frac{\nu}{z^2}J_\nu(z) - \frac{\nu}{z}J'_\nu(z),$$

выражение в скобках в правой части последнего равенства можно преобразовать к виду

$$-J_{\nu+1}(\beta) + \frac{\nu}{\beta}J_\nu(\beta) - \beta J'_{\nu+1}(\beta) - \frac{\nu}{\beta}J_\nu(\beta) + \nu J'_\nu(\beta)$$

или согласно $zJ'_{\nu+1}(z) = zJ_\nu(z) - (\nu+1)J_{\nu+1}(z)$ — к виду

$$\nu J_{\nu+1}(\beta) - \beta J_\nu(\beta) + \nu J'_\nu(\beta).$$

Опять же из соотношения $J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z}J_\nu(z)$ имеем

$$\int_0^1 tJ_\nu^2(\beta t)\,dt = \frac{\beta^2 {J'}_\nu^2(\beta) + (\beta^2-\nu^2)J_\nu^2(\beta)}{2\beta^2}$$

Так как $x_{m,k}$ удовлетворяют уравнению

$$\beta J'_\nu(\beta) + (1/2 - \beta^2 - \gamma_k)J_\nu(\beta) = 0,$$

то

$$\int_0^1 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)\,dt = \frac{\left[\left(\frac12 - x_{m,k}^2 - \gamma_k\right)^2 + \left(x_{m,k}^2 - \nu^2\right)\right]J_\nu^2(x_{m,k})}{2x_{m,k}^2}$$
$$= \frac{\frac14 - \gamma_k + x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2\gamma_k + \gamma_k^2 - \nu^2}{2x_{m,k}^2}J^2(x_{m,k}).$$

Таким образом,

$$(\sqrt{t}J_\nu(x_{m,k}t)\varphi_k, J_\nu(x_{m,k})\varphi_k)_{\mathbf{L}_2} = \int_0^1 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(\varphi_k,\varphi_k)\,dt + J_\nu^2(x_{m,k})(\varphi_k,\varphi_k)$$
$$= \frac{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2\gamma_k + \gamma_k^2 - \gamma_k - \left(\nu^2 - \frac14\right) + 2x_{m,k}^2}{2x_{m,k}^2}J_\nu^2(x_{m,k}),$$

и ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 имеют вид

$$\frac{1}{J_\nu(x_{m,k})}\sqrt{\frac{2x_{m,k}^2}{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2\gamma_k + 2x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac14}}$$
$$\times\{\sqrt{t}J_\nu(x_{m,k}t)\varphi_k, J_\nu(x_{m,k})\varphi_k\}, \quad m=\overline{0,\infty},\ k=\overline{N,\infty};\ m=\overline{1,\infty},\ k=\overline{1,N-1}.$$

Лемма 3.1. *Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и $\alpha > 0$, то*

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty\left|\int_0^1 \frac{2x_{m,k}^2 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac14\right\}}\,dt\right|$$
$$+\sum_{k=N}^\infty\left|\int_0^1 \frac{2x_{0,k}^2 tJ_\nu^2(x_{0,k}t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{0,k})\left\{x_{0,k}^4 + 2x_{0,k}^2 + 2\gamma_k x_{0,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac14\right\}}\right| < \infty. \quad (3.2)$$

Доказательство. Положим $f_k(t) = (q(t)\varphi_k, \varphi_k)$. По лемме 2.1 $x_{m,k} \sim \pi m + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ $(m = \overline{1,\infty})$, так что, имея в виду неравенство [18, с. 666] $\left|\frac{tJ_\nu^2(x_{m,k}t)}{J_\nu^2(x_{m,k})}\right| < c$ и условия 1, 2, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_0^1 \frac{2x_{m,k}^2 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac{1}{4}\right\}}\,dt\right|$$

$$< c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{|f_k(t)|\,dt}{x_{m,k}^2 + 2 + 2\gamma_k + \frac{\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac14}{x_{m,k}^2}} < c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x_{m,k}^2}\int_0^1 |f_k(t)|\,dt < \infty.$$

Для оценки второго слагаемого в (3.2) воспользуемся асимптотикой $x_{0,k} \sim \frac{\nu^2-\frac94}{4} + \sqrt{\gamma_k - \sqrt{\gamma_k}(\nu^2-1/4)}$ и $\gamma_k \sim ak^\alpha$. По условию леммы $\alpha > 0$, тем самым, обозначив это слагаемое через s, из условия 1 будем иметь

$$|s| < \sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{x_{0,k}^2}\int_0^1 |f_k(t)|\,dt < \infty.$$

Лемма доказана.

Предположим, что выполняются условия

$$\int_{1-\delta}^{1}\frac{|f_k(t)|}{\cos\frac{\pi t}{2}}\,dt < \infty, \tag{3.3}$$

$$\int_0^{\delta}\frac{|f_k(t)|}{t}\,dt < \infty. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие теоремы* 2.1. *Если операторная функция* $q(t)$ *удовлетворяет условиям* 1–3, *а также* (3.3), (3.4), *то имеет место следующая формула:*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n - \lambda_n) = -\frac{2\nu\operatorname{tr}q(0) + \operatorname{tr}q(1)}{4}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из абсолютной сходимости ряда в (3.2) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{2x_{m,k}^2 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)\,dt}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac14\right\}}$$
$$+ \sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{2x_{m,k}^2 tJ_\nu^2(x_{m,k}t)(q(t)\varphi_k,\varphi_k)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac14\right\}}\,dt. \tag{3.6}$$

Вычислим сначала значение ряда

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{2tJ_\nu^2(x_{m,k}t)f_k(t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\left\{x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac14\right\}}\,dt.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{2tJ_\nu^2(x_{m,k}t)f_k(t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\big\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac14\big\}}.$$

Для каждого фиксированного k исследуем при $N\to\infty$ асимптотическое поведение функции

$$R_N(t)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{2tx_{m,k}^2J_\nu^2(x_{m,k}t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\big\{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac14\big\}}.$$

Для того чтобы вывести формулу для $R_N(t)$, выразим m-й член суммы $R_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{m,k}$ некоторой функции комплексного переменного z, имеющей полюсы в точках $x_{m,k}$ ($m=\overline{0,N-1}$), при фиксированном k.

Рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\{zJ_\nu'(z)+(1/2-z^2-\gamma_k)J_\nu(z)\}}. \tag{3.7}$$

Она имеет полюсы в точках $x_{0,k,\dots,}x_{N-1,k}$ и $j_1,\dots,j_N$ ($J_\nu(j_n)=0$). Вычет в точке j_n равен

$$\frac{2tj_nJ_\nu^2(tj_n)}{J_\nu'(j_n)\big(j_nJ_\nu'(j_n)+\big(\frac12-j_n^2-\gamma_k\big)J_\nu(j_n)\big)}=\frac{2tJ_\nu^2(tj_n)}{J_\nu'(j_n)^2}=\frac{2tJ_\nu^2(tj_n)}{J_{\nu+1}^2(j_n)}.$$

Вычислим вычет в $x_{m,k}$. Имеем

$$\begin{aligned}(zJ_\nu'(z)+(1/2-z^2-\gamma_k)J_\nu(z))'&=J_\nu'(z)(3/2-z^2-\gamma_k)+zJ_\nu''(z)-2zJ_\nu(z)\\ =-\frac{\nu}{z}J_\nu(z)(1/2-z^2-\gamma_k)-\nu J_\nu'(z)&+J_{\nu-1}(z)(3/2-z^2-\gamma_k)+zJ_{\nu-1}'(z)-2zJ_\nu(z).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Обозначим функцию в (3.8) через $G(z)$. Подставляя $x_{m,k}$ вместо z, учитывая, что $x_{m,k}$ является решением уравнения

$$zJ_\nu'(z)+(1/2-z^2-\gamma_k)J_\nu(z)=0,$$

и пользуясь $zJ_{\nu-1}'(z)=(\nu-1)J_{\nu-1}(z)-zJ_\nu(z)$, получим

$$\begin{aligned}G(x_{m,k})&=J_{\nu-1}(x_{m,k})\big(3/2-x_{m,k}^2-\gamma_k\big)+(\nu-1)J_{\nu-1}(x_{m,k})\\ &-3x_{m,k}J_\nu(x_{m,k})=J_{\nu-1}(x_{m,k})\big(1/2+\nu-x_{m,k}^2-\gamma_k\big)-3x_{m,k}J_\nu(x_{m,k}).\end{aligned}$$

Согласно $J_{\nu-1}(z)=J_\nu'(z)+\frac{\nu}{z}J_\nu(z)$ имеем

$$\begin{aligned}G(x_{m,k})&=\left(J_\nu'(x_{m,k})+\frac{\nu}{x_{m,k}}J_\nu(x_{m,k})\right)\left[\nu+\frac12-x_{m,k}^2-\gamma_k\right]-3x_{m,k}J_\nu(x_{m,k})\\ &=\frac{\nu x_{m,k}J_\nu'(x_{m,k})+\nu^2J_\nu(x_{m,k})}{x_{m,k}}\\ &+\frac{\big[x_{m,k}J_\nu'(x_{m,k})+\nu J_\nu(x_{m,k})\big]\big[\frac12-x_{m,k}^2-\gamma_k\big]-3x_{m,k}^2J_\nu(x_{m,k})}{x_{m,k}}.\end{aligned}$$

Так как $x_{m,k}$ удовлетворяет (2.4), имеем

$$G(x_{m,k})=-\frac{x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2\gamma_k+2x_{m,k}^2-\gamma_k+\gamma_k^2-\nu^2+\frac14}{x_{m,k}}J_\nu(x_{m,k}).$$

Таким образом,

$$\operatorname*{res}_{z=x_{m,k}} g(z) = -\frac{2tx_{m,k}^2 J_\nu^2(tx_{m,k})}{J_\nu^2(x_{m,k})\bigl(x_{m,k}^4 + 2x_{m,k}^2 + 2\gamma_k x_{m,k}^2 + \gamma_k^2 - \gamma_k - \nu^2 + \frac{1}{4}\bigr)}.$$

В качестве контура интегрирования возьмем контур C. Согласно леммам 2.1 и 2.3 $x_{N-1,k} < A_N < x_{N,k}$ при N достаточно больших и, как известно, $j_N < A_N < j_{N+1}$.

Легко проверить, что в окрестности нуля функция (3.7) будет иметь порядок $O(z^\nu)$ $(\nu \geq 1)$, так что интеграл по малой полуокружности с центром в начале координат превратится в нуль при $r \to 0$ (r — радиус полуокружности). Поскольку функция (3.7) нечетная, интеграл по левой части контура C обратится в нуль.

Далее, если $z = u + iv$, то при большом $|v|$ и при $u \geq 0$ подынтегральное выражение будет иметь порядок $O(e^{|v|(2t-2)})$, следовательно, для заданного значения A_N интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон прямоугольника, стремятся к нулю при $B \to \infty$ $(0 < t < 1)$.

Таким образом, получаем

$$T_N(t) - R_N(t) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{2tzJ_\nu^2(tz)\,dz}{J_\nu(z)\bigl\{zJ_\nu'(z) + \bigl(\frac{1}{2} - z^2 - \gamma_k\bigr)J_\nu(z)\bigr\}},$$

$$T_N(t) = \sum_{m=1}^{N} \frac{2tJ_\nu^2(tj_m)}{J_{\nu+1}^2(j_m)}. \tag{3.9}$$

На рассматриваемом контуре $|tz| \to \infty$ при $x_{N-1,k}^{-1+\varepsilon} \leq t < 1$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Поэтому в подынтегральном выражении можно заменить бесселевы функции соответствующими асимптотиками при больших аргументах. Тогда, учитывая

$$J_\nu^2(z) = \frac{2}{\pi z}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sin(2z - \nu\pi)}{2}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

при $N \to \infty$ получим

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\{zJ_\nu'(z) + (1/2 - z^2 - \gamma_k)J_\nu(z)\}}\,dz$$

$$\sim \frac{1}{\pi i} \int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{1 + \sin(2zt - \nu\pi)}{-z(1 + \sin(2z - \nu\pi))}\,dz$$

$$\sim \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{-(A_N + iv)(1 + \cos 2iv)} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2tA_N - \nu\pi + 2tiv)}{(A_N + iv)(1 + \cos 2iv)}\,dv. \tag{3.10}$$

Обозначим правую часть (3.10) через J. Имеем

$$|J| < \frac{2}{A_N} \int\limits_0^\infty \frac{dv}{\operatorname{ch} 2v} + \frac{\text{const}}{A_N} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2tv}{\operatorname{ch} 2v} = \frac{\pi}{2A_N} + \frac{\text{const}}{A_N} \frac{1}{\cos \frac{\pi t}{2}}. \tag{3.11}$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 R_N(t)f_k(t)\,dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 T_N(t)f_k(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1\left(\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\bigl\{zJ_\nu'(z)+\bigl(\frac12-z^2-\gamma_k\bigr)J_\nu(z)\bigr\}}\,dz\right)f_k(t)\,dt$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 T_N(t)f_k(t)\,dt-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{A_N^{-1+\varepsilon}}(T_N(t)-R_N(t))f_k(t)\,dt$$

$$-\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\bigl\{zJ_\nu'(z)+\bigl(\frac12-z^2-\gamma_k\bigr)J_\nu(z)\bigr\}}\,dz\right]f_k(t)\,dt. \quad (3.12)$$

Из оценки (3.11) при выполнении условия (3.3) имеем

$$\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1\left|\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+i\infty}\frac{2tzJ_\nu^2(tz)}{J_\nu(z)\bigl\{zJ_\nu'(z)+\bigl(\frac12-z^2-\gamma_k\bigr)J_\nu(z)\bigr\}}\,dzf_k(t)\,dt\right|$$

$$\le\lim_{N\to\infty}\frac{\pi}{2A_N}\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1|f_k(t)|\,dt+\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{const}}{A_N}\int\limits_{A_N^{-1+\varepsilon}}^1\frac{|f_k(t)|}{\cos\frac{\pi t}{2}}\,dt=0. \quad (3.13)$$

Далее, известно следующее соотношение при больших N (см. [18, с. 642]):

$$T_N(t)\sim\frac{1}{2t}\left[1-\frac{\sin 2A_Nt}{\sin\pi t}\right].$$

Так что, если выполняется (3.4), то

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{A_N^{-1+\varepsilon}}T_N(t)f_k(t)\,dt=0. \quad (3.14)$$

В силу условия 2 ($\|q^{(l)}(t)\|_1<\mathrm{const}$), неравенства (3.2), а также асимптотики $x_{m,k}$

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^{A_N^{-1+\varepsilon}}R_N(t)f_k(t)\,dt=0. \quad (3.15)$$

Ранее получено, что при выполнении условий 1–3 (см. [23])

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 T_N(t)f_k(t)\,dtz=-\frac{2\nu f_k(0)+f_k(1)}{4}. \quad (3.16)$$

Итак, из (3.12)–(3.16) имеем

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^1 R_N(t)f_k(t)\,dt=-\frac{2\nu f_k(0)+f_k(1)}{4}. \quad (3.17)$$

Таким образом,

$$\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{2tJ_\nu^2(x_{m,k},t)f_k(t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\big[x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac14\big]}\,dt = \sum_{k=N}^{\infty} -\frac{2\nu f_k(0)+f_k(1)}{4}. \quad (3.18)$$

Подобным образом получаем (на этот раз контур C будет иметь вырез только в начале координат, так как у уравнения (2.5) нет мнимых корней)

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{2tJ_\nu^2(x_{m,k},t)f_k(t)}{J_\nu^2(x_{m,k})\big[x_{m,k}^4+2x_{m,k}^2+2\gamma_k x_{m,k}^2+\gamma_k^2-\gamma_k-\nu^2+\frac14\big]}\,dt = -\sum_{k=1}^{N-1} -\frac{2\nu f_k(0)+f_k(1)}{4}. \quad (3.19)$$

Объединяя (3.17) и (3.18), окончательно имеем

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{n_m}(\mu_n-\lambda_n) = -\frac{2\nu\,\mathrm{tr}\,q(0)+\mathrm{tr}\,q(1)}{4}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбачук В. И., Рыбак М. А.* О граничных задачах для операторного уравнения Штурма — Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. Киев, 1981. С. 3–13.
2. *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32, № 2. С. 248–252.
3. *Алиев Б. А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58, № 8. С. 1146–1152.
4. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 593–596.
5. *Дикий Л. А.* Об одной формуле Гельфанда — Левитана // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 2. С. 119–123.
6. *Гасымов М. Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1201–1205.
7. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 2. С. 258–262.
8. *Максудов Ф. Г., Байрамоглы М., Адыгезалов А. А.* О регуляризованном следе оператора Штурма — Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 795–799.
9. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Формула следа для операторов Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69. С. 427–442.
10. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2164–2166.
11. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 129–152.
12. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5. С. 89–156.

13. *Albayrak I., Bayramoglu M., and Adiguzelov E.* The second regularized trace formula for the Sturm–Liouville problem with spectral parameter in a boundary condition // Methods Funct. Anal. Topology. 2000. V. 6, N 3. P. 1–8.
14. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
15. *Yakubov S., Yakubov Ya.* Differential operator equations. Ordinary and partial differential equations. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000.
16. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
17. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1959. Т. 5.
18. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Т. 1.
19. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Изд-во иностр. лит., 1978. Т. 2.
20. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
21. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма — Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. 1972. Т. 24, № 3. С. 291–305.
22. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984.
23. *Гашимов И. Ф.* Вычисление регуляризованного следа операторного уравнения Штурма — Лиувилля с особенностью на конечном отрезке. М., 1989, 37 с. Деп. в ВИНИТИ 12.12.89. № 7340–В89.

Статья поступила 3 июля 2008 г., окончательный вариант — 17 ноября 2009 г.

Асланова Нигяр Махар кызы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку, Азербайджан AZ 1141
nigar.aslanova@yahoo.com