Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 512.865.3

ОСЛАБЛЕННАЯ ТЕОРЕМА БИБЕРБАХА ДЛЯ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУПП В ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. Чуркин

Аннотация. Ослабленная теорема Бибербаха утверждает, что кристаллографическая группа в евклидовом пространстве однозначно задает свою решетку трансляций как абстрактная группа. Р. М. Гарипов («Алгебра и логика», 2003) доказал, что это утверждение справедливо для кристаллографических групп в пространствах Минковского. Он сформулировал задачу: верно ли аналогичное утверждение в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$? Доказано, что ослабленная теорема Бибербаха верна для кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{R}^{p,q}$ при $\min\{p,q\} \leq 2$. При $\min\{p,q\} \geq 3$ построены примеры кристаллографических групп с двумя различными решетками, которые меняются местами подходящим автоморфизмом группы. Доказано также, что для кристаллографических групп с двумя различными изоморфными псевдоевклидовыми решетками коранг пересечения этих решеток в самих решетках может принимать любые значения, большие двух, кроме числа четыре.

Ключевые слова: псевдоевклидово пространство, кристаллографическая группа, ослабленная теорема Бибербаха, решетка трансляций.

К 70-летию Юрия Леонидовича Ершова

Введение

Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве является подгруппой группы движений, пересечение которой с подгруппой трансляций образует решетку, т. е. свободную абелеву группу, порождаемую базисом евклидова пространства. Факторизуя по решетке, получим группу поворотов кристаллографической группы, состоящую из ортогональных преобразований.

Основа для классификации кристаллографических групп в многомерных евклидовых пространствах с точностью до изоморфизма — известная теорема Бибербаха [1, 2] об аффинном подобии таких групп. На практике для первого шага классификации достаточно ослабленной теоремы Бибербаха о том, что кристаллографическая группа однозначно задает свою решетку трансляций как абстрактная группа. Тогда при изоморфизмах кристаллографических групп решетки трансляций обязательно переходят в решетки трансляций, откуда следует сопряженность групп поворотов уже линейным изоморфизмом — сужением исходного изоморфизма на решетках. Далее задача сводится к классификации расширений решетки $\mathbb{Z}^n$ с помощью заданной группы поворотов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ.344.2008.1), а также при поддержке гранта АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

Проблема однозначной определимости решетки состоит в том, что решетка трансляций в кристаллографической группе имеет «внешнее» определение как пересечение с группой трансляций. Можно дать и «внутреннее» определение евклидовой решетки в кристаллографической группе как нормальной свободной абелевой подгруппы конечного ранга, максимальной среди абелевых, на которой задана положительно определенная симметрическая билинейная форма, инвариантная относительно действия группы сопряжением на элементах подгруппы. Эти свойства решетки, очевидно, сохраняются при изоморфизмах групп. Если внутреннее определение задает именно подгруппу трансляций или, равносильно, решетка в смысле внутреннего определения единственна, то верна ослабленная теорема Бибербаха.

С. П. Новиков и А. П. Веселов (см. [3, 4]) предложили использовать при классификации квазикристаллов — нового состояния вещества, открытого в восьмидесятые годы, *квазикристаллографические* группы. Так называется подгруппа группы движений евклидова пространства, пересечение которой с подгруппой трансляций образует квазирешетку, т. е. свободную абелеву группу конечного ранга, содержащую решетку. С. А. Пиунихин [5, 6] решал задачу классификации с точностью до изоморфизма для таких групп в малых размерностях. Он показал, в частности, что квазикристаллографическая группа однозначно задает свою квазирешетку трансляций как абстрактная группа. Оказалось также, что квазикристаллографическая группа при действии на своей квазирешетке сопряжением сохраняет подходящую определенную на квазирешетке невырожденную симметрическую билинейную форму ранга, равного рангу квазирешетки. Поэтому она изоморфна кристаллографической группе в *псевдоевклидовом* пространстве бóльшей размерности (см., например, [7]). Определения с евклидова случая на псевдоевклидов переносятся практически без изменений, требуется лишь замена ортогональных преобразований на псевдоортогональные. Таким образом, возникает задача классификации по типу изоморфизма для кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах и их проекций на подходящие инвариантные евклидовы подпространства.

Р. М. Гарипов [8] доказал, что кристаллографические группы в пространствах Минковского однозначно задают свои решетки трансляций как абстрактные группы. Опираясь на доказанный аналог ослабленной теоремы Бибербаха, он получил полное описание некоторых кристаллографических классов с точностью до изоморфизма в пространствах Минковского малых размерностей [8–10]. Он также сформулировал задачу о справедливости ослабленной теоремы Бибербаха для кристаллографических групп в произвольных псевдоевклидовых пространствах.

Здесь доказаны

Теорема 1. *Если группа поворотов кристаллографической группы в псевдоевклидовом пространстве не содержит нормальной свободной абелевой подгруппы конечного ранга, большего двух, которая действует тождественно на подходящем изотропном подпространстве и на фактор-пространстве по нему, то псевдоевклидова решетка в такой кристаллографической группе единственна.*

Теорема 2. *Произвольная кристаллографическая группа в псевдоевклидовом пространстве* $\mathbb{R}^{p,q}$ *при условии* $\min\{p,q\} \leq 2$ *содержит единственную псевдоевклидову решетку.*

Теорема 3. *При условии* $\min\{p,q\} \geq 3$ *в псевдоевклидовом пространстве* $\mathbb{R}^{p,q}$ *всегда существуют кристаллографические группы, каждая из которых содержит по крайней мере две различные псевдоевклидовы решетки типа* (p,q) *и имеет автоморфизм, меняющий эти решетки местами.*

Если $\min\{p,q\} = 3$ *или* $\min\{p,q\} \geq 5$, *то эти решетки можно выбрать так, чтобы коранг их пересечения в каждой решетке был равен* $\min\{p,q\}$.

Если $\min\{p,q\} = 4$, *то эти решетки можно выбрать так, чтобы коранг их пересечения в каждой решетке был равен* 3.

Теорема 4. *В любой кристаллографической группе с двумя различными псевдоевклидовыми решетками одинакового ранга коранг их пересечения в каждой решетке не может быть равен двум и четырем. Он может принимать только целые значения, большие двух, но не равные четырем:* $3, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$.

Следует отметить, что если не требовать сохранения группой поворотов невырожденной симметрической билинейной формы, то легко указать кристаллографическую группу на вещественной плоскости с двумя абелевыми решетками, а также автоморфизм, меняющий эти решетки местами. Этот пример — группа аффинных преобразований вещественной плоскости вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 + \beta \\ x_2 + \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Она изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z},$$

которая в порождающих

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет определяющие соотношения

$$[a,b] = c, [a,c] = [b,c] = 1,$$

где $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ — обычный коммутатор двух элементов. Решетка трансляций $Z \simeq \mathbb{Z}^2$ этой группы порождается элементами b и c. С другой стороны, соответствие $a \longleftrightarrow b$, $c \longleftrightarrow c^{-1}$ задает автоморфизм группы и переводит решетку трансляций, порожденную b и c, в подгруппу, порожденную a и c, — новую решетку. Нетрудно заметить, что в этом примере на решетке Z не существует *невырожденной симметрической* билинейной формы, инвариантной относительно группы поворотов. Тем не менее поскольку все матрицы группы поворотов имеют определитель 1, она сохраняет подходящую симплектическую, т. е. *невырожденную кососимметрическую* билинейную форму на Z.

§ 1. Нормальные абелевы подгруппы кристаллографических групп в псевдоевклидовых пространствах

Пусть $G = G(\Gamma, Z)$ — кристаллографическая группа в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ с решеткой Z ранга $p+q$ и группой поворотов Γ. Обычно в кристаллографии композицию линейных преобразований обозначают мультипликативно, а композицию трансляций из решетки — аддитивно. Поскольку единственность решетки не предполагается и будет изучаться взаимное расположение различных решеток, удобно обозначить операцию композиции трансляций умножением, как для линейной части аффинных преобразований. Тогда верна следующая формула для сопряжения трансляции на вектор z аффинным преобразованием g с линейной частью A и сдвигом на вектор b:

$$g = (A, b) : x \mapsto Ax + b,\ x \in \mathbb{R}^{p,q}, \Longrightarrow g \cdot z \cdot g^{-1} = A(z), \quad z \in Z.$$

Она позволяет задать действие линейного преобразования как действие сопряжением на решетке трансляций в кристаллографической группе.

Отсюда решетка трансляций:

(а) нормальная свободная абелева подгруппа конечного ранга, совпадающая со своим централизатором (максимальная среди абелевых подгрупп);

(б) подгруппа, снабженная вещественной невырожденной симметрической билинейной формой, инвариантной относительно действия группы сопряжением.

Конечно, эти свойства сохраняются при абстрактном изоморфизме. Любую подгруппу кристаллографической группы со свойствами (а) и (б) будем называть *псевдоевклидовой решеткой.* Если форма имеет тип (p, q), то будем называть ее также *решеткой типа* (p, q).

Предположим, что кристаллографические группы $G = G(\Gamma, Z)$ и $G' = G'(\Gamma', Z')$ изоморфны и $\varphi : G \to G'$ — абстрактный изоморфизм групп.

Если $\varphi(Z) = Z'$, то после подходящего сопряжения в группе аффинных преобразований можно считать, что $Z' = Z = \mathbb{Z}^{p+q}$, $\Gamma' = \Gamma \leq GL_{p+q}(\mathbb{Z})$. Действительно, если

$$g = (A, b) \overset{\varphi}{\mapsto} g' = (A', b'), \quad z \overset{\varphi}{\mapsto} F(z), \quad z \in Z,$$

где F — линейный изоморфизм, то $g \cdot z \cdot g^{-1} \overset{\varphi}{\mapsto} g' \cdot F(z) \cdot g'^{-1}$ или иначе $A(z) \overset{\varphi}{\mapsto} A'(F(z))$, $A(z) = F^{-1}(A'(F(z)))$. Поскольку Z содержит базис пространства, то $A = F^{-1}A'F$, $A' = FAF^{-1}$ для всех $A \in \Gamma$. Следовательно, $\Gamma' = F\Gamma F^{-1}$. Теперь, сопрягая группу G линейным изоморфизмом F в группе аффинных преобразований, получим копию группы G, изоморфную группе G' и такую, что и решетки, и группы поворотов групп G и G' совпадают. Таким образом, достаточно классифицировать с точностью до изоморфизма только расширения Z с помощью Γ. Такова ситуация для кристаллографических групп в пространствах Евклида и Минковского.

Если $\varphi(Z) \neq Z'$, то $Z \neq \varphi^{-1}(Z') = T$. Поскольку решетка Z' имеет свойства (а), (б) как подгруппа группы G' и $\varphi : G \to G'$ — изоморфизм групп, подгруппа $T = \varphi^{-1}(Z')$ имеет свойства (а), (б) как подгруппа группы G. Следовательно, группа G содержит две различные решетки Z и T.

Лемма 1 (критерий инвариантности формы). *Пусть G — аффинная кристаллографическая группа с решеткой Z, и пусть $\zeta : Z \times Z \to \mathbb{R}$ — билинейная форма на Z. Предположим, что T — нормальная свободная абелева подгруппа конечного ранга из группы G и $T \nsubseteq Z$. Тогда*

1) *TZ — нильпотентная группа ступени 2 с центром $T \cap Z$ и коммутантом $[T, Z] \subset T \cap Z$;*

2) *инвариантность формы ζ относительно действия группы T на решетке Z сопряжением эквивалентна выполнению двух условий:*

(а) *коммутант $[T, Z]$ изотропен относительно формы ζ,* (б) *операторы* $\hat{a}-\hat{1} : x \mapsto axa^{-1}x^{-1}$, $x \in Z$, *кососимметричны относительно формы* ζ *при всех* $a \in T$.

Доказательство. 1. Очевидно, что TZ и $T \cap Z$ — нормальные подгруппы группы G, а фактор-группа $TZ/(T\cap Z) \simeq T/(T\cap Z) \times Z/(T\cap Z)$ абелева. Следовательно, коммутант $[TZ, TZ] = [T, Z]$ содержится в подгруппе $T \cap Z$. Но $T \cap Z$ — центр группы TZ ввиду самоцентрализуемости Z. Итак, TZ — нильпотентная группа ступени 2.

2. Пусть ζ инвариантна относительно действия группы T на решетке Z сопряжением. Обозначим через $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ групповой коммутатор элементов a и b.

(а) При любых $a \in T$, $b \in Z$, $c \in T \cap Z$ имеем

$$\zeta(aba^{-1}b^{-1},\ c) = \zeta(aba^{-1},\ c) - \zeta(b,c)$$
$$= \zeta(aba^{-1}, aca^{-1}) - \zeta(b,c) = \zeta(b,c) - \zeta(b,c) = 0$$

ввиду билинейности ζ и инвариантности относительно T. Это означает, что $\zeta([a,b],\ c) = 0$ при любых $a \in T$, $b \in Z$, $c \in T \cap Z$ или, равносильно,

$$\zeta([T,Z],\ T\cap Z) = \zeta(T \cap Z,\ [T,Z]) = 0. \tag{1}$$

Поскольку $[T,Z] \subseteq T \cap Z$, то $\zeta(x,y) = 0$ для всех $x, y \in [T,Z]$.

(б) При любых $a \in T$, $x, y \in Z$ ввиду билинейности ζ получаем

$$\zeta(axa^{-1}, aya^{-1}) = \zeta([a,x]x,\ [a,y]y)$$
$$= \zeta([a,x],\ [a,y]) + \zeta([a,x],\ y) + \zeta(x,\ [a,y]) + \zeta(x,\ y). \tag{2}$$

Если $\zeta(axa^{-1}, aya^{-1}) = \zeta(x,y)$, то с учетом изотропности $[T,Z]$ имеем равенство

$$\zeta([a,x],\ y) + \zeta(x,\ [a,y]) = 0. \tag{3}$$

Оно означает кососимметричность оператора $\hat{a} - \hat{1}$ относительно формы ζ, поскольку $(\hat{a} - \hat{1})x = [a,x]$.

Пусть теперь выполнены условия 2(а) и 2(б) для билинейной формы ζ. Тогда из равенств (3) и (2) следует инвариантность ζ относительно действия $a \in T$ сопряжением на Z.

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. В доказательстве вместо нормальности T использовалась только взаимная нормализуемость подгрупп Z и T. Симметричность формы ζ можно также не использовать.

Замечание 2. Условие 2(а) означает, что существует подпространство Σ в $\mathbb{R}^n$, изотропное относительно формы ζ и содержащее образы всех операторов $\hat{a} - \hat{1}$ при всех $a \in T$. В частности, ранги операторов $\hat{a} - \hat{1}$ ограничены сверху размерностью Σ. Так, если пространство евклидово, то $[T,Z] = 1$, $T = Z$.

Замечание 3. Условие 2(б) в матричной форме в произвольном базисе пространства имеет вид

$$((A-I)x)^\top Jy + x^\top J(A-I)y = 0,$$

где A — матрица оператора $\hat{a}$, I — единичная матрица, J — матрица формы ζ. С учетом равенства $J^\top = J$ получаем $(J(A-I))^\top = -J(A-I)$, что означает кососимметричность матриц $J(A-I)$. Если форма невырожденна, то матрица J невырожденна и ранги матриц $J(A-I)$ и $A-I$ совпадают. Так, если это пространство Минковского, то $\operatorname{rk}(A-I) \le 1$ ввиду замечания 2 и тогда $J(A-I)$ — кососимметричная матрица ранга ≤ 1. Но ранг кососимметричной матрицы четен, следовательно, $J(A-I) = 0$, $A = I$ и $T = Z$.

Следствие. *Пусть Σ — подпространство в $\mathbb{R}^{p+q}$, изотропное относительно симметрической билинейной формы ζ типа (p,q). Пусть Z — решетка в $\mathbb{R}^{p,q}$ такая, что $N = Z \cap \Sigma$ — решетка в Σ. Предположим, что группа Γ состоит из линейных операторов A, которые оставляют Z и N инвариантными, действуют тождественно в секциях цепочки подгрупп $0 < N < Z$ и, кроме того, все операторы $A - I$ кососимметричны относительно формы ζ. Тогда подгруппа $T = \Gamma N$ — нормальная свободная абелева группа конечного ранга в кристаллографической группе $G = \Gamma Z$, а группа $\Gamma \simeq T/T \cap Z$ по умножению изоморфна дискретной группе матриц $\{A - I \mid A \in \Gamma\}$ по сложению.*

Доказательство. Если $A \in \Gamma$, то по условию $(A-I)Z \subset N$, $(A-I)N = 0$. Операторы $A, B \in \Gamma$ коммутируют, если коммутируют операторы $A - I$, $B - I$. Но $(A-I)(B-I) = 0 = (B-I)(A-I)$. Кроме того, операторы из Γ оставляют неподвижными (централизуют) элементы из N. Поэтому $T = \Gamma N$ — абелева группа. Она не имеет кручения, поскольку $A^k = (I + (A-I))^k = I + k(A-I) \neq I$ при $A \neq I$. Так как $\Gamma \subset \operatorname{Aut} Z$ и абелева группа целочисленных матриц конечно порождена, то $T = \Gamma N$ — свободная абелева группа конечного ранга. Ее нормальность в группе $G = \Gamma Z$ следует из включения $(A-I)Z \subset N$. Группа $G = \Gamma Z = \Gamma N Z = TZ$ двуступенно нильпотентна по лемме 1. Инвариантность формы ζ относительно операторов из Γ вытекает из леммы 1.

Соответствие $A \mapsto A - I$ — изоморфизм мультипликативной и аддитивной групп, поскольку

$$0 = (A-I)(B-I) = AB - A - B + I, \quad AB - I = (A-I) + (B-I).$$

Следствие доказано.

§ 2. Кристаллографические группы с единственной решеткой

Здесь будут доказаны теоремы 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что G — кристаллографическая группа с двумя различными псевдоевклидовыми решетками Z и T. Найдем определяющие соотношения группы TZ. Будем считать далее, что максимальная размерность изотропного подпространства не менее единицы.

Выберем базис решетки Z как свободной абелевой группы, согласованный с цепочкой подгрупп

$$Z > T \cap Z \geq [T, Z] > 0.$$

Пусть $b_1, \dots, b_r$ — базис Z по модулю $T \cap Z$, $c_1, \dots, c_m$ — базис $T \cap Z$ по модулю изолятора $\sqrt{[T,Z]} = \{x \in T \cap Z \mid \exists k : x^k \in [T,Z]\}$ подгруппы $[T,Z]$ в группе $T \cap Z$, а $e_1, \dots, e_n$ — базис $\sqrt{[T,Z]}$. Ясно, что $T \cap Z$ изолирована в Z ввиду равенства $[a^k, b] = [a,b]^k$ для 2-ступенно нильпотентных групп и отсутствия кручения в Z. Поэтому

$$b_1, \dots, b_r, \quad c_1, \dots, c_m, \quad e_1, \dots, e_n \tag{4}$$

— требуемый базис решетки Z.

Выберем также базис

$$a_1, \dots, a_s, \quad c_1, \dots, c_m, \quad e_1, \dots, e_n \tag{5}$$

решетки T, согласованный с цепочкой подгрупп $T > T \cap Z \geq [T,Z] > 0$.

Отметим, что удаленность решеток друг от друга измеряют числа r и s, совпадающие с корангами пересечения $T \cap Z$ в решетках Z и T соответственно.

Пусть
$$[a_i, b_j] = \prod_k e_k^{\lambda_{ij}^k}, \quad \lambda_{ij}^k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Эти соотношения вместе с соотношениями коммутируемости между a_i, b_j, c_k, e_l можно рассматривать как определяющие соотношения для подгруппы TZ.

С другой стороны, числа λ_{ij}^k задают действие T на Z сопряжением. Действительно, если $\hat{a} : x \mapsto axa^{-1}$ — линейный оператор на Z, то $\hat{a} - \hat{1} : x \mapsto axa^{-1}x^{-1} = [a, x]$ ввиду мультипликативной записи операции в Z. Если A_i — матрица оператора $\hat{a}_i$ в базисе (4), то ввиду соотношений (6) и в соответствии с разбиением базиса (4) имеется клеточное разбиение матрицы
$$A_i - I = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ L_i & O & O \end{pmatrix}, \quad L_i = \bigl(\lambda_{ij}^k\bigr).$$

Здесь k — номер строки, а j — номер столбца в матрице L_i порядка $n \times r$.

Самоцентрализуемость решетки Z равносильна линейной независимости матриц L_i. Действительно, ввиду 2-ступенной нильпотентности TZ имеем
$$\Bigl[\prod_i a_i^{\alpha_i}, b_j\Bigr] = \prod_i [a_i, b_j]^{\alpha_i} = \prod_i \Bigl(\prod_k e_k^{\lambda_{ij}^k}\Bigr)^{\alpha_i} = \prod_k e_k^{\sum\limits_i \alpha_i \lambda_{ij}^k} = 1$$
при всех j в том и только в том случае, когда $\sum\limits_i \alpha_i \lambda_{ij}^k = 0$ при всех j, k, т. е. когда матрицы L_i линейно зависимы с коэффициентами α_i.

Предположим теперь, что J — матрица Грама формы ζ в базисе (4). Тогда в соответствии с разбиением базиса (4) ввиду симметричности ζ, равенства (1) и изотропности $[T, Z]$ она имеет клеточный вид
$$J = \begin{pmatrix} P & Q & X \\ Q^\top & R & O \\ X^\top & O & O \end{pmatrix},$$
где для нас важна клетка X порядка $r \times n$. Отметим, что столбцы X линейно независимы, поскольку матрица J невырожденна. В частности,
$$n \le r. \tag{7}$$

В силу леммы 1 инвариантность ζ относительно действия T на Z сопряжением эквивалентна кососимметричности матриц $J(A_i - I)$ при всех i. Но
$$J(A_i - I) = \begin{pmatrix} P & Q & X \\ Q^\top & R & O \\ X^\top & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ L_i & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XL_i & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

Поэтому инвариантность ζ относительно действия T на Z сопряжением равносильна кососимметричности матриц XL_i при всех i:
$$(XL_i)^\top = -XL_i, \quad i = 1, \dots, s. \tag{8}$$

Обратно, существование матрицы X с условием (8) указанного размера $r \times n$ и максимального ранга n гарантирует существование невырожденной симметрической формы ζ на Z, инвариантной ввиду леммы 1 относительно действия

T на Z сопряжением, поскольку такую матрицу X можно вложить в симметричную невырожденную матрицу, например, в матрицу

$$J = \begin{pmatrix} I & O & X \\ O & I & O \\ X^\top & O & O \end{pmatrix}.$$

Действительно, ввиду матричного равенства

$$\begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ -X^\top & O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O & X \\ O & I & O \\ X^\top & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O & X \\ O & I & O \\ O & O & -X^\top X \end{pmatrix}$$

имеем $\det J = \det(-X^\top X) \neq 0$, так как $X^\top X$ — матрица Грама независимой системы столбцов матрицы X.

Матрица X имеет левую обратную, поэтому вещественная линейная независимость матриц L_i равносильна вещественной линейной независимости кососимметричных матриц XL_i порядка $r \times r$. Поскольку размерность пространства кососимметричных матриц порядка r равна $r(r-1)/2$, то

$$s \leq \frac{r(r-1)}{2}. \tag{9}$$

Предположим теперь, что решетка T также снабжена невырожденной симметрической билинейной формой τ, инвариантной относительно действия Z на T сопряжением. Тогда ввиду леммы 1, аналога равенства (1) и изотропности коммутанта $[T, Z]$ относительно τ матрица формы τ в базисе (5) в соответствии с разбиением базиса имеет клеточный вид

$$J' = \begin{pmatrix} U & V & Y \\ V^\top & W & O \\ Y^\top & O & O \end{pmatrix},$$

где Y — матрица порядка $s \times n$.

Если $b \in Z$, то $\hat{b} : x \mapsto bxb^{-1}$ — линейный оператор на T. Тогда $\hat{b} - \hat{1} : x \mapsto bxb^{-1}x^{-1} = [b, x]$ ввиду мультипликативной записи операции в T. Если B_j — матрица оператора $\hat{b}_j$ в базисе (5), то в соответствии с разбиением базиса (5) имеется клеточное разбиение

$$B_j - I = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ -M_j & O & O \end{pmatrix}, \quad M_j = \left(\lambda_{ij}^k\right),$$

в силу соотношений (6). Здесь k — номер строки, а i — номер столбца в матрице M_j.

Аналогично предыдущему инвариантность τ относительно действия Z на T сопряжением равносильна условию кососимметричности

$$(YM_j)^\top = -YM_j, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{10}$$

Столбцы матрицы Y линейно независимы, поскольку матрица J' невырожденна. Поэтому

$$n \leq s \tag{11}$$

и Y имеет левую обратную матрицу. Следовательно, линейная независимость матриц M_j равносильна линейной независимости кососимметричных матриц

YM_j порядка $s \times s$. Размерность пространства кососимметричных матриц порядка $s \times s$ равна $s(s-1)/2$, поэтому

$$r \leq \frac{s(s-1)}{2}. \tag{12}$$

Из неравенств (9) и (12) следует, что коранги s и r подгруппы $T \cap Z$ и в T, и в Z не менее трех. Действительно, если $s \leq 2$, то $r \leq 1$ ввиду (12), а тогда $s = 0$ в силу (9) и $T = Z$. Это означает, что если в кристаллографической группе из $\mathbb{R}^{p,q}$ есть две решетки, то ее группа поворотов обязана содержать абелеву нормальную подгруппу $T/(T \cap Z)$ ранга ≥ 3, действующую тождественно в секциях цепочки подпространств

$$\mathbb{R}^{p,q} > \Sigma \geq O,$$

где Σ — вещественная линейная оболочка коммутанта $[T,\ Z]$. Теорема 1 доказана.

Из леммы 1 и перевода ее на матричный язык в доказательстве теоремы 1 вытекает

Лемма 2 (критерий существования двух решеток). *Существование двух псевдоевклидовых решеток Z и T в кристаллографической группе вида $G = TZ$ с корангами r и s для $T \cap Z$ в Z и T соответственно и ранга n для $[T, Z]$ эквивалентно существованию «кубика» $\left(\lambda_{ij}^k\right)$ целых чисел, где $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k \leq n$, а также пары матриц X и Y порядков $r \times n$ и $s \times n$ соответственно, максимального ранга n, таких, что*

(а) *все лицевые сечения L_i кубика $\left(\lambda_{ij}^k\right)$, заданные условием $i = \mathrm{const}$, линейно независимы; все боковые сечения M_j кубика $\left(\lambda_{ij}^k\right)$, заданные условием $j = \mathrm{const}$, линейно независимы;*

(б) *все матрицы XL_i и YM_j кососимметричны.*

Доказательство теоремы 2. Пусть $G = G(\Gamma, Z)$ — кристаллографическая группа в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ с решеткой Z ранга $p + q$ и группой поворотов Γ. Предположим, что T — решетка в группе G и $T \neq Z$.

Разберем сначала случай, когда $\min\{p, q\} \leq 1$.

Для евклидовых пространств условие 2 из леммы 1 означает, что T и Z коммутируют. Если учесть, что Z — максимальная абелева подгруппа, то при $T \neq Z$ это невозможно, т. е. решетка единственна.

Для пространств Минковского из леммы 1 следует, что операторы $\hat{a} - \hat{1}$ имеют ранг не более 1 и кососимметричны относительно ζ. Поскольку ранг кососимметричной матрицы четен, все такие операторы нулевые ввиду замечания 3 после леммы 1. Это означает, что T и Z коммутируют, $T = Z$.

Пусть теперь максимальная размерность изотропного подпространства относительно формы ζ равна двум. Можно считать, что в подходящем базисе соответствующая ζ квадратичная форма имеет вид

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2.$$

Фиксируем в $\mathbb{R}^{2,q}$, $q \geq 2$, максимальное изотропное подпространство

$$\Sigma = \{(\alpha, \beta, \alpha, \beta, 0, \ldots, 0)^\top \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Ввиду теоремы Витта любые два максимальных изотропных подпространства изометричны. Поэтому существует преобразование h пространства $\mathbb{R}^{2,q}$, сохраняющее форму ζ и такое, что $h([T,Z]) \subset \Sigma$. С учетом формулы

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\Gamma h^{-1} & hZ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

можно при необходимости заменить группу $G = G(\Gamma, Z)$ сопряженной в группе изометрий псевдоевклидова пространства и считать, что $[T,Z] \subset \Sigma$. Если A — матрица оператора $\hat{a}$, а J — матрица формы ζ в стандартном базисе пространства, то получаем соответственно, что столбцы матрицы $A - I$ содержатся в Σ, а матрица $J(A-I)$ должна быть обычной кососимметричной. Но

$$J(A-I) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma & -\lambda & -\nu & \dots \\ -\beta & -\delta & -\mu & -\xi & \dots \\ \alpha & \gamma & \lambda & \nu & \dots \\ \beta & \delta & \mu & \xi & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Если эта матрица кососимметрична, то $\alpha = \delta = \lambda = \xi = 0$, $\beta = -\gamma = -\mu = \nu$. Следовательно, множество матриц

$$A - I = \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

образует однопараметрическое семейство. Ввиду следствия из леммы 1 оно дискретно и как аддитивная группа изоморфно образу группы T при действии на Z сопряжением. Следовательно, это семейство аддитивно порождается одной матрицей. Поскольку ядро гомоморфизма $a \mapsto \hat{a}$, $a \in T$, совпадает с подгруппой $T \cap Z$ в силу самоцентрализуемости Z, группа $T/(T \cap Z)$ циклическая, $s = 1$. Ввиду неравенства (12) получаем $Z = T$, что противоречит нашему предположению. Теорема 2 доказана.

§ 3. Кристаллографические группы с двумя решетками

Здесь будут доказаны теоремы 3 и 4.

Доказательство теоремы 3. Используем лемму 2. Построим требуемые матрицы форм и кубик чисел $\left(\lambda_{ij}^k\right)$ в случае $p = q = r = s = n \geq 3$, $p \neq 4$, $m = 0$. В этом случае в матрицах форм J и J' подматрицы Q, R, V, W отсутствуют. Положим $P = U = O$, $X = Y = I$. Тогда билинейные формы ζ и τ симметрические и имеют тип (p,p). В этом случае кубик $\left(\lambda_{ij}^k\right)$ порядка $p \times p \times p$ (для краткости просто p) должен быть таким, что все его лицевые и боковые сечения кососимметричны. Двойная кососимметричность

$$\lambda_{ij}^k = -\lambda_{ik}^j, \quad \lambda_{ij}^k = -\lambda_{kj}^i \quad \forall i,j,k$$

влечет за собой симметричность кубика относительно поворота $i \mapsto j \mapsto k \mapsto i$ вокруг оси $i = j = k$ на угол $2\pi/3$:

$$\lambda_{ij}^k = -\lambda_{ik}^j = \lambda_{jk}^i,$$

а также кососимметричность горизонтальных сечений $k = \mathrm{const}$. Обратно, кососимметричность только лицевых сечений кубика и симметричность кубика относительно обратного поворота $k \mapsto j \mapsto i \mapsto k$ (равносильно, поворота $i \mapsto j \mapsto k \mapsto i$) влечет за собой кососимметричность боковых и горизонтальных сечений:

$$\lambda_{ij}^{k} = -\lambda_{ik}^{j} = -\lambda_{kj}^{i}, \quad \lambda_{ij}^{k} = -\lambda_{ik}^{j} = -\lambda_{ji}^{k}.$$

Представим теперь кубик порядка p в виде объединения вложенных кубиков возрастающих порядков с общей диагональю $i = j = k$, отвечающих возрастающей цепи множеств индексов

$$\{p\} \subset \{p, p-1\} \subset \{p, p-1, p-2\} \subset \ldots \subset \{p, p-1, p-2, \ldots, 1\}.$$

При этом каждый кубик получается из предыдущего добавлением трех внешних матриц-сечений на единицу большего порядка. Строим их так, чтобы эти внешние матрицы-сечения получались из одной поворотом вокруг оси $i = j = k$ на угол $2\pi/3$. Начнем с нулевого кубика порядка 2. Далее, начиная с порядка 3, каждую следующую внешнюю матрицу-сечение $i = \mathrm{const}$ берем так, чтобы это была целочисленная кососимметричная матрица с нулевыми первой строкой и первым столбцом. Дополнительно потребуем, чтобы это была матрица максимального ранга, независимая от предыдущих параллельных сечений. Например, при $p = 3$ внешние сечения кубика могут иметь вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
i \nwarrow & & -1 & & 1 & & \nearrow j \\
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 1 & & 0 & & -1 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & -1 & & 1 & & \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & k \downarrow & & &
\end{array}$$

Его лицевые сечения

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Поскольку $M_1 = -L_1$, $M_2 = -L_2$, $M_3 = -L_3$, то и боковые сечения тоже независимы.

В общем случае такой кубик существует при $p > 2$, $p \neq 4$. Докажем это утверждение.

Если $p \geq 3$ нечетно, то подматрица внешней лицевой матрицы-сечения, полученная удалением первой строки и первого столбца, имеет четный порядок $p - 1 \geq 2$. Выбираем ее так, чтобы определитель подматрицы был ненулевой и столбцы были бы независимыми. При повороте на угол $2\pi/3$ столбцы внешней лицевой матрицы становятся первыми строками боковых матриц-сечений. Поэтому боковые сечения, за исключением внешнего, будут линейно независимы. Если все боковые сечения зависимы, то внешнее сечение выражается линейно через остальные. Но его первая строка нулевая, а тогда все коэффициенты линейной комбинации будут нулевыми и внешнее боковое сечение будет нулевым. Получается противоречие, поскольку все внешние сечения по нашему выбору ненулевые.

Если $p \geq 4$ четно, то, удалив лицевое, боковое и верхнее внешние сечения, получим кубик нечетного порядка $p-1 \geq 3$. Его сечения входят в качестве подматриц в сечения исходного кубика порядка p, за исключением внешнего. По предыдущему можно выбрать их линейно независимыми. Размерность пространства кососимметричных матриц порядка $p-1$ равна $(p-1)(p-2)/2$. Она больше $p-1$ при $p>4$. Выберем внешнее сечение кубика порядка p так, чтобы его подматрица, полученная удалением первой строки и первого столбца, была кососимметричной и независимой от соответствующих подматриц остальных параллельных сечений. Тогда все параллельные сечения будут независимыми.

Отметим, что при $p=4$ такого кубика с независимыми сечениями не существует, позднее будет доказано даже более сильное утверждение (теорема 4).

Найдем автоморфизм, меняющий решетки местами. Легко видеть, что соответствие

$$a_i \longleftrightarrow b_i, \quad c_k \longleftrightarrow c_k, \quad i,k=1,\dots,p,$$

сохраняет определяющие соотношения группы $G=TZ$ и потому продолжается до изоморфизма (автоморфизма) группы G, меняющего местами подгруппы T и Z. Действительно, равенство (6) перейдет в верное равенство

$$[b_i,a_j]=\prod_k e_k^{\lambda_{ij}^k},$$

поскольку $\lambda_{ij}^k=-\lambda_{ji}^k$ ввиду кососимметричности k-сечений в построенном кубике $\left(\lambda_{ij}^k\right)$.

По построению коранг пересечения $Z\cap T$ в решетках Z и T равен p.

Пусть теперь $p<q$, $m=q-p$. Можно разложить псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{p,q}$ в ортогональную сумму псевдоевклидовых пространств

$$\mathbb{R}^{p,q}=\mathbb{R}^{p,p}\oplus\mathbb{R}^m,$$

где $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство. При $p\geq 3$, $p\neq 4$, выберем в пространстве $\mathbb{R}^{p,p}$ одну из построенных кристаллографических групп G с двумя решетками Z и T типа (p,p). Пусть R — абелева решетка в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, и пусть $G'=G\times R$ — прямое произведение групп. Тогда G' — кристаллографическая группа с двумя различными решетками $Z\times R$ и $T\times R$, которые, очевидно, можно считать снабженными G'-инвариантными билинейными симметричными формами типа (p,q). Автоморфизм группы G, меняющий местами решетки Z и T, можно продолжить на R тождественно. Тогда получится автоморфизм кристаллографической группы G', меняющий местами решетки $Z\times R$ и $T\times R$. Условие на коранги пересечения решеток, очевидно, снова выполнено.

Осталось разобраться со случаем, когда $p=4$, $q\geq p$. Применим предыдущую конструкцию разложения. Представим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{4,q}$ в виде ортогональной суммы псевдоевклидовых пространств

$$\mathbb{R}^{4,q}=\mathbb{R}^{3,3}\oplus\mathbb{R}^{1,q-3}.$$

Выберем в пространстве $\mathbb{R}^{3,3}$ одну из построенных кристаллографических групп G с двумя решетками Z и T типа $(3,3)$. Пусть R — решетка в пространстве

$\mathbb{R}^{1,q-3}$ и пусть $G' = G \times R$ — прямое произведение групп. Автоморфизм группы G, меняющий местами решетки Z и T, можно снова продолжить на R тождественно. Тогда получится автоморфизм кристаллографической группы G', меняющий местами решетки $Z \times R$ и $T \times R$. Коранг пересечения решеток в самих решетках в данном случае будет равен 3.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. С учетом теоремы 3 и неравенств (9) и (12) достаточно показать, что коранги пересечения различных решеток не могут одновременно равняться четырем. Используем лемму 2, предыдущие обозначения и допустим противное: $r = s = 4$.

Дальнейшие рассуждения разделим на шаги.

1. Матрицы XL_i линейно независимы, поскольку L_i линейно независимы и матрица X имеет левую обратную. Аналогично матрицы YM_j также линейно независимы.

2. Каждая из матриц XL_i, YM_j, L_i, M_j имеет ранг 2. Действительно, если каждый столбец кубика $\left(\lambda_{ij}^k\right)$ умножить на матрицу Y, то получим новый кубик с лицевыми сечениями YL_i и кососимметричными боковыми сечениями YM_j. Тогда каждое лицевое сечение YL_i содержит нулевую строку и $\operatorname{rk} YL_i < 4$. Но матрицы X и Y имеют левые обратные, поэтому $\operatorname{rk} XL_i = \operatorname{rk} L_i = \operatorname{rk} YL_i < 4$. С другой стороны, XL_i кососимметрична, и ее ранг четен. Если учесть линейную независимость матриц XL_i, то получаем $\operatorname{rk} XL_i = 2$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{rk} YM_j = 2$.

3. Матрица Y имеет левую обратную Y^{-1} порядка $n \times 4$, при этом $Y^{-1}Y = I$ — матрица порядка n. Тогда $XL_i = XIL_i = XY^{-1}YL_i = X'L_i'$, где $X' = XY^{-1}$, а $L_i' = YL_i$ — лицевое сечение нового кубика $\left(\nu_{ij}^k\right)$, полученного умножением всех столбцов старого кубика на Y. Его боковые сечения $M_j' = YM_j$ — кососимметричные матрицы. Заменяя старый кубик новым, можно избавиться от Y и считать, что существуют кубик (уже необязательно целых) чисел (λ_{ij}^k), $i, j, k = 1, \ldots, 4$, а также матрица X порядка 4×4 и ранга n такие, что все боковые сечения M_j кубика уже кососимметричны, а также кососимметричны все матрицы XL_i для лицевых сечений L_i. Кроме того, матрицы M_j линейно независимы между собой и имеют ранг 2. Аналогичное утверждение справедливо для матриц XL_i, а также для матриц L_i.

4. Если множество всех строк объединения матриц L_i, $i = 1, \ldots, 4$, содержится в собственном подпространстве из $\mathbb{R}^4$, то все строки удовлетворяют нетривиальному линейному уравнению $\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda_j x_j = 0$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{4} \lambda_j M_j = 0$, что противоречит линейной независимости боковых сечений M_j. Следовательно, среди системы строк объединения матриц L_i найдутся четыре независимые строки. Назовем их a, b, c, d. Можно считать, что они расположены ниже главной диагонали кососимметричных матриц M_j. Оставшиеся там же другие две строки обозначим через x, y.

5. Отметим возможные варианты мест пересечения строк a, b, c, d с кососимметричными матрицами M_j, учитывая, что $\operatorname{rk} L_i = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_j & -a_j & -b_j \\ x_j & 0 & -c_j & -d_j \\ a_j & c_j & 0 & -y_j \\ b_j & d_j & y_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -a_j & -x_j & -b_j \\ a_j & 0 & -c_j & -y_j \\ x_j & c_j & 0 & -d_j \\ b_j & y_j & d_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -a_j & -b_j & -x_j \\ a_j & 0 & -y_j & -c_j \\ b_j & y_j & 0 & -d_j \\ x_j & c_j & d_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что других вариантов пересечения нет.

6. Покажем, что строки x, y матриц L_i нулевые. Действительно, учитывая, что $\operatorname{rk} L_i = 2$, выразим их через независимые a, b, c или d в матрицах L_i, используя вхождения x и $-x$, y и $-y$. Имеем

$$x = \alpha a + \beta b = \gamma c + \delta d, \quad y = \alpha' a + \beta' c = \gamma' b + \delta' d.$$

Ввиду линейной независимости a, b, c, d, получаем $x = y = 0$. Следовательно, все сечения M_j имеют либо только тип I, либо только тип II, либо только тип III, где

$$\mathrm{I}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_j & -b_j \\ 0 & 0 & -c_j & -d_j \\ a_j & c_j & 0 & 0 \\ b_j & d_j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{II}: \begin{pmatrix} 0 & -a_j & 0 & -b_j \\ a_j & 0 & -c_j & 0 \\ 0 & c_j & 0 & -d_j \\ b_j & 0 & d_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{III}: \begin{pmatrix} 0 & -a_j & -b_j & 0 \\ a_j & 0 & 0 & -c_j \\ b_j & 0 & 0 & -d_j \\ 0 & c_j & d_j & 0 \end{pmatrix}.$$

7. В такой матрице M_j определитель подматрицы пересечения со строками $a, b, \pm c, \pm d$ порядка 2 равен нулю, иначе $\det M_j \neq 0$ ввиду формулы Лапласа разложения определителя по двум строкам. Следовательно, столбцы этой подматрицы линейно зависимы, а тогда и соответствующие столбцы M_j пропорциональны.

8. Пусть Xu, Xv — линейно независимые столбцы с номерами j и l кососимметричной матрицы XL_i ранга 2. Тогда подматрица из XL_i, задаваемая строками и столбцами j и l, не может быть нулевой, иначе XL_i — кососимметричная матрица ранга 2 и аналогично рассуждению из шага 7 столбцы Xu, Xv будут линейно зависимы. Значит, на местах (j, l) и (l, j) в XL_i стоят *ненулевые* взаимно противоположные элементы, допустим, α и $-\alpha$.

Ясно, что u, v также базис системы столбцов с номерами j, l для матрицы L_i. Тогда M_j и M_l ввиду шага 7 содержат пропорциональные столбцы λu и μv, лежащие в силу шага 6 в общем сечении L_m, где $m \neq i$. Поэтому кососимметричная матрица XL_m содержит столбцы $X(\lambda u) = \lambda(Xu)$ и $X(\mu v) = \mu(Xv)$ с номерами j, l, имеющие на местах (j, l) и (l, j) элементы $\lambda\alpha$ и $-\mu\alpha$. Ввиду кососимметричности $\lambda\alpha = \mu\alpha$, $\lambda = \mu$. Следовательно, базисные столбцы Xu, Xv матрицы XL_i и λXu, λXv матрицы XL_m с одинаковыми номерами j, l пропорциональны с *общим* коэффициентом λ.

9. Покажем, что $XL_m = \lambda XL_i$, привлекая кососимметричность матриц и условие на ранг. Это и даст необходимое противоречие с утверждением о их независимости из шага 1.

Используя рассуждения, аналогичные шагам 4–6, можно считать, что все кососиммметричные матрицы XL_i имеют только тип I, или только тип II, или только тип III. Допустим, что это тип I и

$$XL_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -\gamma & -\delta \\ \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть выделенные базисные столбцы суть 1-й и 3-й. Если $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ ввиду независимости 1-го и 3-го столбцов. Но тогда ранг XL_i равен 4, а не 2. Значит, $\alpha \neq 0$ и δ однозначно задается через α, β, γ в силу равенства

$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, вытекающего из условия на ранг XL_i. Поэтому XL_i однозначно восстанавливается по 1-му и 3-му столбцам из условий: кососимметричность, тип I и ранг 2. Если 1-й и 3-й столбцы умножить на λ, то получатся соответствующие столбцы матрицы XL_m. Поскольку XL_m кососимметрична, типа I и ранга 2, она полностью восстанавливается по своим 1-му и 3-му столбцам, и тогда $XL_m = \lambda XL_i$.

Аналогичные рассуждения проходят, если сменить номера базисных столбцов или тип.

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bieberbach L.* Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume. I // Math. Ann. 1911. Bd 70. S. 297–336.

2. *Bieberbach L.* Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume. II // Math. Ann. 1912. Bd 72. S. 400–412.

3. *Новиков С. П., Тайманов И. А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.

4. *Ле Ты Куок Тханг, Пиунихин С. А., Садов В. А.* Геометрия квазикристаллов // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 1. С. 41–102.

5. *Пиунихин С. А.* О квазикристаллографических группах в смысле Новикова // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 5. С. 81–87.

6. *Пиунихин С. А.* Несколько новых результатов о квазикристаллографических группах в смысле Новикова // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 3. С. 100–107.

7. *Гарипов Р. М., Чуркин В. А.* Квазикристаллографические группы в пространствах Минковского // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 780–799.

8. *Гарипов Р. М.* Группы орнаментов на плоскости Минковского // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 6. С. 655–682.

9. *Гарипов Р. М.* Кристаллографические классы в пространстве Минковского $R_{1,2}$ // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 3. С. 300–304.

10. *Гарипов Р. М.* Кристаллографические классы в 4-мерном пространстве Минковского // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 1. С. 31–53.

Статья поступила 28 января 2010 г.

Чуркин Валерий Авдеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
churkin@math.nsc.ru