Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО–ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВТ–УРАВНЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. Н. Глазатов

Аннотация. Рассмотрена задача о существовании и единственности периодического по выделенной пространственной переменной решения нестационарного ВТ-уравнения трансзвуковой газовой динамики. Исследован вопрос о повышении гладкости этого решения по временной переменной.

Ключевые слова: нестационарное ВТ-уравнение, x-периодическая начально-краевая задача, существование и единственность решения, повышение гладкости.

1. Введение. Формулировка основного результата

В работе [1] для описания плоско-параллельных нестационарных течений газа в околозвуковом диапазоне скоростей с учетом вязкости и теплопроводности выведено уравнение

$$\Phi_{xt} - \mu\Phi_{xxx} + \Phi_x\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = f(x, y, t), \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — константа. Авторы назвали (1) ВТ-*уравнением.* Функция $f(x, y, t)$ играет роль внешних массовых сил, производные Φ_x и Φ_y — компоненты вектора скорости газового потока в соответствующих направлениях, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал поля скоростей. В этой модели мы работаем в системе координат, в которой скорость звука считается равной нулю.

Здесь возникает вопрос о постановке и разрешимости задачи Коши и начально-краевых задач для уравнения (1) в различных областях. В настоящее время эта проблематика является практически открытой. Автору известны лишь монография [2; гл. 4, пп. 2, 3] и работа [3], где приведены постановки и доказана корректность начально-краевых задач для (1).

В работе доказана теорема существования и единственности решения новой совершенно иной начально-краевой задачи для уравнения (1).

Рассмотрим уравнение (1) в области $Q = G \times (0, T)$, где $G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$; $x \in (0, 2\pi)$, $y \in (0, 1)$, $0 < T < +\infty$.

Начально-краевая задача. *Найти в области* Q *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$\Phi|_{t=0} = \varphi(x, y), \tag{2}$$

$$D_x^j\Phi|_{x=0} = D_x^j\Phi|_{x=2\pi}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3}$$

$$\Phi_y|_{y=0} = \Phi_y|_{y=1} = 0. \tag{4}$$

Условия (4) — это условия непротекания. Что же касается (3), то в отличие от [2, 3] здесь не задаются нулевые значения Φ и Φ_x на соответствующих участках границы или на бесконечности, а требуется определенный режим течения газа. Это принципиальное отличие, которое и придает задаче новизну. Такой режим при всех $t \in (0, T)$ является собственно трансзвуковым в области G, поскольку ясно, что $\iint\limits_G \Phi_x \, dxdy = 0$. Следовательно, в невырожденном случае Φ_x меняет знак, а это и обеспечивает трансзвуковой характер течения.

Если говорить о физическом смысле поставленной задачи, то представляется адекватным следующий подход: имеется известное эволюционное уравнение (1), внешняя массовая сила и начальное возмущение, обладающие свойством x-периодичности, часто встречающимся в природе. Решается вопрос о том, будет ли это возмущение эволюционировать с течением времени, а если будет, то сохранит ли свойство x-периодичности.

Введем анизотропные пространства С. Л. Соболева $H(Q)$ и $V(G)$. Для обозначения производных высокого порядка по переменным x и y используются символы $D_x^{s_1}$, $D_y^{s_2}$, где s_i — порядок производной по соответствующей переменной.

Обозначим

$$\|f\|_{H(Q)} = \|f\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|f_x\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))},$$

$$\|\varphi\|_{V(G)} = \|\varphi\|_{W_2^2(G)} + \left\|D_x^3\varphi\right\|_{W_2^2(G)} + \left\|D_y^3\varphi\right\|_{W_2^1(G)}.$$

Введем условия согласования (в дальнейшем условия (A)):

$$D_x^l f|_{x=0} = D_x^l f|_{x=2\pi},\ l = 0,1,2; \quad D_x^s\varphi|_{x=0} = D_x^s\varphi|_{x=2\pi},\ s = 0,1,2,3,4;$$

$$f_y|_{y=0} = f_y|_{y=1} = 0, \quad \varphi_y|_{y=0} = \varphi_y|_{y=1} = D_y^3\varphi|_{y=0} = D_y^3\varphi|_{y=1} = 0.$$

Далее, введем усиленное необходимое условие (B):

$$\int_0^{2\pi} f(x,y,t)\,dx = 0 \quad \text{для п. в. } (y,t) \in (0,1)\times(0,T).$$

Необходимым условием разрешимости задачи (1)–(4) является условие

$$\iint\limits_G f(x,y,t)dxdy = 0 \quad \text{для п. в. } t \in (0,T),$$

но для наших целей требуется значительно более жесткое условие.

Наконец, укажем пространство $W(Q)$, в котором удалось найти решение $\Phi(x,y,t)$ задачи (1)–(4). Это пространство функций с нормой

$$\|\Phi\|_{W(Q)} = \|\Phi\|_{L^2(0,T;W_2^4(G))} + \|\Phi_t\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|\Phi_{xt}\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \left\|D_x^4\Phi\right\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))}.$$

Положим $\mu = 1$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y,t)\in H(Q)$, $\varphi(x,y)\in V(G)$ *и* $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x,y)dx=0$ *для п. в.* $y\in(0,1)$. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B). *Тогда существует решение* $\Phi(x,y,t)\in W(Q)$ *начально-краевой задачи* (1)–(4), *удовлетворяющее условию* $\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x,y,t)\,dx=0$ *для п. в.* $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$, *если* $(\|f\|_{H(Q)}+\|\varphi\|_{V(G)})<\alpha$, *где* $\alpha>0$ — *некоторое число, зависящее от* T. *При этом* $\alpha(T)\to 0$ *при* $T\to\infty$.

Решение из $W(Q)$ *задачи* (1)–(4), *удовлетворяющее указанному условию, единственно.*

Доказательство. Сначала вкратце приведем его схему. Основная идея состоит в том, что нелинейное слагаемое переносится в правую часть и считается известной функцией из $H(Q)$. На первом этапе решается линейная задача (нелинейное слагаемое вообще отсутствует). При этом получается основная априорная оценка решения этой задачи. Затем рассматривается эта же линейная задача с правой частью, равной $f-v_xv_{xx}$, где $v(x,y,t)$ — решение задачи, рассмотренной на первом этапе. Для обеспечения корректности дальнейших рассуждений важно показать, что гладкость решения линейной задачи такова, что $v_xv_{xx}\in H(Q)$, и задача с указанной правой частью разрешима в пространстве $W(Q)$. Далее применяется принцип сжимающих отображений. Для обеспечения сжатия требуется условие малости соответствующих норм начальной функции и правой части исходного уравнения.

2. Разрешимость линейной задачи и вывод основной априорной оценки

Рассмотрим в области Q линейное уравнение

$$Lu\equiv u_{xt}-u_{xxx}-u_{yy}=f(x,y,t). \tag{5}$$

Решение (5) должно удовлетворять начально-краевым условиям (2)–(4).

Лемма 1. *Пусть* $f(x,y,t)\in H(Q),\varphi(x,y)\in V(G)$ *и* $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x,y)\,dx=0$ *для п. в.* $y\in(0,1)$. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B). *Тогда существует решение* $u(x,y,t)\in W(Q)$ *начально-краевой задачи* (5), (2)–(4), *удовлетворяющее условию* $\int\limits_0^{2\pi}u(x,y,t)\,dx=0$ *для п. в.* $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$.

Решение из $W(Q)$ *задачи* (5), (2)–(4), *удовлетворяющее указанному условию, единственно.*

Доказательство. Будем искать решение задачи (5), (2)–(4) методом дискретизации по переменной t, одновременно аппроксимируя его гладкими функциями.

Функции $f(x,y,t)$ и $\varphi(x,y)$ можно представить в виде сходящихся соответственно в $H(Q)$ и $V(G)$ функциональных рядов, частичными суммами которых являются

$$f_m(x,y,t)=\sum_{k=1}^m\sum_{s=0}^m f_{ks}(t)\sin(kx)\omega_s(y)+\sum_{k=0}^m\sum_{s=0}^m \tilde f_{ks}(t)\cos(kx)\omega_s(y)$$

и

$$\varphi_m(x,y)=\sum_{k=1}^m\sum_{s=0}^m \varphi_{ks}\sin(kx)\omega_s(y)+\sum_{k=0}^m\sum_{s=0}^m \widetilde\varphi_{ks}\cos(kx)\omega_s(y),$$

где $\{\omega_s(y)\}_{s=0}^{\infty}$ — ортонормированные в $L^2(0,1)$ собственные функции задачи Штурма — Лиувилля $-\omega_{syy} = \lambda_s^2\omega_s$, $\omega_{sy}(0) = \omega_{sy}(1) = 0$. Нетрудно видеть, что $\omega_0(y) \equiv 1$, $\omega_s(y) = \sqrt{2}\cos\pi sy$, $s = 1, 2, \dots$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ — достаточно большое число. Обозначим $\tau = N^{-1}T$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\ell\big(u_m^n, u_m^{n-1}\big) \equiv \tau^{-1}\big(u_{mx}^n - u_{mx}^{n-1}\big) - u_{mxxx}^n - u_{myy}^n = f_m^n(x,y) \tag{6}$$

с условием

$$u_m^0(x,y) = \varphi_m(x,y), \tag{7}$$

где $f_m^n(x,y) = \tau^{-1} \int\limits_{(n-1)\tau}^{n\tau} f_m(x,y,\sigma)\,d\sigma$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Докажем разрешимость системы (6), (7) с краевыми условиями (3), (4) и то, что при любом $n = 1, 2, \dots, N$ выполнено равенство $\int\limits_0^{2\pi} u_m^n(x,y)\,dx = 0$ для всех $y \in (0,1)$.

Для u_m^n имеется уравнение

$$\ell_0 u_m^n \equiv \tau^{-1}u_{mx}^n - u_{mxxx}^n - u_{myy}^n = g_m^n, \tag{8}$$

где $g_m^n = f_m^n + \tau^{-1}u_{mx}^{n-1}$.

При фиксированном m решения $u_m^n(x,y)$ ищутся в виде

$$u_m^n(x,y) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} u_{ks}^n \sin(kx)\omega_s(y) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \tilde{u}_{ks}^n \cos(kx)\omega_s(y).$$

По аналогии с предыдущим для каждой функции $g_m^n(x,y)$ введем ее коэффициенты разложения по системе базисных функций, а именно g_{ks}^n ($k = 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, m$) и $\tilde{g}_{ks}^n$ ($k = 0, 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, m$). Эти коэффициенты последовательно по n определяются в ходе итерационного процесса. Выполняя дифференцирование в уравнении (8) и приравнивая коэффициенты при базисных функциях, получаем для определения u_{ks}^n и $\tilde{u}_{ks}^n$ алгебраическую систему уравнений, которая также решается в ходе итерационного процесса. Если $k \neq 0$, то u_{ks}^n и $\tilde{u}_{ks}^n$ находятся элементарным образом. Если $k = 0$, то получаются уравнения вида $\lambda_s^2\tilde{u}_{0s}^n = \tilde{g}_{0s}^n$. Для любого $n = 1, 2, \dots, N$ имеем $\tilde{g}_{0s}^n = 0$, $s = 0, \dots, m$. Это проверяется несложным прямым вычислением, если, помня о способе построения f_m^n, учитывать условие (B), эквивалентное тому, что $\tilde{f}_{0s}(t) = 0$ для п. в. $t \in (0,T)$; $s = 0, 1, 2, \dots$. В определении $\tilde{u}_{00}^n$ для любого n имеется произвол, и мы полагаем $\tilde{u}_{00}^n = 0$ для любого $n = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, разрешимость уравнения (8), а тем самым системы (6), (7) доказаны. Очевидно, что все u_m^n ($n = 1, 2, \dots, N$) удовлетворяют условиям (3), (4). Кроме того, для любого $n = 1, 2, \dots, N$ выполнено равенство $\int\limits_0^{2\pi} u_m^n(x,y)\,dx = 0$ для всех $y \in (0,1)$, поскольку оно эквивалентно тому, что $\tilde{u}_{0s}^n = 0$ при всех $s = 0, \dots, m$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Определим для каждого достаточно большого натурального N функцию $u_m^N(x,y,t)$, полагая $u_m^N(x,y,t) = u_m^n(x,y)$ при $t \in [n\tau, (n+1)\tau)$, где $n = 0, 1, \dots, N$. Определим функцию $f_m^N(x,y,t) = f_m^n(x,y)$ при $t \in [(n-1)\tau, n\tau)$, где $n = 1, 2, \dots, N$. Учитывая свойства $u_m^0(x,y) = \varphi_m(x,y)$, легко убедиться в том, что

$$\eta_m^N(y,t) \equiv \int\limits_0^{2\pi} u_m^N(x,y,t)\,dx = 0$$

для всех $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$.

Получим равномерные по N и m оценки семейства $\{u_m^N\}_{N,m\in\mathbb{N}}$.

Оценки производных по x выводятся достаточно просто. Сначала рассмотрим равенство

$$\sum_{n=1}^{N}\big(\ell_0 u_m^n, \exp(-\lambda(n-1)\tau)u_{mx}^n\big)_{L^2(G)} = \sum_{n=1}^{N}\big(f_m^n + \tau^{-1}u_{mx}^{n-1}, \exp(-\lambda(n-1)\tau)u_{mx}^n\big)_{L^2(G)},$$

где $\lambda > 0$ — произвольная константа.

Покажем, как получаются необходимые оценки.

Интегрирование по частям в рассматриваемом равенстве, неравенство Коши и «ε-неравенство» Юнга дают

$$\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^n\big)^2\,dxdy + \sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mxx}^n\big)^2\,dxdy$$
$$\le C(\varepsilon)\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(f_m^n\big)^2\,dxdy + \varepsilon\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^{n-1}\big)^2\,dxdy$$
$$+\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^{n-1}\big)^2\,dxdy.$$

Перенесем последний интеграл в правой части этого неравенства в левую часть со знаком минус и рассмотрим отдельно разность

$$\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^n\big)^2\,dxdy - \frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^{n-1}\big)^2\,dxdy.$$

Прибавим и вычтем выражение

$$\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda n\tau)\big(u_{mx}^n\big)^2\,dxdy$$

и преобразуем полученное к виду

$$I_1 + I_2 = \sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)(1-\exp(-\lambda\tau))\frac{\tau^{-1}}{2}\big(u_{mx}^n\big)^2\,dxdy$$
$$+\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \Big(\exp(-\lambda n\tau)\big(u_{mx}^n\big)^2 - \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^{n-1}\big)^2\Big)\,dxdy.$$

Первую сумму при достаточно малом τ можно оценить снизу:

$$I_1 \ge \frac{\lambda}{4}\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_G \exp(-\lambda(n-1)\tau)\big(u_{mx}^n\big)^2\,dxdy,$$

а от второй суммы останутся лишь два слагаемых:

$$I_2 = \frac{\tau^{-1}}{2} \iint\limits_G \exp(-\lambda T)\bigl(u_{mx}^N\bigr)^2\,dxdy - \frac{\tau^{-1}}{2} \iint\limits_G (\varphi_{mx})^2\,dxdy.$$

Первое слагаемое можно отбросить, а второе перенести в правую часть со знаком плюс. Теперь выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{N} \bigl(\|u_{mx}^n\|^2_{L^2(G)} + \|u_{mxx}^n\|^2_{L^2(G)}\bigr) \le \widetilde{C}_0 \left(\sum_{n=1}^{N} \|f_m^n\|^2_{L^2(G)} + \tau^{-1}\|\varphi_{mx}\|^2_{L^2(G)}\right).$$

Умножая обе части последнего неравенства на τ, заметим, что суммирование в левой части можно вести начиная с $n = 0$, при этом в правую часть добавится величина $\tau\bigl(\|\varphi_{mx}\|^2_{L^2(G)} + \|\varphi_{mxx}\|^2_{L^2(G)}\bigr)$, которая ограничена при $\tau \to 0$.

Затем рассмотрим равенство

$$-\sum_{n=1}^{N} \bigl(\ell_0 u_m^n, D_x^3 u_m^n\bigr)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N} \bigl(f_m^n + \tau^{-1} u_{mx}^{n-1}, D_x^3 u_m^n\bigr)_{L^2(G)}$$

и проведем аналогичные рассуждения. Вспоминая построение функций u_m^N и f_m^N, получаем равномерные по m, N оценки

$$\bigl\|D_x^s u_m^N\bigr\|_{L^2(Q)} \le C_1\bigl(\bigl\|f_m^N\bigr\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\bigr), \quad s = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем равномерность оценки по N и m означает то, что константы, входящие в нее, не зависят от N и m.

Теперь оценим u_{myy}^N. Обратимся к уравнению (8) и рассмотрим для каждого $p = 0, 1, \dots, m$ равенство $\bigl(\ell_0 u_m^n, \omega_p\bigr)_{L^2(0,1)} = \bigl(g_m^n, \omega_p\bigr)_{L^2(0,1)}$. В силу ортонормированности семейства $\{\omega_s\}_{s=0}^{\infty}$ из этого равенства получаем

$$\tau^{-1}\bigl(u_{mpx}^n - u_{mpx}^{n-1}\bigr) - u_{mpxxx}^n + \lambda_p^2 u_{mp}^n = f_{mp}^n, \tag{10}$$

где $u_{mp}^n(x) = \int\limits_0^1 u_m^n(x,y)\omega_p(y)\,dy$, $f_{mp}^n(x) = \int\limits_0^1 f_m^n(x,y)\omega_p(y)\,dy$, $n = 1, \dots, N$.

Ранее было показано, что $\int\limits_0^{2\pi} u_m^n(x,y)\,dx = 0$ для всех $y \in (0,1)$. Значит, $\int\limits_0^{2\pi} u_{mp}^n(x)\,dx = 0$, и по теореме о среднем существует $x_p \in (0, 2\pi)$ такое, что $u_{mp}^n(x_p) = 0$. Ясно, что x_p также зависит от n и m. Умножим левую и правую части (10) на $\lambda_p^2 u_{mpx}^n$ и проинтегрируем по x от x_p до 2π. Проинтегрируем, где нужно, по частям, а затем просуммируем итоговые выражения в левой и правой частях сначала по p от 0 до m, а потом по n от 1 до N и применим, где нужно, неравенство Коши. После этого умножим обе части полученного неравенства на τ. Применяя теорему о следах и, где необходимо, «ε-неравенство» Юнга с подходящими коэффициентами, получаем

$$\begin{aligned}\bigl\|u_{myy}^N(2\pi, y, t)\bigr\|_{L^2((0,1)\times(0,T))} \le C(\varepsilon)\bigl(\bigl\|f_{mx}^N\bigr\|_{L^2(Q)} + \bigl\|f_m^N\bigr\|_{L^2(Q)} \\ + \bigl\|D_x^4 u_m^N\bigr\|_{L^2(Q)}\bigr) + \|\varphi_{mxy}\|_{L^2(G)} + 2\sqrt{\varepsilon}\bigl\|u_{myy}^N\bigr\|_{L^2(Q)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Теперь рассмотрим равенство

$$- \tau \sum_{n=1}^{N} \big(\ell_0 u_m^n, \exp(-\lambda(n-1)\tau)\exp(-\alpha x) u_{myyx}^n\big)_{L^2(G)}$$
$$= -\tau \sum_{n=1}^{N} \big(f_m^n + \tau^{-1} u_{mx}^{n-1}, \exp(-\lambda(n-1)\tau)\exp(-\alpha x) u_{myyx}^n\big)_{L^2(G)},$$

где $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ — произвольные числа. В каждом члене под знаком суммы проинтегрируем по частям по y первое слагаемое в левой части и второе в правой части и по x остальные слагаемые в обеих частях рассматриваемого равенства, используем неравенство Коши и «ε_1-неравенство» Юнга с $\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{8}$, а также оценки (9), (11). В итоге получаем оценку

$$\begin{aligned}&\big\|u_{mxy}^N\big\|_{L^2(Q)} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\big\|u_{myy}^N\big\|_{L^2(Q)}\\ &\le C_2\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)} + \big\|D_x^4 u_m^N\big\|_{L^2(Q)} + \big\|u_{myy}^N(2\pi, y, t)\big\|_{L^2((0,1)\times(0,T))}\big)\\ &\qquad \le C_3\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)} + \big\|D_x^4 u_m^N\big\|_{L^2(Q)}\big) + \sqrt{\varepsilon} C_4 \big\|u_{myy}^N\big\|_{L^2(Q)}.\end{aligned}$$

Выбрав $\sqrt{\varepsilon} < \frac{C_4^{-1}\sqrt{\alpha}}{4}$, получим равномерную по N и m оценку

$$\big\|u_{myy}^N\big\|_{L^2(Q)} \le C_5\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big) + C_6\big\|D_x^4 u_m^N\big\|_{L^2(Q)}. \tag{12}$$

Если рассмотреть равенство

$$-\sum_{n=1}^{N} \big(\ell_0 u_{mx}^n, D_x^4 u_m^n\big)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N} \big(f_{mx}^n + \tau^{-1} u_{mxx}^{n-1}, D_x^4 u_m^n\big)_{L^2(G)},$$

то, используя интегрирование по частям и уже известные приемы, приходим к оценке

$$\big\|D_x^4 u_m^N\big\|_{L^2(Q)} \le \widetilde{C}\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big). \tag{13}$$

В терминах функций f_m^N и u_m^N уравнение (8) можно записать следующим образом:

$$\ell_1 u_m^N \equiv \tau^{-1}\big(u_{mx}^N(\cdot,t) - u_{mx}^N(\cdot,t-\tau)\big) - u_{mxxx}^N(\cdot,t) - u_{myy}^N(\cdot,t) = f_m^N(\cdot,t-\tau), \tag{14}$$

где $u_m^N(\cdot,\bar{t}) = \varphi_m(\cdot)$ при $\bar{t} < 0$ и $f_m^N(\cdot,\bar{t}) = f_m^1(\cdot)$ при $\bar{t} < 0$.

Обозначим через v_m^N выражение $\tau^{-1}\big(u_m^N(\cdot,t) - u_m^N(\cdot,t-\tau)\big)$.

Учитывая оценки (9), (12), (13) и уравнение (14), приходим к равномерным по N и m оценкам:

$$\big\|u_{myy}^N\big\|_{L^2(Q)} \le C_7\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \tag{15}$$

$$\big\|u_{mxy}^N\big\|_{L^2(Q)} \le C_8\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \tag{16}$$

$$\big\|v_{mx}^N\big\|_{L^2(Q)} \le C_9\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big). \tag{17}$$

Используя (4) и (15), можно получить оценку

$$\big\|u_{my}^N\big\|_{L^2(Q)} \le C_{10}\big(\big\|f_m^N\big\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big). \tag{18}$$

Теперь отметим, что для любой функции $z(x,y,t) \in L^2(Q)$ такой, что $z_x \in L^2(Q)$ и $\int\limits_0^{2\pi} z(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$, имеет место легко проверяемое неравенство

$$\|z\|_{L^2(Q)} \le M\|z_x\|_{L^2(Q)}, \tag{$*$}$$

где постоянная M не зависит от функции z.

Используя это неравенство, (9) и (17), можно вывести равномерные по N и m оценки

$$\left\|v_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{11}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \tag{19}$$

$$\left\|u_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{12}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big). \tag{20}$$

Далее мы не будем подробно описывать процедуру получения оценок старших производных. Просто берутся нужные производные левой и правой частей (14), а поскольку коэффициенты (14) постоянны, то замена соответствующей производной на новую функцию дает возможность повторения примененных ранее приемов.

Рассматривая равенства $\ell_1 u_{mx}^N = f_{mx}^N$, $\ell_1 u_{mxx}^N = f_{mxx}^N$, $\ell_1 u_{mxxx}^N = f_{mxxx}^N$ и используя в вычислениях (6), повторением проведенных ранее рассуждений получаем равномерные по N и m оценки

$$\left\|D_x^s u_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{13}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \quad s = 4,5,6, \tag{21}$$

$$\left\|D_x^j D_y^2 u_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{14}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \quad j = 1,2, \tag{22}$$

$$\left\|D_x^l v_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{15}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \quad l = 2,3. \tag{23}$$

Заметим, что, рассматривая равенство $\ell_1 u_{mxxx}^N = f_{mxxx}^N$, мы должны ограничиться только вычислениями, связанными с равенством

$$-\sum_{n=1}^{N}\big(\ell_0 u_{mxxx}^n, D_x^6 u_m^n\big)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N}\big(f_{mxxx}^n + \tau^{-1}u_{mxxxx}^{n-1}, D_x^6 u_m^n\big)_{L^2(G)},$$

но не повторять все другие вычисления.

При получении оценок в дальнейшем используется тот факт, что $D_y^3\omega_s(0) = D_y^3\omega_s(1) = 0$, $s = 0,1,\dots$.

Рассмотрим теперь два равенства: $\ell_1 u_{myy}^N = f_{myy}^N$ и $\ell_1 u_{mxyy}^N = f_{mxyy}^N$. Уже известными приемами с использованием неравенства $(*)$ получаем новые оценки, равномерные по N и m:

$$\left\|D_x^s D_y^2 u_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{16}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \quad s = 3,4, \tag{24}$$

$$\left\|D_x D_y^3 u_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{17}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \tag{25}$$

$$\left\|D_y^4 u_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{18}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \tag{26}$$

$$\left\|D_x^j D_y^2 v_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{19}\big(\left\|f_m^N\right\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\big), \quad j = 0,1. \tag{27}$$

Отличие в получении (26) по схеме получения (15) состоит в том, что на самом первом шаге здесь удобнее рассмотреть равенства

$$-\big(\ell_0 u_{myy}^n, \omega_p\big)_{L^2(0,1)} = -\big(g_{myy}^n, \omega_p\big)_{L^2(0,1)}, \quad p = 0,1,\dots,m.$$

В результате для каждого p приходим к равенству (10), обе части которого умножены на λ_p^2. Умножаем обе эти части скалярно в $L^2(x_p, 2\pi)$ на $\lambda_p^4 u^n_{mpx}$. Далее упомянутая схема проводится с очевидными изменениями.

Напомним, что и здесь, рассматривая равенство $\ell_1 u^N_{mxyy} = f^N_{mxyy}$, нужно ограничиться лишь вычислениями, связанными с равенством

$$-\sum_{n=1}^{N} \bigl(\ell_0 u^n_{mxyy}, D_x^4 D_y^2 u^n_m\bigr)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N} \bigl(f^n_{mxyy} + \tau^{-1} u^{n-1}_{mxxyy}, D_x^4 D_y^2 u^n_m\bigr)_{L^2(G)}.$$

Теперь рассмотрим равенства $\ell_1 u^N_{mxy} = f^N_{mxy}$ и $\ell_1 u^N_{mxxy} = f^N_{mxxy}$.

Используя оценки (22), (24)–(27), условия (4), а также условия $D_y^3 u^n_m\big|_{y=0} = D_y^3 u^n_m\big|_{y=1} = 0$ и принимая во внимание оба рассматриваемые равенства, приходим к оценкам

$$\bigl\|D_x^s D_y u^N_m\bigr\|_{L^2(Q)} \le C_{20}\bigl(\bigl\|f^N_m\bigr\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\bigr), \quad s = 2,3,4,5, \tag{28}$$

$$\bigl\|D_y^3 u^N_m\bigr\|_{L^2(Q)} \le C_{21}\bigl(\bigl\|f^N_m\bigr\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\bigr), \tag{29}$$

$$\bigl\|D_x^j D_y v^N_m\bigr\|_{L^2(Q)} \le C_{22}\bigl(\bigl\|f^N_m\bigr\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}\bigr), \quad j = 0,1,2. \tag{30}$$

Для получения (28) при $s = 5$ нужно провести вычисления, связанные с равенством

$$-\sum_{n=1}^{N} \bigl(\ell_0 u^n_{mxxy}, D_x^5 D_y u^n_m\bigr)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N} \bigl(f^n_{mxxy} + \tau^{-1} u^{n-1}_{mxxxy}, D_x^5 D_y u^n_m\bigr)_{L^2(G)}.$$

Для получения (30) при $j = 2$ следует воспользоваться первым из рассматриваемых равенств и оценками (25) и (28) при $s = 4$.

Теперь совершим предельный переход в равенстве (14) при фиксированном m и $N \to \infty$. Из построения f^N_m ясно, что $f^N_m \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f_m$ в $H(Q)$, а значит, правые части в формулах (9), (15)–(30) ограничены величинами, не зависящими от N. Поэтому в силу априорных оценок и свойства разностных отношений существуют функция $u_m \in W(Q)$ и подпоследовательность $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что $u^{N_k}_m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_m$ слабо в $L^2(Q)$, $D_x^{s_1} D_y^{s_2} u^{N_k}_m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} D_x^{s_1} D_y^{s_2} u_m$ слабо в $L^2(Q)$ и $D_x^{s_3} D_y^{s_4} v^{N_k}_m \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} D_x^{s_3} D_y^{s_4} u_{mt}$ слабо в $L^2(Q)$. Здесь $D_x^{s_1} D_y^{s_2} u^{N_k}_m$ и $D_x^{s_3} D_y^{s_4} v^{N_k}_m$ — производные, фигурирующие в (9), (15)–(30).

Следовательно, в равенстве (14) можно перейти к пределу при $k \to \infty$ на подпоследовательности N_k и получить равенство

$$u_{mxt} - u_{mxxx} - u_{myy} = f_m. \tag{31}$$

При этом для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\int\limits_0^{2\pi} u_m(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$. В самом деле, обозначим этот интеграл через $\eta_m(y,t)$ и рассмотрим произвольную функцию $\xi(y,t) \in L^2((0,1)\times(0,T))$. Используя уже сделанный вывод, имеем, что $\bigl(\eta^{N_k}_m, \xi\bigr)_{L^2((0,1)\times(0,T))}$ сходятся к $(\eta_m, \xi)_{L^2((0,1)\times(0,T))}$ при $k \to \infty$, но, как мы видели, $\eta^{N_k}_m(y,t) = 0$ для всех $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$ при любом $k \in \mathbb{N}$, а отсюда в силу произвольности ξ и следует доказываемое утверждение.

Все полученные априорные оценки остаются справедливыми и для семейства $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ с теми же константами, но правые части оценок зависят только от m. В оценках (17), (19), (23), (27), (30) вместо разностных отношений фигурируют производные u_{mt} по переменным x и y.

Поскольку $f_m \to f$ при $m \to \infty$ в $H(Q)$ и $\varphi_m \to \varphi$ при $m \to \infty$ в $V(G)$, повторяя уже приведенные аргументы, выводим, что существуют функция $u(x,y,t) \in W(Q)$ и подпоследовательность $\{m_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ такие, что $u_{m_l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u$ слабо в $W(Q)$. После этого осталось перейти к пределу на подпоследовательности $\{m_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ в равенстве (31).

Из способа построения приближенных решений и априорных оценок следует, что полученное решение $u(x,y,t) \in W(Q)$ уравнения (5) удовлетворяет краевым условиям и начальным данным. Используя уже сделанный вывод и теорему компактности, можно утверждать, что η_{m_l} сходятся к $\int\limits_0^{2\pi} u(x,y,t)\,dx$ при $l \to \infty$ в $L^2((0,1)\times(0,T))$ сильно и поэтому сходятся п. в. в $(0,1)\times(0,T)$ (на новой подпоследовательности), но, как мы видели, $\eta_{m_l}(y,t) = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$ при любом $l \in \mathbb{N}$, а отсюда следует, что полученное решение $u(x,y,t)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^{2\pi} u(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$.

Докажем единственность решения из $W(Q)$ начально-краевой задачи (5), (2)–(4), удовлетворяющего указанному условию.

Рассмотрим равенство $(Lu, \exp(-\lambda t)u_x)_{L^2(Q)} = 0$. Начальные данные здесь нулевые, а $\lambda > 0$ — произвольная константа. Интегрируя по частям, используя краевые условия (3), (4) и условие $\int\limits_0^{2\pi} u(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$, получаем, что $u \equiv 0$ п. в. в Q.

Кроме того, для полученного решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W(Q)} \le \widetilde{C}(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}), \tag{32}$$

где $\widetilde{C}$ не зависит от u, f и φ. Лемма 1 доказана.

3. Оценка нелинейного слагаемого

Теперь выберем функцию $v(x,y,t) \in W(Q)$ специальным образом. Но сначала докажем следующую важную лемму.

Лемма 2. *Если $v \in W(Q)$, то $v_x v_{xx} \in H(Q)$ и справедлива следующая оценка:*

$$\|v_x v_{xx}\|_{H(Q)} \le C_{23}(T)\|v\|^2_{W(Q)}, \tag{33}$$

где константа $C_{23}(T)$ не зависит от v и $C_{23}(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Доказательство. Сначала заметим, что из теоремы 3.1 в [4, гл. 1, п. 3.1] следует, что если $D_x^j v \in L^2\big(0,T; W_2^2(G)\big)$, $j = 1,2$, и $v_{xy} \in L^2\big(0,T; W_2^2(G)\big)$, а $D_x^j D_t v$, $v_{xyt} \in L^2\big(0,T; W_2^1(G)\big)$, то $D_x^j v$ и v_{xy} принадлежат пространству $C\big([0,T]; W_2^{3/2}(G)\big)$, и имеют место оценки

$$\big\|D_x^j v\big\|_{C([0,T];\, W_2^{3/2}(G))} \le C_{24}(T)\big(\big\|D_x^j v\big\|_{L^2(0,T;\, W_2^2(G))} + \big\|D_x^j D_t v\big\|_{L^2(0,T;\, W_2^1(G))}\big) \\ \le C_{24}(T)\|v\|_{W(Q)}$$

и

$$\|v_{xy}\|_{C([0,T];\, W_2^{3/2}(G))} \le C_{25}(T)(\|v_{xy}\|_{L^2(0,T;\, W_2^2(G))} + \|v_{xyt}\|_{L^2(0,T;\, W_2^1(G))}) \\ \le C_{25}(T)\|v\|_{W(Q)},$$

где $C_i(T) \to \infty$ при $T \to \infty$ для $i = 24,\ 25$. Приведенные выше рассуждения вместе с теоремой вложения 9.8 из [4, гл. 1, п. 9.4] приводят к следующим оценкам:

$$\left\|D_x^j v\right\|_{C(\bar{Q})} \le C_{26}(T)\|v\|_{W(Q)}, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\|v_{xy}\|_{C(\overline{Q})} \le C_{27}(T)\|v\|_{W(Q)},$$

где $C_i(T) \to \infty$ при $T \to \infty$ для $i = 26,\ 27$. Далее продолжим доказательство, используя неравенство Гёльдера и теорему вложения $W_2^1(Q)$ в $L^4(Q)$, справедливую для функций $v(x, y, t) \in W_2^1(Q)$, определенных в области $Q \subset \mathbb{R}^3$. Ограничимся оценками лишь старших производных. Оценки младших производных аналогичны и значительно проще.

Оценим $D_x^3(v_x v_{xx}) = 3(v_{xxx})^2 + 4D_x^4 v v_{xx} + D_x^5 v v_x$,

$$\left\|\left(D_x^3 v\right)^2\right\|_{L^2(Q)}^2 = \iiint\limits_Q \left|D_x^3 v\right|^4 dxdydt = \left\|D_x^3 v\right\|_{L^4(Q)}^4$$

$$\le C_{28}(T)\left\|D_x^3 v\right\|_{W_2^1(Q)}^4 \le C_{28}(T)\|v\|_{W(Q)}^4,$$

$$\|D^4 v_x v_{xx}\|_{L^2(Q)}^2 \le \|v_{xx}\|_{C(\overline{Q})}^2 \left\|D_x^4 v\right\|_{L^2(Q)}^2 \le C_{29}(T)\|v\|_{W(Q)}^4,$$

$$\left\|D_x^5 v v_x\right\|_{L^2(Q)}^2 \le \|v_x\|_{C(\overline{Q})}^2 \left\|D_x^5 v\right\|_{L^2(Q)}^2 \le C_{30}(T)\|v\|_{W(Q)}^4.$$

Далее,

$$D_x^2 D_y(v_x v_{xx}) = 3D_x^3 D_y v v_{xx} + 3D_x^3 v v_{xxy} + D_x^4 D_y v v_x + D_x^4 v v_{xy}.$$

Первое, третье и четвертое слагаемые оцениваются, как и выше, с использованием обеих теорем из [4]. Оценим второе слагаемое:

$$\left\|D_x^3 v v_{xxy}\right\|_{L^2(Q)}^2 \le \left(\iiint\limits_Q \left|D_x^3 v\right|^4 dxdydt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iiint\limits_Q |v_{xxy}|^4\, dxdydt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_{31}(T)\left\|D_x^3 v\right\|_{W_2^1(Q)}^2 \|v_{xxy}\|_{W_2^1(Q)}^2 \le C_{31}(T)\|v\|_{W(Q)}^4.$$

Наконец,

$$D_x D_y^2(v_x v_{xx}) = 2D_x^2 D_y^2 v v_{xx} + 2v_{xxy}^2 + v_{xyy} D_x^3 v + 2v_{xy} D_x^3 D_y v + v_x D_x^3 D_y^2 v.$$

Первое, четвертое и пятое слагаемые оцениваются, как показано выше,

$$\left\|D_x D_y^2 v D_x^3 v\right\|_{L^2(Q)}^2 \le C_{32}(T)\left\|D_x D_y^2 v\right\|_{W_2^1(Q)}^2 \left\|D_x^3 v\right\|_{W_2^1(Q)}^2 \le C_{32}(T)\|v\|_{W(Q)}^4,$$

$$\left\|v_{xxy}^2\right\|_{L^2(Q)}^2 \le C_{33}(T)\|v_{xxy}\|_{W_2^1(Q)}^4 \le C_{33}(T)\|v\|_{W(Q)}^4.$$

При этом отметим, что $C_i(T) \to \infty$ при $T \to \infty$ для $i = 28, \ldots, 33$. Лемма 2 доказана.

Функция $v_x v_{xx}$ должна удовлетворять условиям (A) и (B). Например, в качестве $v(x, y, t)$ можно взять решение задачи (5), (2)–(4), полученное ранее. Недостающие условия согласования следуют из априорной оценки (21) и из способа построения упомянутого решения. Все остальные условия согласования и условие (B), очевидно, выполняются.

4. Применение принципа сжимающих отображений. Единственность решения

Теперь рассмотрим уравнение

$$L\tilde{u} = f - v_x v_{xx} \equiv h(x,y,t) \tag{34}$$

и начально-краевые условия (2)–(4).

Функция v выбрана ранее, и в силу сказанного выше $h(x,y,t)$ принадлежит $H(Q)$ и удовлетворяет условиям (A) и (B). Задача (34), (2)–(4) имеет решение $\tilde{u}(x,y,t) \in W(Q)$ такое, что $\int\limits_0^{2\pi} \tilde{u}(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$, и такое решение единственно.

Таким образом, определено отображение $S : W(Q) \to W(Q)$, которое ставит в соответствие функции $v(x,y,t) \in W(Q)$ с перечисленными выше свойствами единственное решение $\tilde{u}(x,y,t) \in W(Q)$ задачи (34), (2)–(4) такое, что $\int\limits_0^{2\pi} \tilde{u}(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$.

Обозначим $\widetilde{B}_\rho = \Big\{ z \in W(Q) : \|z\|_{W(Q)} \le \rho, \int\limits_0^{2\pi} z(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T) \Big\}$. Обозначим через Ω область определения отображения S.

Лемма 3. *Существует $\rho > 0$ такое, что S переводит множество $\widetilde{B}_\rho \cap \Omega$ в себя и, действуя на этом множестве, является сжимающим.*

Доказательство. Воспользуемся оценками (32) и (33). Справедливо неравенство

$$\|\tilde{u}\|_{W(Q)} \le \widetilde{C}(\|h\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) \le \widetilde{C}(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) + C_{34}(T)\|v\|^2_{W(Q)}.$$

Пусть $v \in \widetilde{B}_\rho \cap \Omega$, где $\rho > 0$ выберем позже. Для доказательства нужного факта добьемся выполнения неравенства

$$\widetilde{C}(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) + C_{34}(T)\rho^2 \le \rho. \tag{35}$$

Рассмотрим трехчлен

$$P(\rho) \equiv \rho^2 - (C_{34})^{-1}\rho + C_{35}(T)(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}).$$

Очевидно, что для существования $\rho > 0$, при котором выполнено (35), необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $P(\rho)$ был положительным. Это эквивалентно выполнению неравенства

$$(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) < \frac{1}{4} C_{34}^{-2} C_{35}^{-1} \equiv \alpha_1(T).$$

Тогда $P(\rho)$ имеет два положительных корня ρ_- и ρ_+ ($\rho_- < \rho_+$). В качестве ρ возьмем ρ_-. Как следует из леммы 2, $\alpha_1(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Включение $Sv \in \Omega$ вытекает из того, что единственное решение $\tilde{u}(x,y,t) \in \widetilde{B}_{\rho_-}$ задачи (34), (2)–(4) в силу способа его построения обладает дополнительными свойствами, которые обеспечивают нужные условия согласования.

Теперь покажем, что отображение S является сжимающим.

Пусть $v_i \in \widetilde{B}_{\rho_-} \cap \Omega$, $\tilde{u}_i = Sv_i$, $i = 1, 2$, $z = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$, $\bar{v} = v_1 - v_2$. Рассмотрим равенство $Lz = -v_{1x}v_{1xx} + v_{2x}v_{2xx}$. Прибавляя величину $v_{1x}v_{2xx}$ к правой части этого равенства и вычитая ее же, имеем $Lz = -(v_{1x}\bar{v}_{xx} + \bar{v}_x v_{2xx})$. Воспользовавшись (32), получаем неравенство

$$\|z\|_{W(Q)} \le \widetilde{C}(\|v_{1x}\bar{v}_{xx}\|_{H(Q)} + \|\bar{v}_x v_{2xx}\|_{H(Q)}).$$

Оценивая каждое слагаемое в правой части с помощью оценки, аналогичной (33), учитывая то, что $\|v_i\|_{W(Q)} \le \rho_-$, $i = 1, 2$, приходим к неравенству

$$\|z\|_{W(Q)} \le C_{36}(T)\rho_- \|\bar{v}\|_{W(Q)}.$$

Из формулы для корней трехчлена $P(\rho)$ вытекает существование $\alpha_2(T) > 0$ такого, что если $(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) < \alpha_2$, то число ρ_- настолько мало, что $C_{36}(T)\rho_- < 1$, а значит, отображение S является сжимающим. При этом $\alpha_2(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

В качестве α можно взять $\min(\alpha_1, \alpha_2)$. Ясно, что $\alpha(T) \to 0$ при $T \to \infty$. Лемма 3 доказана.

Поскольку $\widetilde{B}_{\rho_-} \cap \Omega$ — полное метрическое пространство, отображение S имеет единственную неподвижную точку — функцию $\Phi(x, y, t) \in W(Q)$, которая и является решением исходной задачи (1)–(4). В силу способа построения решения удовлетворяются начально-краевые условия (2)–(4) и условие: $\int\limits_0^{2\pi} \Phi(x, y, t)\, dx = 0$ для п. в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

Замечание 1. Можно искать решение задачи (1)–(4), используя итерационный процесс

$$L\Phi^p = f - \Phi_x^{p-1}\Phi_{xx}^{p-1}, \quad \Phi^0(x, y, t) \equiv 0$$

и условия (2)–(4).

Докажем единственность решения из $W(Q)$ задачи (1)–(4), обладающего свойством: $\int\limits_0^{2\pi} \Phi(x, y, t)\, dx = 0$ для п. в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

Пусть Φ_1 и Φ_2 — два таких решения. Существует $R > 0$ такое, что $\Phi_i \in \widetilde{B}_R$, $i = 1, 2$. Сначала очевидным образом получаем, что

$$Lw = -\Phi_{1x}\Phi_{1xx} + \Phi_{2x}\Phi_{2xx},$$

где $w = \Phi_1 - \Phi_2$. Прибавляя величину $\Phi_{1x}\Phi_{2xx}$ к правой части этого равенства и вычитая ее же, рассмотрим равенство

$$(Lw, \exp(-\lambda t)w_x)_{L^2(Q)} = (-(\Phi_{1x}w_{xx} + w_x\Phi_{2xx}), \exp(-\lambda t)w_x)_{L^2(Q)}, \tag{36}$$

где $\lambda > 0$ выберем позже. После простого преобразования получим в правой части выражение $\iiint\limits_Q \big(\frac{1}{2}\Phi_{1xx} - \Phi_{2xx}\big)\exp(-\lambda t)w_x^2\, dxdydt$. В силу двух упомянутых теорем из [4] имеем оценку $\|\Phi_{ixx}\|_{C(\overline{Q})} \le C_{37}\|\Phi_i\|_{W(Q)} \le C_{37}R$, $i = 1, 2$. Интегрируя по частям в левой части (36) и учитывая упомянутую оценку, приходим к неравенству

$$\lambda\|w_x \exp(-\lambda t/2)\|^2_{L^2(Q)} \le C_{38}R\|w_x \exp(-\lambda t/2)\|^2_{L^2(Q)}.$$

Выбирая нужным образом λ и вспоминая свойство решения, получаем, что $w \equiv 0$ п. в. в Q. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Как было отмечено, необходимым условием разрешимости задачи (1)–(4) является условие: $\iint\limits_G f(x, y, t)\, dxdy = 0$ для п. в. $t \in (0, T)$, но это необходимое условие существования любого гладкого решения данной задачи. Условие (B) является по крайней мере достаточным для существования решения с интегральным свойством, указанным в теореме. Это свойство гарантирует единственность такого решения в $W(Q)$. Кроме того, как было хорошо видно, условие (B) играет важную роль при получении априорных оценок.

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *и функция* $\varphi(x,y)$ *такова, что* $\varphi_x(0,y) = \varphi_x(2\pi,y) > 0\,(<0)$ *для п. в.* $y \in (0,1)$. *Тогда существует* $t^* \in (0,T]$ *такое, что* $\Phi_x(0,y,t) = \Phi_x(2\pi,y,t) > 0\,(<0)$ *для п. в.* $(y,t) \in (0,1) \times (0,t^*)$.

Доказательство. Из принадлежности решения пространству W(Q) следует то, что $\Phi_x, \Phi_{xt} \in L^2\big(0,T; W_2^2(G)\big)$. В силу теоремы 3.1 из [4, гл. 1, п. 3.1] вытекает, что $\Phi_x \in C\big([0,T]; W_2^2(G)\big)$, а из теоремы вложения — что $\Phi_x \in C(\overline{Q})$. Ввиду этого и условий на начальную функцию существует $t^* \in (0,T]$ такое, что $\Phi_x(0,y,t) = \Phi_x(2\pi,y,t) > 0\,(<0)$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,t^*)$.

Следствие доказано.

5. Выводы и комментарии

Итак, установлено существование специальных «волнообразных» трансзвуковых течений газа, которые обладают рядом привлекательных свойств. Во-первых, они описываются гладкими функциями. Далее, решение задачи (1)–(4) найдено в шаре пространства $W(Q)$ достаточно малого радиуса, и, как мы видели, из этого можно вывести, что $\|\nabla_{x,y}\Phi\|_{C(\overline{Q})}$ также достаточно малая величина. Следовательно, полученное течение является околозвуковым, что соответствует априорным физическим предположениям, при которых выведено уравнение (1). Как уже отмечено, полученное течение является собственно трансзвуковым, т. е. имеются зоны дозвукового и свехзвукового течения и звуковые линии. Наконец, из следствия 1 вытекает то, что на некотором временном интервале на «входе» и «выходе» течение сохраняет дозвуковой либо свехзвуковой характер, заданный начальной функцией. Все эти свойства, возможно, могут быть полезными при обосновании численных расчетов, при компьютерном моделировании и при решении задач прикладного характера.

Здесь необходимо отметить, что при рассмотрении начально-краевых задач и задачи Коши для эволюционного уравнения (1) всегда стоит вопрос об их разрешимости на временном интервале $(0,\infty)$. Совершенно понятно, что тот метод, который был использован для доказательства теоремы 1, неприменим для случая, когда $t \in (0,\infty)$, и доказательство глобальных теорем существования требует иных методов. Заметим, однако, что в работе [2, гл. 3, п. 4] имеется теорема разрешимости другой начально-краевой задачи для (1) на интервале $(0,T)$ для любого $T \in (0,\infty)$ при малых входных данных из некоторого шара, радиус которого не зависит от T. Что касается задачи Коши для (1), то автору неизвестны ни результаты о локальной либо глобальной ее разрешимости, ни примеры разрушения гладких либо обобщенных решений за конечное время. Таким образом, эта важная проблема в настоящее время открыта.

6. Повышение гладкости решения по временной переменной

Представляет интерес вопрос о повышении гладкости по переменной t решения задачи (1)–(4). С этой целью на функции $f(x,y,t)$ и $\varphi(x,y)$ накладываются дополнительные условия гладкости и согласования.

Введем анизотропные пространства С. Л. Соболева $H_1(Q)$ и $V_1(G)$ с нормами

$$\|f\|_{H_1(Q)} = \|f\|_{H(Q)} + \left\|D_x^4 f\right\|_{L^2(Q)} + \|f_t\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|f_{txx}\|_{L^2(0,T;W_2^1(G))} + \left\|D_t D_x^4 f\right\|_{L^2(Q)},$$

$$\|\varphi\|_{V_1(G)} = \|\varphi\|_{L^2(G)} + \left\|D_x^4 \varphi\right\|_{W_2^2(G)} + \left\|D_y^3 \varphi\right\|_{W_2^1(G)} + \left\|D_x^2 D_y^3 \varphi\right\|_{L^2(G)} + \left\|D_x^7 \varphi\right\|_{L^2(G)}.$$

Пусть выполнены условия (A) и дополнительные условия согласования $D_x^3 f|_{x=0} = D_x^3 f|_{x=2\pi}$, $D_x^s \varphi|_{x=0} = D_x^s \varphi|_{x=2\pi}$, $s = 5, 6$. Обозначим эту совокупность условий через (A_1).

Введем функциональное пространство $W_1(Q)$, в котором ищется более гладкое решение $\Phi(x,y,t)$ задачи (1)–(4). Это анизотропное пространство с нормой

$$\|\Phi\|_{W_1(Q)} = \|\Phi\|_{L^2(0,T;W_2^4(G))} + \left\|D_x^4 \Phi\right\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|\Phi_t\|_{L^2(0,T;W_2^3(G))} + \|\Phi_{xxt}\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|\Phi_{tt}\|_{L^2(0,T;W_2^1(G))} + \|\Phi_{xtt}\|_{L^2(0,T;W_2^1(G))} + \left\|D_x^3 D_t^2 \Phi\right\|_{L^2(Q)} + \left\|D_x^4 D_t \Phi\right\|_{L^2(0,T;W_2^1(G))} + \left\|D_x^6 D_t \Phi\right\|_{L^2(Q)}.$$

Теорема 2. *Пусть $f(x,y,t) \in H_1(Q), \varphi(x,y) \in V_1(G)$ и $\int_0^{2\pi} \varphi(x,y)\,dx = 0$ для п. в. $y \in (0,1)$. Пусть выполнены условия (A_1) и (B). Тогда существует решение $\Phi(x,y,t) \in W_1(Q)$ начально-краевой задачи (1)–(4), удовлетворяющее условию: $\int_0^{2\pi} \Phi(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$, если $(\|f\|_{H_1(Q)} + \|\varphi\|_{V_1(G)}) < \beta$, где $\beta > 0$ — некоторое число, зависящее от T. При этом $\beta(T) \to 0$ при $T \to \infty$.*

Решение из $W_1(Q)$ задачи (1)–(4), удовлетворяющее указанному условию, единственно.

Доказательство. Сначала докажем аналог леммы 1.

Лемма 4. *Пусть $f(x,y,t) \in H_1(Q), \varphi(x,y) \in V_1(G)$ и $\int_0^{2\pi} \varphi(x,y)\,dx = 0$ для п. в. $y \in (0,1)$. Пусть выполнены условия (A_1) и (B). Тогда существует решение $u(x,y,t) \in W_1(Q)$ начально-краевой задачи (5), (2)–(4), удовлетворяющее условию: $\int_0^{2\pi} u(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$.*

Решение из $W_1(Q)$ задачи (5), (2)–(4), удовлетворяющее указанному условию, единственно.

Доказательство. Заметим, что при выполнении условий леммы существует единственное решение $u(x,y,t) \in W(Q)$ начально-краевой задачи (5), (2)–(4), удовлетворяющее указанному интегральному условию. Остается лишь получить дополнительные априорные оценки его производной по t. Очевидно, что их нельзя получить прямым дифференцированием уравнения (5) и нужно повторить доказательство леммы 1 с некоторыми изменениями.

С этой целью рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти в области Q решение уравнения

$$Lw \equiv w_{xt} - w_{xxx} - w_{yy} = f_t \equiv \tilde{g}(x,y,t), \tag{37}$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$w|_{t=0} = \psi(x,y), \tag{38}$$

$$D_x^j w|_{x=0} = D_x^j w|_{x=2\pi}, \quad j = 0,1,2, \tag{39}$$

$$w_y|_{y=0} = w_y|_{y=1} = 0. \tag{40}$$

Здесь $\psi(x,y)$ такова, что $\psi_x = \varphi_{xxx} + \varphi_{yy} + f(x,y,0)$. Сама функция $\psi(x,y)$ однозначно определяется условием $\int\limits_0^{2\pi} \psi(x,y) = 0$ для п. в. $y \in (0,1)$. Нетрудно проверить, что $\psi|_{x=0} = \psi|_{x=2\pi}$ и $\psi_y|_{y=0} = \psi_y|_{y=1} = 0$.

Нужно доказать разрешимость задачи (37)–(40) и получить упомянутые априорные оценки ее решения.

Функции $\tilde g(x,y,t)$ и $\psi(x,y)$ представимы в виде сходящихся в соответствующих пространствах функциональных рядов с частичными суммами

$$\tilde g_m(x,y,t) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^m f_{kst}(t)\sin(kx)\omega_s(y) + \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m \tilde f_{kst}(t)\cos(kx)\omega_s(y)$$

и

$$\psi_m(x,y) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=0}^m \psi_{ks}\sin(kx)\omega_s(y) + \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m \tilde\psi_{ks}\cos(kx)\omega_s(y).$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$ — достаточно большое число. Обозначим $\tau = N^{-1}T$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\ell(w^n, w^{n-1}) \equiv \tau^{-1}\big(w_{mx}^n - w_{mx}^{n-1}\big) - w_{mxxx}^n - w_{myy}^n = \tilde g_m^n(x,y) \tag{41}$$

с условием

$$w_m^0(x,y) = \psi_m(x,y), \tag{42}$$

где $\tilde g_m^n(x,y)$ $(n = 1,\dots,N)$ строятся так же, как и при доказательстве леммы 1.

Аналогично рассматривается уравнение

$$\ell_0 w \equiv \tau^{-1} w_{mx}^n - w_{mxxx}^n - w_{myy}^n = \bar g_m^n, \tag{43}$$

где $\bar g_m^n = \tilde g_m^n + \tau^{-1} w_{mx}^{n-1}$.

Разрешимость уравнения (43) доказывается точно так же, как и в лемме 1. В ходе решения надо лишь отметить, что в силу условия (B) $\tilde f_{0st}(t) = 0$ для п. в. $t \in (0,T)$, $s = 0,1,\dots$.

Так же, как и в доказательстве леммы 1, определяются функции $w_m^N(x,y,t)$ и $\tilde g_m^N(x,y,t)$ и схожим образом получаются априорные оценки семейства функций $\big\{w_m^N(x,y,t)\big\}_{m,N\in\mathbb{N}}$. Отметим лишь некоторые различия в их получении. Так, например, при интегрировании по частям некоторых выражений появляются нормы производных функции $\psi(x,y)$, и, как нетрудно видеть, для их оценок и требуется указанная гладкость функций f и φ. Производя те же вычисления, что и в доказательстве леммы 1, можно получить равномерные по N и m оценки (9), (15)–(20) с тем лишь отличием, что в левых частях будут фигурировать функции $w_m^N(x,y,t)$ вместо $u_m^N(x,y,t)$ и $z_m^N(x,y,t)$ вместо $v_m^N(x,y,t)$, а в правых — нормы в $H(Q)$ и в $V(G)$ будут заменяться нормами в $H_1(Q)$ и в $V_1(G)$. Через $z_m^N(x,y,t)$ обозначено выражение $\tau^{-1}\big(w_m^N(x,y,t) - w_m^N(x,y,t-\tau)\big)$.

Рассматривая равенства $\ell_1 w_{mx}^N = \tilde g_{mx}^N$, $\ell_1 w_{mxx}^N = \tilde g_{mxx}^N$ и $\ell_1 w_{mxxx}^N = \tilde g_{mxxx}^N$, повторением рассуждений из леммы 1 получаем равномерные по N и m оценки

$$\big\|D_x^s w_m^N\big\|_{L^2(Q)} \le C_{39}\big(\big\|f_m^N\big\|_{H_1(Q)} + \|\varphi_m\|_{V_1(G)}\big), \quad s = 4,5,6, \tag{44}$$

$$\left\|D_x^j D_y^2 w_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{40}\left(\left\|f_m^N\right\|_{H_1(Q)} + \|\varphi_m\|_{V_1(G)}\right), \quad j = 1, 2, \tag{45}$$

$$\left\|D_x^l z^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{41}\left(\left\|f_m^N\right\|_{H_1(Q)} + \|\varphi_m\|_{V_1(G)}\right), \quad l = 1, 2, 3. \tag{46}$$

Для дальнейшего отметим, что семейство функций $\{w_{sy}\}_{s=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему в $L^2(0,1)$.

Рассмотрим теперь равенства $\ell_1 w_{my}^N = \tilde{g}_{my}^N$ и $\ell_1 w_{mxy}^N = \tilde{g}_{mxy}^N$.

Уже известными методами получаем равномерные по N и m оценки

$$\left\|D_y^3 w_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{42}\left(\left\|f_m^N\right\|_{H_1(Q)} + \|\varphi_m\|_{V_1(G)}\right), \tag{47}$$

$$\left\|D_x^s D_y w_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{43}\left(\left\|f_m^N\right\|_{H_1(Q)} + \|\varphi_m\|_{V_1(G)}\right), \quad s = 1, 2, 3, 4, \tag{48}$$

$$\left\|D_x^j D_y z_m^N\right\|_{L^2(Q)} \le C_{44}\left(\left\|f_m^N\right\|_{H_1(Q)} + \|\varphi_m\|_{V_1(G)}\right), \quad j = 0, 1. \tag{49}$$

Отличие в получении оценки (47) по известной схеме состоит в том, что на самом первом шаге рассматриваются равенства

$$-\left(\ell_0 w_{my}^n, \omega_{py}\right)_{L^2(0,1)} = -\left(\bar{g}_{my}^n, \omega_{py}\right)_{L^2(0,1)}, \quad p = 0, 1, \ldots, m.$$

В результате для каждого p приходим к аналогу равенства (10), обе части которого умножены на λ_p^2. Умножим эти обе части скалярно в $L^2(x_p, 2\pi)$ на $\lambda_p^2 w_{mpx}^N$. Далее упомянутая схема проводится с очевидными изменениями.

Теперь совершаем в равенстве, аналогичном (14), предельный переход сначала при фиксированном m и $N \to \infty$, а затем при $m \to \infty$. В итоге очевидным образом получаем решение $w(x,y,t)$ начально-краевой задачи (37)–(40). При этом, повторяя соответствующую часть доказательства леммы 1, выводим, что $\int\limits_0^{2\pi} w(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$.

Гладкое решение $w(x,y,t)$ задачи (37)–(40), обладающее указанным выше свойством, единственно.

Теперь покажем, что $w = u_t$, где $u(x,y,t) \in W(Q)$ — решение начально-краевой задачи (5), (2)–(4). Заметим, что из оценок (23), (27) и условий леммы 4 на $f(x,y,t)$ следует, что уравнение (5) допускает дифференцирование по t и u_t удовлетворяет уравнению $Lu_t = f_t$. Как показано, $u_{xtt} \in L^2(Q)$, а значит, определен след u_{xt} при $t = 0$. Он определяется из уравнения (5) и $u_{xt}|_{t=0} = \varphi_{xxx} + \varphi_{yy} + f(x,y,0)$. Значит, w и u_t удовлетворяют одному и тому же уравнению (5) с правой частью f_t и одним и тем же начально-краевым условиям. При этом справедливо равенство $\int\limits_0^{2\pi} u_t(x,y,t)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} w(x,y,t)\,dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$. Гладкое решение задачи (37)–(40), для которого справедливо указанное равенство, единственно, но мы точно знаем, что $u_t(x,y,t)$ — решение этой задачи. Значит, $w = u_t$, и все полученные априорные оценки справедливы для u_t и u_{tt}. Это обстоятельство гарантирует то, что $u(x,y,t) \in W_1(Q)$, если вспомнить определение этого пространства.

Кроме того, для полученного решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W_1(Q)} \le \widetilde{C}_1(\|f\|_{H_1(Q)} + \|\varphi\|_{V_1(G)}),$$

где $\widetilde{C}_1$ не зависит от u, f и φ. Лемма 4 доказана.

Действуя так же, как и при доказательстве теоремы 1, выберем функцию $v(x,y,t) \in W_1(Q)$ специальным образом. Но сначала докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Если $v \in W_1(Q)$, то $v_x v_{xx} \in H_1(Q)$, и справедлива оценка*

$$\|v_x v_{xx}\|_{H_1(Q)} \leq C_{45}(T)\|v\|^2_{W_1(Q)}, \tag{50}$$

где постоянная C_{45} не зависит от v. При этом $C_{45}(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Доказательство. Докажем соответствующие оценки для производных $D_t D_x^4(v_x v_{xx})$, $D_x^2 D_y D_t(v_x v_{xx})$ и $D_y^2 D_t(v_x v_{xx})$. Младшие производные оцениваются аналогично.

Заметим, что из априорных оценок, теорем вложения и упомянутых теорем из [4] можно получить оценки $\|v_{xt}\|_{C(\overline{Q})} \leq C_{46}(T)\|v\|_{W_1(Q)}$ и $\|D_x^3 v\|_{C(\overline{Q})} \leq C_{47}(T)\|v\|_{W_1(Q)}$, где $C_i(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, $i = 46, 47$. Теперь при вычислении, получаем, что

$$D_t D_x^4(v_x v_{xx}) = v_{xt} D_x^6 v + v_x D_x^6 D_t v + 5 v_{xx} D_x^5 D_t v + 5 v_{xxt} D_x^5 v \\ + 10 D_x^3 D_t v D_x^4 v + 10 D_x^3 v D_x^4 D_t v.$$

В силу отмеченных выше фактов и тех же выводов, что и при доказательстве леммы 2, заметим, что первое, второе, третье и шестое слагаемые здесь оцениваются легко. При оценке четвертого и пятого слагаемых используем полученные в лемме 4 априорные оценки.

Итак,

$$\left\|v_{xxt} D_x^5 v\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \|v_{xxt}\|^2_{L^4(Q)} \left\|D_x^5 v\right\|^2_{L^4(Q)} \leq C_{48}(T)\|v_{xxt}\|^2_{W_2^1(Q)} \left\|D_x^5 v\right\|^2_{W_2^1(Q)} \\ \leq C_{48}(T)\|v\|^4_{W_1(Q)},$$

$$\left\|D_x^3 D_t v D_x^4 v\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \left\|D_x^3 D_t v\right\|^2_{L^4(Q)} \left\|D_x^4 v\right\|^2_{L^4(Q)} \\ \leq C_{49}(T) \left\|D_x^3 D_t v\right\|^2_{W_2^1(Q)} \left\|D_x^4 v\right\|^2_{W_2^1(Q)} \leq C_{49}(T)\|v\|^4_{W_1(Q)}.$$

Далее,

$$D_x^2 D_y D_t(v_x v_{xx}) = v_{xy} D_x^4 D_t v + v_{xyt} D_x^4 v + v_{xt} D_x^4 D_y v + v_x D_x^4 D_y D_t v \\ + 3 v_{xx} D_x^3 D_y D_t v + 3 v_{xxt} D_x^3 D_y v + 3 D_x^3 v D_x^2 D_y D_t v + 3 D_x^3 D_t v v_{xxy}.$$

Рассуждая, как и выше, приходим к выводу, что оценки первого, третьего, четвертого, пятого и седьмого слагаемых затруднений не вызывают. Оценим, как и выше, оставшиеся три слагаемых:

$$\left\|v_{xyt} D_x^4 v\right\|^2_{L^2(Q)} \leq \|v_{xyt}\|^2_{L^4(Q)} \left\|D_x^4 v\right\|^2_{L^4(Q)} \leq C_{50}(T)\|v_{xyt}\|^2_{W_2^1(Q)} \left\|D_x^4 v\right\|^2_{W_2^1(Q)} \\ \leq C_{50}(T)\|v\|^4_{W_1(Q)},$$

точно так же

$$\left\|v_{xxt} D_x^3 D_y v\right\|^2_{L^2(Q)} \leq C_{51}(T)\|v_{xxt}\|^2_{W_2^1(Q)} \left\|D_x^3 D_y v\right\|^2_{W_2^1(Q)} \leq C_{51}(T)\|v\|^4_{W_1(Q)},$$

аналогично

$$\left\|D_x^3 D_t v v_{xxy}\right\|^2_{L^2(Q)} \leq C_{52}(T) \left\|D_x^3 D_t v\right\|^2_{W_2^1(Q)} \|v_{xxy}\|^2_{W_2^1(Q)} \leq C_{52}(T)\|v\|^4_{W_1(Q)}.$$

Наконец,

$$D_y^2 D_t(v_x v_{xx}) = v_{xx} D_x D_y^2 D_t v + 3 v_{xxy} v_{xyt} + 2 v_{xy} D_x^2 D_y D_t v \\ + v_x D_x^2 D_y^2 D_t v + v_{xt} D_x^2 D_y^2 v.$$

Оценка первого, третьего, четвертого и пятого слагаемых не вызывает затруднений, а при внимательном рассмотрении второго слагаемого можно убедиться в том, что и в этом случае априорные оценки гарантируют возможность оценить его, как это уже демонстрировалось выше. При этом $C_i(T) \to \infty$ при $T \to \infty$, $i = 48, \dots, 52$. Лемма 5 доказана.

Оставшаяся часть доказательства полностью воспроизводит соответствующую часть доказательства теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо пространств $W(Q)$, $H(Q)$ и $V(G)$ появляются пространства $W_1(Q)$, $H_1(Q)$ и $V_1(G)$.

Единственность решения может быть доказана точно так же, как и в теореме 1. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 6. С. 996–1007.

2. *Ларькин Н. А.* Гладкие решения уравнений трансзвуковой газодинамики. Новосибирск: Наука, 1991.

3. *Ларькин Н. А.* К теории неравновесных трансзвуковых течений в неограниченных областях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 6. С. 1337–1340.

4. *Лионс Ж.- Л., Мадженес* Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. Т. 1.

Статья поступила 23 января 2009 г.

Глазатов Сергей Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
glaz@math.nsc.ru