Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512.545

О МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ m–ГРУПП

А. В. Зенков

Аннотация. Изучается решетка многообразий m-групп. Основным результатом является описание накрытий наименьшего нетривиального многообразия m-групп.

Ключевые слова: m-группа, многообразие, накрытие, решетка.

1. Введение

Напомним, что *m-группой* называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _{*} \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ-группой и одноместная операция $_{*}$ — автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, (x_*)_* = x, (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

Класс $\mathscr{M}$ всех m-групп образует многообразие сигнатуры m. Множество всех многообразий m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп. Тривиальное многообразие m-групп $\mathscr{E}_m$ является наименьшим элементом M. Будем говорить, что многообразие m-групп $\mathscr{X}$ является *накрытием* многообразия m-групп $\mathscr{Y}$ ($\mathscr{X}$ накрывает $\mathscr{Y}$), если $\mathscr{Y} \subsetneqq \mathscr{X}$ и для любого многообразия m-групп $\mathscr{Z}$ такого, что $\mathscr{Y} \subseteqq \mathscr{Z} \subseteqq \mathscr{X}$, выполнено $\mathscr{Z} = \mathscr{Y}$ либо $\mathscr{Z} = \mathscr{X}$. В [1], в частности, доказано, что многообразие m-групп $\mathscr{I}$, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, является накрытием $\mathscr{E}_m$ и что многообразие всех абелевых m-групп $\mathscr{A}_m$ накрывает $\mathscr{I}$. В работе [2] построено неабелево накрытие $\mathscr{S}$ многообразия $\mathscr{I}$. В данной работе доказано, что многообразия $\mathscr{A}_m$ и $\mathscr{S}$ являются единственными накрытиями $\mathscr{I}$ (теорема 2.10).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [3, 4] соответственно.

2. Основной результат

В дальнейшем m-группу G с отмеченным автоморфизмом $_*$ будем записывать как пару $(G, {}_*)$. Рассмотрим группу

$$S_2 = \big\langle a_0, a_1, b \mid [a_0, a_1] = e, a_0^b = a_1, a_1^b = a_0 \big\rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = b^k a_0^m a_1^n$, $k, m, n \in \mathbf{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т. е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, S_2 является ℓ-группой. Определим отображение $_* : S_2 \to S_2$ по правилу

$$(g)_* = b^{-k} a_0^{-m} a_1^{-n}.$$

Тогда $(S_2, {}_*)$ будет m-группой. Пусть $\mathscr{S} = \mathrm{var}_m((S_2, {}_*))$. В [2] доказано, что $\mathscr{S}$ является накрытием $\mathscr{I}$.

Пусть $(G, \geq)$ — некоторая ℓ-группа. Через G^* обозначим ℓ-группу, полученную из G путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $G \times G^*$ является ℓ-группой. Пусть $(x, y) \in G \times G^*$. Определим отображение $\mathrm{Exch} : G \times G^* \to G \times G^*$ по правилу $(x, y)\,\mathrm{Exch} = (y, x)$. Тогда пара $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ будет m-группой. Хорошо известно (см., например, [1]), что многообразие всех абелевых m-групп $\mathscr{A}_m$ порождается $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*, \mathrm{Exch})$, где $\mathbf{Z}$ — естественно упорядоченная аддитивная группа целых чисел. Здесь же отметим, что многообразие m-групп $\mathscr{I}$ порождается m-группой $(\mathbf{Z}, \mathrm{Inv})$, где $(z)\,\mathrm{Inv} = -z,\ z \in \mathbf{Z}$.

Лемма 2.1. *Пусть $(G, {}_*)$ — произвольная m-группа. Предположим, что существует неединичный $g \in (G, {}_*)$ такой, что $g_* = g$. Тогда $(G, {}_*)$ содержит m-подгруппу, m-изоморфную* $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.

Доказательство. Так как $g_* = g$, то g не сравним с e. Поэтому $g^+ = g \vee e > e$ и $(g^-)^{-1} = g^{-1} \vee e > e$. Далее, $(g^+)_* = (g \vee e)_* = g \wedge e = g^-$. Следовательно, m-подгруппа, порожденная элементом g^+, будет m-изоморфна $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$. $\square$

Через $\mathscr{C}$ обозначим многообразие m-групп, определяемое тождеством $[x, x_*] = e$.

Лемма 2.2. *Пусть m-группа $(G, {}_*)$ принадлежит $\mathscr{C} \setminus \mathscr{I}$. Тогда $(G, {}_*)$ содержит m-подгруппу, m-изоморфную* $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.

Доказательство. Так как $(G, {}_*) \notin \mathscr{I}$, существует $x \in (G, {}_*)$ такой, что $x_* \neq x^{-1}$. Поэтому $g = x_* x \neq e$ и $g_* = (x_* x)_* = x x_* = x_* x = g$. Применение леммы 2.1 завершает доказательство. $\square$

Замечание. Всякий элемент $x_* x \neq e$ не сравним с e.

Действительно, если, например, $x_* x > e$, то $(x_* x)^{x^*} = x x_* > e$. С другой стороны, $(x_* x)_* = x x_* < e$; противоречие. Из замечания получаем

Следствие 2.3 [5]. *Всякая упорядоченная m-группа содержится в многообразии $\mathscr{I}$.*

Напомним, что два строго положительных элемента x, y произвольной ℓ-группы G называются *ортогональными*, если $x \wedge y = e$. В этом случае пишем $x \perp y$. Отметим здесь же, что ортогональные элементы перестановочны.

Лемма 2.4. *Пусть $(G, {}_*)$ — произвольная m-группа. Предположим, что существует $g > e \in (G, {}_*)$ такой, что $g_*^{-1} \perp g$. Тогда $(G, {}_*)$ содержит m-подгруппу, m-изоморфную* $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$.

Доказательство. Так как $g \perp g_*^{-1}$, во-первых, $x = g g_* \neq e$ и, во-вторых, $x_* = x$. Далее применяем лемму 2.1. $\square$

В работе [6] на решетке многообразий ℓ-групп L определен автоморфизм второго порядка ϕ. Напомним его определение. Пусть $V = \{G_i \mid i \in I\}$ — произвольное многообразие ℓ-групп. Тогда $\phi(V) = \{G_i^* \mid i \in I\}$. Если $V = \phi(V)$, то многообразие ℓ-групп V называется *реверсивным.* Хорошо известно (см., например, [6]), что многообразие всех o-аппроксимируемых ℓ-групп $\mathscr{R}$ реверсивно.

В [1] отмечено, что система тождеств, определяющая реверсивное многообразие ℓ-групп, задает некоторое многообразие m-групп. Следовательно, тождество $(y^{-1}x^{-1}y \wedge x) \vee e = e$, определяющее $\mathscr{R}$, задает и многообразие $\mathscr{R}_m$

всех o-аппроксимируемых m-групп. Всякую m-группу из $\mathscr{R}_m$ будем называть *o-аппроксимируемой.*

Предложение 2.5. *Всякая o-аппроксимируемая m-группа, не лежащая в $\mathscr{I}$, содержит m-подгруппу, m-изоморфную* $(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z},\mathrm{Exch})$.

Доказательство. Пусть $(G,\,_*\,)$ o-аппроксимируема и $(G,\,_*\,)\notin\mathscr{I}$. Тогда существует $g>e\in(G,\,_*\,)$ такой, что $a=gg_*\neq e$. Так как $(G,\,_*\,)$ o-аппроксимируема, в ней верно тождество $(x\wedge y^{-1}x^{-1}y)\vee e=e$. Положим $x=a$, $y=g_*^{-1}$. Тогда $(gg_*\wedge(g_*^{-1}g^{-1})^{g_*^{-1}})\vee e=e$. Следовательно, $gg_*\vee e\perp g^{-1}g_*^{-1}\vee e$. Применение леммы 2.4 завершает доказательство. $\square$

Назовем многообразие m-групп $\mathscr{X}$ *o-аппроксимируемым*, если $\mathscr{X}\subseteq\mathscr{R}_m$.

Следствие 2.6. *Многообразие всех абелевых m-групп $\mathscr{A}_m$ — единственное o-аппроксимируемое накрытие $\mathscr{I}$.*

Пусть $\mathscr{V}$ — неабелево накрытие $\mathscr{I}$ и m-группа $(G,\,_*\,)$ принадлежит $\mathscr{V}\setminus\mathscr{I}$. Тогда в m-группе $(G,\,_*\,)$ найдется элемент $g>e$ такой, что $g_*\neq g^{-1}$ и $t=g\wedge g_*^{-1}>e$. Отметим, что $t_*=t^{-1}$. Далее,

$$gg_*^t=t^{-1}gg_*t=(g^{-1}\vee g_*)gg_*(g\wedge g_*^{-1})=(e\vee g_*g)(g_*g\wedge e)=g_*g. \tag{1}$$

Определим элемент

$$r=(g_*^{-1}g^{-1}\wedge gg_*^t)\vee e.$$

Из (1) следует, что $r=(g_*^{-1}g^{-1}\vee e)\wedge(g_*g\vee e)$. Как и при доказательстве предложения 2.5, получаем, что $r=a_*^{-1}\wedge a$, где $a=g_*g\vee e$. Следовательно, $r>e$ и $r_*=r^{-1}$. Далее,

$$r^{t^{-1}}\wedge r=(g_*^{-1}g^{-1}\vee e)^{t^{-1}}\wedge(gg_*\vee e)\wedge(g_*^{-1}g^{-1}\vee e)\wedge(g_*g\vee e).$$

Заметим, что $gg_*\vee e=(gg_*)^+$, а $g_*^{-1}g^{-1}\vee e=((gg_*)^-)^{-1}$. Так как положительная и отрицательная части одного и того же элемента ортогональны, имеем $r\perp r^{t^{-1}}$. Таким образом, в m-группе $(G,\,_*\,)$ существуют элементы r,t такие, что

$$r_*=r^{-1},\quad t_*=t^{-1},\quad r^t\perp r.$$

Пусть x,y — элементы произвольной m-группы такие, что $x_*=x^{-1},y_*=y^{-1}$. Тогда их коммутатор $[x,y]$ либо равен e, либо не сравним с e. Действительно, если, например, $[x,y]>e$, то $[x,y]_*=[x_*,y_*]=[x^{-1},y^{-1}]=[x,y]^{x^{-1}y^{-1}}<e$, что ведет к противоречию.

Таким образом, коммутатор $[r,t^2]$ либо равен e, либо не сравним с e. В первом случае $r^t=r^{t^{-1}}$ и тогда m-группа, порожденная r и t, будет m-изоморфна $(S_2,\,_*\,)$, что означает $\mathscr{V}=\mathscr{S}$. Во втором случае, очевидно, элементы r^t, $r^{t^{-1}}$ несравнимы.

Напомним, что строго положительные элементы x,y произвольной ℓ-группы G являются *архимедово эквивалентными*, если существуют натуральные m,n такие, что $x^m\leq y$ и $y^n\leq x$. Этот факт будем обозначать через $x\sim y$.

Лемма 2.7. *Если элементы r^t и $r^{t^{-1}}$ архимедово эквивалентны, то многообразие $\mathscr{V}$ совпадает с многообразием $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathscr{V}$ содержит m-подгруппу, m-изоморфную $(S_2,\,_*\,)$. Так как элементы r^t и $r^{t^{-1}}$ архимедово эквивалентны, существует натуральное $n\geq 2$ такое, что $(r^n)^{t^{-1}}\geq r^t$. Сопрягая последнее неравенство t, получаем $r^n\geq r^{t^2}$. Рассмотрим декартово произведение

$H = \prod_{i\in\mathbf{N}} (G, {}_*\,)_i$ и элементы $T = (t, t, \dots, t, \dots)$, $R = (r, r^n, r^{n^2}, \dots, r^{n^n}, \dots)$, принадлежащие H. Из свойств элементов r и t следует, что $T_* = T^{-1}$, $R_* = R^{-1}$ и $R^T \perp R$. Обозначим $H_0 = \{h \in H \mid \operatorname{supp}(h) < \propto\}$. Тогда H_0 является m-идеалом H и образы $\overline{T}$, $\overline{R}$ элементов R и T в фактор-группе H/H_0 неединичны. По построению $\overline{R} \geq \overline{R}^{\overline{T}^2}$. Следовательно, $[\overline{R}, \overline{T}^2] = e$, и поэтому m-группа, порожденная $\overline{T}$, $\overline{R}$, m-изоморфна $(S_2, {}_*\,)$. □

Следуя [7], назовем m-группу $(F, {}_*\,)$ *разложимой*, если она является прямым произведением своих ℓ-подгрупп A, B, причем $A_* = B$. Так как для любого строго положительного элемента $a \in A$ элемент $f = (a, a_*) \in (F, {}_*\,)$ обладает свойством $f_* = f$, по лемме 2.1 m-группа $(F, {}_*\,)$ содержит m-подгруппу, m-изоморфную $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, \mathrm{Exch})$. Поэтому многообразие $\mathscr{V}$ не может содержать разложимых групп.

Как обычно, через $R(G : V)$ обозначим множество правых смежных классов ℓ-группы G по ее выпуклой ℓ-подгруппе V с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линеен, то V называется *спрямляющей*.

Лемма 2.8 [7, лемма 1]. *Пусть V — спрямляющая ℓ-подгруппа m-группы G, которая не является m-подгруппой. Тогда в G имеется выпуклая ℓ-подгруппа H, являющаяся разложимой m-группой.*

Напомним, что *значением неединичного элемента* a произвольной ℓ-группы G называется всякая выпуклая ℓ-подгруппа V_a, не содержащая a и максимальная с этим свойством. Всякое значение является спрямляющей подгруппой. Множество всех значений элемента a в группе G обозначим через $\Gamma_G(a)$. Известно (см., например, [8, предложение 12.6]), что $a \sim b$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_G(a) = \Gamma_G(b)$.

Возвращаемся к доказательству основного результата.

Лемма 2.9. *Элементы r^t и $r^{t^{-1}}$ архимедово эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\Gamma_G(r^t) = \Gamma_G(r^{t^{-1}})$. Пусть V — произвольное значение элемента r^t. Предположим, что $r^{t^{-1}} \in V$. Тогда V не может быть m-подгруппой, так как в этом случае $(r^{t^{-1}})_* = (r^{-1})^t \in V$, что противоречит определению V. Но если V не является m-подгруппой, то по лемме 2.8 m-группа $(G, {}_*\,) \in \mathscr{V} \setminus \mathscr{I}$ содержит разложимую m-подгруппу, что также невозможно.

Таким образом, $r^{t^{-1}} \notin V$. Для элемента $r^{t^{-1}}$ существует $W \in \Gamma_G(r^{t^{-1}})$ такое, что $V \subseteq W$. Как и выше, можно показать, что $r^t \notin W$. По максимальности V получаем, что $V = W$, т. е. $\Gamma_G(r^t) \subseteq \Gamma_G(r^{t^{-1}})$. Аналогично доказывается обратное включение. □

Таким образом, доказана

Теорема 2.10. *Многообразие всех абелевых m-групп $\mathscr{A}_m$ и многообразие m-групп $\mathscr{S} = \mathrm{var}_m((S_{2,*}\,))$ — единственные накрытия $\mathscr{I}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49, N 124. P. 743–766.
2. *Зенков А. В.* Накрытия в решетке многообразий m-групп // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 73–80.

3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Kopytov V. M.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
5. *Баянова Н. В., Никонова О. В.* Реверсивные автоморфизмы решеточно упорядоченных групп // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 763–768.
6. *Huss M. E., Reily N. R.* On reversing the order of lattice-ordered group // J. Algebra. 1984. V. 91. P. 176–191.
7. *Копытов В. М., Рхунек Й.* Наибольшее собственное многообразие m-групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 624–635.
8. *Darnel M.* Theory of lattice-ordered groups. New York: Marcel Dekker, 1995.

Статья поступила 29 сентября 2008 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет, кафедра математики,
пр. Красноармейский, Барнаул 656049
`alexey_zenkov@yahoo.com`