Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 515.168+517.984.5

ЛОКАЛЬНАЯ СЛЫШИМОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Риманова метрика g на компактном многообразии без края называется *локально слышимой*, если для достаточно близких к ней метрик g' справедливо утверждение: изоспектральность метрик g и g' влечет их изометричность. Доказана локальная слышимость метрики постоянной отрицательной секционной кривизны.

Ключевые слова: спектральная геометрия, риманово многообразие отрицательной секционной кривизны.

Юрию Григорьевичу Решетняку к 80-летию

1. Введение

В настоящей статье термин *риманово многообразие* всегда означает компактное риманово многообразие без края класса C^∞. Основной вопрос спектральной геометрии — в какой степени риманово многообразие определяется спектром своего лапласиана? — в известной лекции Каца [1] образно сформулирован так: «Можно ли услышать форму барабана?». Подхватывая эту образную терминологию, авторы [2] вводят определение: риманово многообразие *слышимо* (audible), если оно определяется своим спектром однозначно с точностью до изометрии.

Напомним, что два римановых многообразия называются *изоспектральными*, если спектры их лапласианов совпадают, включая кратности собственных чисел. Первый пример изоспектральных, но не изометричных многообразий найден Милнором в размерности 16 [3]. В дальнейшем оказалось, что подобные примеры существуют даже в классе гиперболических многообразий (т. е. римановых многообразий постоянной отрицательной секционной кривизны), причем во всех размерностях [4, 5]. В [6] построены примеры гладких семейств изоспектральных, но не изометричных метрик. Однако в классе метрик отрицательной кривизны такие семейства невозможны [7].

Из положительных результатов следует прежде всего отметить теорему конечности [8]: в классе гиперболических поверхностей (т. е. двумерных римановых многообразий, гауссова кривизна которых равна -1) любое изоспектральное семейство конечно, если изометричные поверхности отождествляются. В многомерном случае справедливо гораздо более сильное утверждение: существует лишь конечное с точностью до изометрии множество гиперболических многообразий размерности $n \geq 3$, имеющих предписанный объем. При $n = 3$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–92001–ННС) и интеграционного гранта СО РАН (№ 94).

это утверждение является весьма частным следствием теоремы Терстона об объемах гиперболических 3-многообразий [9], а при $n \geq 4$ следует из теоремы Вэнга [10]. Приведем также следующую теорему компактности [11]: на двумерном многообразии любое множество изоспектральных метрик предкомпактно в C^∞-топологии, если изометричные метрики отождествляются. Аналогичная теорема компактности в классе трехмерных многообразий отрицательной кривизны доказана в [12].

Один из самых интересных вопросов, остающихся открытыми, состоит в следующем: остается ли приведенная теорема конечности справедливой в классе метрик отрицательной кривизны? Приведем точную формулировку, впервые поставленную в [11].

Гипотеза 1.1. *Любое изоспектральное семейство метрик отрицательной гауссовой кривизны на компактной ориентируемой поверхности рода* ≥ 2 *конечно, если изометричные метрики отождествляются.*

Ввиду упомянутой выше теоремы компактности эта гипотеза эквивалентна утверждению о локальной единственности. В связи с этим дадим

Определение 1.2. Риманово многообразие (M, g) называется *локально слышимым*, если существует такая окрестность V метрики g в C^∞-топологии, что любая метрика, принадлежащая V и изоспектральная метрике g, изометрична метрике g.

Гипотеза 1.1 эквивалентна утверждению о локальной слышимости двумерного многообразия отрицательной гауссовой кривизны. По нашему мнению, вопрос о локальной слышимости той или иной метрики представляет и самостоятельный интерес безотносительно к гипотезе 1.1. Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1.3. *Риманово многообразие постоянной отрицательной секционной кривизны локально слышимо.*

При исследовании локальной слышимости метрики g следует в первую очередь исключить из рассмотрения близкие к g метрики, которые изометричны метрике g и отличны от нее. Заметим, что таких метрик очень много. Действительно, если $\varphi : M \to M$ — близкий к тождественному диффеоморфизм, то метрика $g' = \varphi^* g$ изометрична метрике g и близка к ней.

Для риманова многообразия (M, g) мы обозначаем через $C^\infty(S^2\tau'_M)$ пространство гладких симметричных ковариантных тензорных полей валентности 2 на M. Здесь τ'_M — кокасательное расслоение многообразия M. *Дивергенция* $\delta_g : C^\infty(S^2\tau'_M) \to C^\infty(\tau'_M)$ определяется в координатах равенством $(\delta_g f)_i = g^{jk}\nabla_j f_{ik}$, где ∇ — ковариантная производная метрики g. Поле f называется *соленоидальным*, если $\delta_g f = 0$. Упомянутое выше исключение «лишних» метрик осуществляется с помощью следующего утверждения.

Лемма 1.4. *Пусть риманово многообразие (M, g) таково, что хотя бы одна орбита геодезического потока плотна в сферическом расслоении. Существует такая окрестность $V \subset C^{k,\alpha}(S^2\tau'_M)$ метрики g для любых $k \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$, что для любой метрики $g' \in V$ найдется такой диффеоморфизм φ многообразия M на себя, что тензорное поле $\varphi^* g'$ соленоидально в метрике g, т. е. $\delta_g(\varphi^* g') = 0$. Более того, диффеоморфизм φ может быть выбран $C^{k,\alpha}$-близким к тождественному, и этим требованием φ однозначно определяется.*

Условие леммы о существовании плотной орбиты выполнено для метрик отрицательной кривизны. Доказательство этой леммы приведено в [13] для многообразий с краем. Для многообразий без края то же доказательство справедливо с единственным дополнением: для существования и единственности разложения тензорного поля на потенциальную и соленоидальную части достаточно существование плотной орбиты геодезического потока (см. [7, теорема 2.2]). В силу этой леммы определение 1.2 приобретает следующую эквивалентную форму.

Предложение 1.5. *Пусть (M, g) имеет плотную в сферическом расслоении орбиту геодезического потока. Такое многообразие локально слышимо тогда и только тогда, когда справедливо следующее утверждение. Если g_n $(n = 1, 2, \dots)$ — сходящаяся к g в C^∞-топологии последовательность метрик на M, удовлетворяющих $\delta_g g_n = 0$ и таких, что каждая g_n изоспектральна метрике g, то $g_n = g$ начиная с некоторого n_0.*

Пожалуй, главным инструментом спектральной геометрии являются спектральные инварианты, определение которых мы вкратце напоминаем здесь, отсылая читателя за подробностями к [14]. Фундаментальное решение $K(x, y, t)$ уравнения теплопроводности на n-мерном римановом многообразии (M, g) допускает асимптотическое представление

$$K(x, x, t) = (4\pi t)^{-n/2}(a_0(x) + a_1(x)t + a_2(x)t^2 + \dots) \quad \text{при} \quad t \to +0,$$

коэффициенты которого определяются локальной геометрией многообразия в окрестности точки x. Точнее, каждая функция $a_k(x)$ является инвариантным многочленом от тензора кривизны и его ковариантных производных. Интегралы от этих коэффициентов

$$a_k(M, g) = \int\limits_M a_k(x)\, dV(x)$$

называются *спектральными инвариантами*, поскольку они определяются спектром лапласиана. Первые три из них выглядят так:

$$a_0(M, g) = \mathrm{Vol}(M, g), \quad a_1(M, g) = \frac{1}{6}\int\limits_M \sigma\, dV,$$
$$a_2(M, g) = \frac{1}{360}\int\limits_M (5\sigma^2 - 2|\rho|^2 + 2|R|^2)\, dV, \tag{1.1}$$

где R, ρ и σ — тензор кривизны, тензор Риччи и скалярная кривизна соответственно. В двумерном случае эти формулы упрощаются до следующих:

$$a_0(M^2, g) = \mathrm{Vol}(M^2, g), \quad a_1(M^2, g) = \frac{2\pi}{3}\chi(M^2), \quad a_2(M^2, g) = \frac{1}{15}\int\limits_M K^2\, dV, \tag{1.2}$$

где K — гауссова кривизна поверхности и $\chi(M^2)$ — ее эйлерова характеристика.

В качестве примера применения спектральных инвариантов приведем замечательное по своей простоте доказательство Берже [15] следующего факта: утверждение «поверхность имеет постоянную кривизну» слышимо. Действительно, для любой постоянной c справедливо равенство

$$\int\limits_{M^2} (c - K)^2\, dV = b_0 c^2 - 2b_1 c + b_2, \tag{1.3}$$

в котором коэффициенты b_i отличаются лишь положительными множителями от инвариантов (1.2) и могут считаться известными, если известен спектр лапласиана. Следовательно, поверхность имеет постоянную кривизну тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен из правой части (1.3) имеет действительный корень.

Аналогичное многомерное утверждение, доказанное Патоди [16], звучит следующим образом: тот факт, что «многообразие имеет постоянную скалярную (секционную) кривизну», может быть услышан на основе знания спектров лапласианов на p-формах для $p = 0, 1, 2$. Для этого Патоди показывает, что для p-форм второй спектральный инвариант выражается формулой

$$a_2(M, g, p) = \int\limits_M \left(c_1^p \sigma^2 + c_2^p |\rho|^2 + c_3^p |R|^2\right) dV,$$

отличающейся от (1.1) лишь значениями постоянных коэффициентов c_i^p. Найдя эти коэффициенты для $p = 0, 1, 2$, Патоди замечает, что 3×3-матрица $\left(c_i^p\right)$ невырожденна. Следовательно, интегралы

$$b_1 = \int\limits_M \sigma^2 \, dV, \quad b_2 = \int\limits_M |\rho|^2 \, dV, \quad b_3 = \int\limits_M |R|^2 \, dV$$

могут считаться известными. Далее следует примерно такое же рассуждение, как и у Берже.

В двумерном случае теорема 1.3 следует из результата Берже и упомянутой теоремы о конечности изоспектрального семейства гиперболических поверхностей. Но в многомерном случае теорема 1.3 не следует из теоремы Патоди, поскольку Патоди использует спектры лапласианов на 1- и 2-формах, а в теореме 1.3 предполагается известным лишь спектр классического лапласиана на скалярных функциях.

Вторым по степени важности инструментом спектральной геометрии, особенно полезным в классе метрик отрицательной кривизны, является асимптотика волнового ядра. Не имея возможности вдаваться в детали, мы приводим здесь лишь следующее утверждение: если два римановых многообразия отрицательной секционной кривизны изоспектральны, то их спектры длин совпадают. *Спектр длин* риманова многообразия — это множество длин замкнутых геодезических. Это утверждение впервые явно сформулировано в [17], хотя имеет длинную предысторию.

Изложим вкратце основную идею нашего подхода к доказательству локальной слышимости метрики отрицательной кривизны. Пусть (M, g) — риманово многообразие отрицательной секционной кривизны и g_n $(n = 1, 2, \dots)$ — последовательность римановых метрик на M, сходящаяся к g в C^∞-топологии. Предположим, что каждая g_n изоспектральна метрике g и соленоидальна, т. е. $\delta_g g_n = 0$. В соответствии с предложением 1.5 мы должны доказать, что g_n совпадает с g начиная с некоторого n_0. Предположим, что это не так, и постараемся получить противоречие. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что тензорное поле $f_n = g_n - g$ не равно тождественно нулю для всех n. Пусть $\gamma : [0, a] \to M$ — замкнутая геодезическая метрики g, параметризованная длиной дуги, и $\gamma_n : [0, a] \to M$ — замкнутая геодезическая метрики g_n, лежащая в том же свободном гомотопическом классе, что и γ, и параметризованная пропорционально длине дуги в метрике g_n. Тогда γ_n равномерно сходится к γ

при $n \to \infty$, поскольку на многообразии отрицательной кривизны каждый свободный гомотопический класс содержит одну замкнутую геодезическую. Мы используем сокращенное обозначение $\oint\limits_{\gamma} f$ для интеграла $\int\limits_0^a f_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\,dt$, где $\gamma : [0, a] \to M$ — замкнутая геодезическая. Поскольку γ_n минимизирует функционал энергии E_{g_n} в своем гомотопическом классе, можем написать

$$\oint\limits_{\gamma} f_n = \oint\limits_{\gamma} g_n - \oint\limits_{\gamma} g = E_{g_n}(\gamma) - E_g(\gamma) \geq E_{g_n}(\gamma_n) - E_g(\gamma) = 0.$$

Последнее равенство в этой цепочке справедливо для достаточно больших n, поскольку спектры длин метрик g_n и g совпадают. Таким образом, для любой замкнутой геодезической γ метрики g неравенство

$$\oint\limits_{\gamma} f_n \geq 0 \tag{1.4}$$

справедливо для всех n начиная с некоторого $n_0 = n_0(\gamma)$. Меняя ролями g и g_n, убедимся также, что начиная с некоторого $n_0 = n_0(\gamma)$

$$\oint\limits_{\gamma_n} f_n \leq 0. \tag{1.5}$$

Нормируем тензорное поле f_n, полагая $F_n = f_n/\|f_n\|_{H^k}$ с подходяще выбранным k. Неравенства (1.4), (1.5) справедливы и для F_n:

$$\oint\limits_{\gamma} F_n \geq 0, \quad \oint\limits_{\gamma_n} F_n \leq 0 \quad \text{для } n \geq n_0(\gamma). \tag{1.6}$$

Предположим, что F_n сходится в H^k-норме, т. е. $\|F_n - F\|_{H^k} \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в (1.6), имеем

$$\oint\limits_{\gamma} F = 0 \tag{1.7}$$

для любой замкнутой геодезической γ метрики g. Разумеется, тензорное поле F соленоидально. Основной результат [7] гласит, что соленоидальное тензорное поле на многообразии отрицательной кривизны тождественно равно нулю, если оно удовлетворяет (1.7). Итак, $F \equiv 0$. Это противоречит тому, что $\|F\|_{H^k} = 1$.

Таким образом, проблема сводится к вопросу: можно ли из последовательности F_n извлечь сходящуюся в H^k подпоследовательность? В силу компактности вложения $H^{k+1} \subset H^k$ для этого достаточно установить ограниченность последовательности F_n в H^{k+1}-норме. В терминах последовательности g_n это означает, что

$$\|g_n - g\|_{H^{k+1}} \leq C\|g_n - g\|_{H^k}. \tag{1.8}$$

Оценки компактности, подобные (1.8), ранее уже возникали в спектральной геометрии. Из такой оценки (для $k = 0$) вытекают основные результаты работ [18, 19], посвященных спектральной жесткости римановых многообразий с геодезическим потоком аносовского типа. Обозначим через $[g]$ множество всех разностей $g' - g$, где g' — изоспектральная с g метрика, удовлетворяющая $\delta_g g' = 0$. Грубо говоря, оценка (1.8) означает конечномерность множества

$[g] \cap V$ для достаточно малой окрестности нуля $V \subset C^\infty(S^2\tau'_M)$. Например, если $[g] \cap V \subset W$ для конечномерного пространства $W \subset C^\infty(S^2\tau'_M)$, то (1.8) справедливо, поскольку любые две нормы на W эквивалентны.

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос о выборе минимального значения k, при котором оценка компактности (1.8) обеспечивает справедливость наших аргументов. Для возможности предельного перехода в (1.6) необходимо, чтобы предельное поле F было как минимум непрерывным, что обеспечивается выбором $k > \dim M/2$. Основные аргументы [7], связанные с применением тождества Пестова, справедливы для $F \in H^1$. Тем не менее основной результат сформулирован в [7] для $F \in C^\infty$. Это обусловлено применением теоремы Лившица, которая в то время была известна лишь для C^∞-гладких функций [20], не считая первоначального варианта, доказанного Лившицем для Гёльдер-непрерывных функций [21]. В настоящее время теорема Лившица доказана и для соболевских классов (см. [22, теорема 5]). Согласно последней теореме выбор $k > \dim M/2 + 1$ достаточен для наших целей.

В настоящей статье мы доказываем, что оценка компактности (1.8) для любого $k \geq 2$ следует из совпадения спектральных инвариантов метрик g_n и g, если последняя метрика имеет постоянную секционную кривизну.

Мы завершаем введение обсуждением принципиального вопроса: почему наш подход не применим к метрикам непостоянной отрицательной кривизны? Для риманова многообразия (M, g) и тензорного поля $f \in C^\infty(S^2\tau'_M)$ *первая вариация* спектрального инварианта a_k в направлении f определяется равенством

$$\dot a_k(M, g; f) = da_k(M, g + tf)/dt|_{t=0}.$$

Если метрика g имеет постоянную секционную кривизну, то

$$\dot a_k(M, g; f) = 0 \tag{1.9}$$

для всех f таких, что

$$2\dot a_0(M, g; f) = \int\limits_M \operatorname{tr} f\, dV = 0. \tag{1.10}$$

Этот факт является решающим для успеха применения нашего метода. Действительно, в этом случае разность

$$a_k(M, g + f) - a_k(M, g) \tag{1.11}$$

представима степенным рядом по f, не содержащим линейных членов. Главные члены ряда квадратичны по f, что и позволяет получить оценку (1.8). Присутствие же линейных по f членов в ряде (1.11) является камнем преткновения для нашего подхода.

Автор видит лишь одну возможность борьбы с линейными членами ряда (1.11): использование линейной комбинации различных инвариантов. Действительно, если окажется, что линейная комбинация

$$a(M, g) = c_0 a_0(M, g) + \dots + c_k a_k(M, g) \quad (c_k \neq 0) \tag{1.12}$$

с подходяще выбранными постоянными коэффициентами имеет нулевую первую вариацию, то мы можем вместо (1.11) использовать разность $a(M, g + f) - a(M, g)$. Отметим, что фактически наш метод использует линейную комбинацию двух инвариантов a_k и a_0, как видно из (1.9), (1.10). В приведенном выше рассуждении Берже используется линейная комбинация первых трех инвариантов. К сожалению, похоже, что для произвольной метрики g не существует при больших k линейных комбинаций вида (1.12) таких, что $\dot a(M,g;f)=0$ для всех f. Но если тензор кривизны метрики g удовлетворяет некоторому естественному дифференциальному уравнению, то такие линейные комбинации могут найтись. На этом пути возникает возможность доказательства локальной слышимости метрик, принадлежащих некоторым естественным классам, более общим, чем класс гиперболических метрик.

Добавление при корректуре. Пока статья находилась в редакции, автор доказал следующее обобщение теоремы 1.3.

Теорема 1.6. *Локально симметрическое риманово многообразие отрицательной секционной кривизны локально слышимо.*

Доказательство основано на следующем наблюдении. В случае локально симметрической метрики g первые вариации $\dot a_k(M,g;\cdot)$ всех спектральных инвариантов лежат в некотором конечномерном подпространстве пространства $(C^\infty(S^2\tau'_M))'$, сопряженного к $C^\infty(S^2\tau'_M)$. Отсюда следует, что для любого k_0 существует линейная комбинация спектральных инвариантов вида (1.12) с $k>k_0$, первая вариация которой равна нулю.

Автор благодарен анонимному рецензенту за замечание, позволившее упростить вывод оценки (3.20).

2. Кривизна метрики $\overset{0}{g}+f$

Пусть $(M,\overset{0}{g})$ — риманово многообразие. В локальных координатах мы пишем $\overset{0}{g}=(\overset{0}{g}_{ij})$ и $\overset{0}{g}{}^{-1}=(\overset{0}{g}{}^{ij})$. Через $\overset{0}{\nabla}=(\overset{0}{\nabla}_i)$ обозначаем ковариантную производную метрики $\overset{0}{g}$, используем также операторы $\overset{0}{\nabla}{}^i=\overset{0}{g}{}^{ij}\overset{0}{\nabla}_j$. Кратные производные обозначаются через $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)}=(\overset{0}{\nabla}_{i_1\dots i_l})$. Для тензорных полей $u=(u_{i_1\dots i_m})$ и $v=(v_{i_1\dots i_m})$ вводим скалярное произведение и нормы:

$$\langle u,v\rangle_0=\overset{0}{g}{}^{i_1j_1}\dots\overset{0}{g}{}^{i_mj_m}u_{i_1\dots i_m}v_{j_1\dots j_m},\quad |u|_0^2=\langle u,u\rangle_0,\quad \|u\|_{C^k}=\sum_{l=0}^k\sup_M|\overset{0}{\nabla}{}^{(l)}u|_0.$$

Пусть $f=(f_{ij})\in C^\infty(S^2\tau'_M)$ — соленоидальное в метрике $\overset{0}{g}$ тензорное поле. Напомним, что условие соленоидальности в координатах выглядит так:

$$\overset{0}{\nabla}{}^i f_{ij}=0. \tag{2.1}$$

Наряду с ковариантными координатами f_{ij} поля f будем использовать смешанные координаты $f^i_j=\overset{0}{g}{}^{ik}f_{jk}$ и контравариантные координаты $f^{ij}=\overset{0}{g}{}^{ik}f^j_k$. Рассмотрим риманову метрику

$$g=\overset{0}{g}+f,\quad g_{ij}=\overset{0}{g}_{ij}+f_{ij}. \tag{2.2}$$

Тензорное поле f предполагается достаточно малым по сравнению с $\overset{0}{g}$ так, что операторная норма матрицы $\overset{0}{g}{}^{-1}f$ равномерно ограничена некоторой постоянной $c<1$,

$$\|\overset{0}{g}{}^{-1}f\|\le c<1\quad\text{или}\quad |f_{ij}\xi^i\xi^j|\le c|\xi|_0^2. \tag{2.3}$$

Кроме того, предположим, что f удовлетворяет оценке

$$\|f\|_{C^N} \leq c < 1 \tag{2.4}$$

с достаточно большим N, значение которого будет выбрано позже. Значение постоянной c также будет несколько раз уточняться ниже, каждый раз в сторону уменьшения. Отметим, что для $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq N$ оценка (2.4) влечет

$$|\overset{0}{\nabla}{}^{(k_1)} f|_0 \cdot |\overset{0}{\nabla}{}^{(k_2)} f|_0 \leq |\overset{0}{\nabla}{}^{(k_1)} f|_0. \tag{2.5}$$

Мы будем многократно использовать это неравенство для упрощения оценок выражений, полиномиально зависящих от f и его производных.

Целью настоящего параграфа является вывод локальных формул, выражающих тензор кривизны R метрики g через тензор кривизны $\overset{0}{R}$ метрики $\overset{0}{g}$ и тензорное поле f. При этом нас интересуют также соответствующие формулы для высших ковариантных производных $\nabla^{(l)} R$. Точные формулы такого рода очень громоздки. Поэтому в большинстве формул будем явно выписывать лишь линейные по f члены, объединяя слагаемые порядка 2 и выше в остаточный член, подходящим образом оцененный. Впрочем, в некоторых из формул линейные члены также будут включаться в остаток.

Выразим форму объема $dV = \sqrt{\det g}\, dx$ метрики g через форму объема dV_0 метрики $\overset{0}{g}$. Из (2.2) следует, что $\det g = \det \overset{0}{g}(1 + \tilde{v}_1(f))$, где функция $\tilde{v}_1(f)$ выражается в координатах многочленом от компонент поля f, не содержащим свободного члена. Отметим, что функция $\tilde{v}_1(f) \in C^\infty(M)$ инвариантна, т. е. не зависит от выбора координат и, следовательно, определена глобально на M. Отсюда

$$dV = dV_0(1 + v_1(f)) \quad \bigl(v_1(f) \in \mathbb{R}_1^{(0)}[[f]]\bigr), \tag{2.6}$$

где функция $v_1(f)$ представима рядом

$$v_1(f) = \sqrt{1 + \tilde{v}_1(f)} - 1 = \frac{1}{2}\tilde{v}_1(f) - \frac{1}{8}(\tilde{v}_1(f))^2 + \frac{1}{16}(\tilde{v}_1(f))^3 - \frac{5}{132}(\tilde{v}_1(f))^4 + \dots. \tag{2.7}$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно на M, если $|\tilde{v}_1(f)| \leq c' < 1$. Выполнения этого неравенства можно добиться за счет уменьшения значения постоянной c в оценках (2.3), (2.4), что далее предполагается сделанным. Ряд, получаемый применением к (2.7) кратной производной $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)}$, также сходится абсолютно и равномерно по крайней мере при $l \leq N$, где N — постоянная из (2.4). Линейный по f член ряда $v_1(f)$ равен $\operatorname{tr} f/2 = f_i^i/2$. Поэтому (2.6) может быть также записано в виде

$$dV = dV_0(1 + (1/2)\operatorname{tr} f + v_2(f)) \quad \bigl(v_2(f) \in \mathbb{R}_2^{(0)}[[f]]\bigr). \tag{2.8}$$

Смысл участвующих в (2.6) и (2.8) обозначений $\mathbb{R}_1^{(0)}[[f]]$ и $\mathbb{R}_2^{(0)}[[f]]$ поясняется ниже.

Представим обратную матрицу $g^{-1} = (g^{ij})$ матрицы $g = \overset{0}{g} + f$ рядом Неймана

$$g^{-1} = \overset{0}{g}{}^{-1}(I - f\overset{0}{g}{}^{-1} + (f\overset{0}{g}{}^{-1})^2 - (f\overset{0}{g}{}^{-1})^3 + \dots). \tag{2.9}$$

В силу (2.3) ряд сходится абсолютно и равномерно. Ряд, получаемый применением к (2.9) кратной производной $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)}$, также сходится абсолютно и равномерно по крайней мере при $l \leq N$.

Напомним, что в алгебре через $\mathbb{R}[f]$ обозначается кольцо многочленов с действительными коэффициентами от переменной f, а через $\mathbb{R}[[f]]$ — кольцо формальных степенных рядов. Мы будем использовать эти обозначения в несколько ином контексте, объясняемом в следующих трех абзацах. Фактически нам нужно минимальное подкольцо, содержащее ряды (2.7) и (2.9) и замкнутое относительно некоторых операций.

Пусть $\tau = \tau_M$ — касательное расслоение многообразия M и τ' — кокасательное расслоение. Напомним, что для каждой перестановки π множества $\{1, \dots, r\}$ определен автоморфизм ρ^π расслоения

$$\otimes_s^r \tau_M = \underbrace{\tau \otimes \dots \otimes \tau}_{r} \otimes \underbrace{\tau' \otimes \dots \otimes \tau'}_{s}, \tag{2.10}$$

который называется *перестановкой верхних индексов* и действует путем применения π к первым r множителям произведения. *Перестановка нижних индексов* ρ_π определяется аналогично для перестановки π множества $\{1, \dots, s\}$. Напомним также, что *операторы свертки*

$$C_l^k : \otimes_s^r \tau_M \to \otimes_{s-1}^{r-1} \tau_M \quad (1 \le k \le r,\ 1 \le l \le s)$$

действуют путем канонического спаривания k-го множителя из первой группы в правой части (2.10) с l-м множителем второй группы.

Пусть $C^\infty(\otimes \tau_M) = \bigoplus\limits_{r,s=0}^{\infty} C^\infty(\otimes_s^r \tau_M)$ — алгебра тензорных полей всех валентностей на M. В качестве умножения алгебры выступает тензорное произведение, а единицей алгебры является функция, тождественно равная единице. Обозначим через $\mathbb{R}[\overset{0}{g}]$ наименьшую $\mathbb{R}$-подалгебру в $C^\infty(\otimes \tau_M)$, содержащую единицу и тензорные поля $\overset{0}{g} = (\overset{0}{g}_{ij})$ и $\overset{0}{g}{}^{-1} = (\overset{0}{g}{}^{ij})$. Далее, пусть $\mathbb{R}[f]$ — наименьшая $\mathbb{R}$-подалгебра в $C^\infty(\otimes \tau_M)$, содержащая $\mathbb{R}[\overset{0}{g}]$ и тензорное поле $f = (f_{ij})$. Наконец, через $\mathbb{R}[[f]]$ обозначаем наименьшую $\mathbb{R}$-подалгебру в $C^\infty(\otimes \tau_M)$, содержащую тензорное поле $g^{-1} = (g^{ij})$ и функцию $v_1(f)$ из (2.7), а также замкнутую относительно следующих операций: (1) прибавления элементов из $\mathbb{R}[f]$ и умножения на них; (2) применения ковариантной производной $\overset{0}{\nabla}$; (3) применения операторов перестановки индексов и операторов свертки. Каждое тензорное поле $u \in \mathbb{R}[[f]]$ представимо в виде степенного ряда от переменных $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} f$ с коэффициентами из кольца $\mathbb{R}[\overset{0}{g}]$. Действительно, любое $u \in \mathbb{R}[[f]]$ получается из рядов (2.7) и (2.9) в результате применения конечной последовательности операций из следующего списка: (1) прибавление многочлена из $\mathbb{R}[f]$; (2) умножение на многочлен из $\mathbb{R}[f]$; (3) применение производной $\overset{0}{\nabla}$; (4) перестановка индексов; (5) свертка по двум разновысоким индексам; (6) сложение двух таких рядов; (7) умножение двух таких рядов. Более подробно: каждое поле $u \in \mathbb{R}[[f]]$ единственным образом представимо в виде $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$, где u_k получается из мономов вида

$$\overset{0}{\nabla}{}^{(l_{k,1})} f \otimes \dots \otimes \overset{0}{\nabla}{}^{(l_{k,k})} f \tag{2.11}$$

путем умножения на коэффициенты из $\mathbb{R}[\overset{0}{g}]$ с возможной последующей перестановкой индексов и сверткой по нескольким парам индексов и сложения полученных произведений. Важно при этом отметить, что число вхождений оператора

$\overset{0}{\nabla}$ во все мономы ряда u ограничено равномерно по k, т. е. $l_{k,1}+\dots+l_{k,k} \le \nu(u)$. Все рассматриваемые далее ряды удовлетворяют условию $\nu(u) \le N$, где N — постоянная из (2.4). При выполнении этого условия ряд u сходится абсолютно и равномерно на M, поскольку исходные ряды (2.7), (2.9) и их ковариантные производные до порядка N обладают этим свойством и, как известно, произведение двух абсолютно и равномерно сходящихся рядов снова является таковым.

Пусть $\mathbb{R}^{(m)}[[f]]$ — наименьшая $\mathbb{R}[\overset{0}{g}]$-подалгебра алгебры $\mathbb{R}[[f]]$, содержащая тензорные поля $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} f$ $(l \le m)$ и замкнутая относительно сверток и перестановок индексов. Тензорное поле $u \in \mathbb{R}^{(m)}[[f]]$ равным образом может рассматриваться как многочлен от переменных $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} f$ $(1 \le l \le m)$ с коэффициентами из кольца $\mathbb{R}^{(0)}[[f]]$. Наконец, через $\mathbb{R}^{(m)}_j[[f]]$ обозначаем идеал алгебры $\mathbb{R}^{(m)}[[f]]$, состоящий из рядов $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$, для которых $u_k = 0$ при $k < j$. Иными словами, ряд $u \in \mathbb{R}^{(m)}_j[[f]]$ начинается со слагаемых порядка j по f и не зависит от производных $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} f$ при $l > m$.

Запишем (2.9) в виде

$$g^{ij} = \overset{0}{g}{}^{ij} + F^{ij}, \tag{2.12}$$

где тензорное поле $(F^{ij}) = F(f) \in \mathbb{R}^{(0)}_1[[f]]$ допускает равномерную оценку

$$|\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} F|_0 \le C_l \sum_{j=0}^{l} |\overset{0}{\nabla}{}^{(j)} f|_0 \tag{2.13}$$

для любого $l \le N$ с постоянной C_l, зависящей лишь от l и постоянной c из (2.3), (2.4). Отметим, что при выводе (2.13) использовано неравенство (2.5) для оценки слагаемых порядка ≥ 2 ряда $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} F$.

Теперь выразим норму $|\cdot|$ метрики g через норму $|\cdot|_0$ метрики $\overset{0}{g}$. Для произвольного тензора $u = (u_{i_1\dots i_m})$ имеем

$$|u|^2 = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_m j_m} u_{i_1\dots i_m} u_{j_1\dots j_m}.$$

Подставив сюда значение (2.12), приходим к равенству

$$|u|^2 = |u|_0^2 + F_m(f, u), \tag{2.14}$$

остаточный член которого допускает оценку

$$|F_m(f, u)| \le C_m |f|_0 |u|_0^2 \tag{2.15}$$

с постоянной C_m, зависящей лишь от валентности m тензора u и постоянной C_0 из (2.13).

Символы Кристоффеля первого рода метрики g определяются равенством

$$\Gamma_{ij|k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Подставляя сюда $g = \overset{0}{g} + f$, получаем

$$\Gamma_{ij|k} = \overset{0}{\Gamma}_{ij|k} + \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}_i f_{jk} + \overset{0}{\nabla}_j f_{ik} - \overset{0}{\nabla}_k f_{ij}), \tag{2.16}$$

где $\overset{0}{\Gamma}_{ij|k}$ — символы Кристоффеля первого рода метрики $\overset{0}{g}$.

Символы Кристоффеля второго рода метрики g определяются равенством $\Gamma^k_{ij} = g^{kp}\Gamma_{ij|p}$. Подставляя сюда значения (2.12) и (2.16), получаем

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij} + \frac{1}{2}\big(\overset{0}{\nabla}_i f^k_j + \overset{0}{\nabla}_j f^k_i - \overset{0}{\nabla}{}^k f_{ij}\big) + \frac{1}{2}F^{kp}(\overset{0}{\nabla}_i f_{jp} + \overset{0}{\nabla}_j f_{ip} - \overset{0}{\nabla}_p f_{ij}). \tag{2.17}$$

Это также можно записать в более грубой форме

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij} + D^k_{ij} \tag{2.18}$$

с некоторым тензорным полем $D \in \mathbb{R}^{(1)}_1[[f]]$.

Теперь выразим ковариантную производную ∇ метрики g через $\overset{0}{\nabla}$. Для тензорного поля $u = (u_{i_1\dots i_m})$

$$\nabla_j u_{i_1\dots i_m} = \frac{\partial u_{i_1\dots i_m}}{\partial x^j} - \sum_{a=1}^m \Gamma^p_{ji_a} u_{i_1\dots i_{a-1}pi_{a+1}\dots i_m}.$$

Подставляя сюда значения (2.18) символов Кристоффеля, имеем

$$\nabla_j u_{i_1\dots i_m} = \overset{0}{\nabla}_j u_{i_1\dots i_m} - \sum_{a=1}^m D^p_{ji_a} u_{i_1\dots i_{a-1}pi_{a+1}\dots i_m}.$$

Итерируя это правило, получаем

$$\nabla^{(l)} u = \overset{0}{\nabla}{}^{(l)} u + \sum_{j=0}^{l-1} D^l_{mj} \overset{0}{\nabla}{}^{(j)} u \tag{2.19}$$

с некоторыми линейными операторами $D^l_{mj} \in \mathbb{R}^{(l-j)}_1[[f]]$. Отсюда следует утверждение: если $u \in \mathbb{R}^{(k)}_j[[f]]$, то $\nabla^{(l)} u \in \mathbb{R}^{(k+l)}_j[[f]]$.

Приступаем к вычислению тензора кривизны R метрики g. Фиксируем точку $p \in M$ и выберем в ее окрестности координаты так, что $\overset{0}{g}_{ij}(p) = \delta_{ij}$ и $\partial \overset{0}{g}_{ij}/\partial x^k(p) = 0$. Дифференцируя равенство (2.17), можем заменять частную производную $\partial/\partial x^l|_p$ ковариантной производной $\overset{0}{\nabla}$. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l} = \frac{\partial \overset{0}{\Gamma}{}^k_{ij}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}_l\big(\overset{0}{\nabla}_i f^k_j + \overset{0}{\nabla}_j f^k_i - \overset{0}{\nabla}{}^k f_{ij}\big) + \overset{0}{\nabla}_l G^k_{ij} \quad \text{в точке } p, \tag{2.20}$$

где тензорное поле $G = G(f) \in \mathbb{R}^{(1)}_2[[f]]$ определяется равенством

$$G^k_{ij} = \frac{1}{2}F^{kp}(\overset{0}{\nabla}_i f_{jp} + \overset{0}{\nabla}_j f_{ip} - \overset{0}{\nabla}_p f_{ij}). \tag{2.21}$$

Сама же формула (2.17) в точке p выглядит так:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\big(\overset{0}{\nabla}_i f^k_j + \overset{0}{\nabla}_j f^k_i - \overset{0}{\nabla}{}^k f_{ij}\big) + \frac{1}{2}F^{kp}(\overset{0}{\nabla}_i f_{jp} + \overset{0}{\nabla}_j f_{ip} - \overset{0}{\nabla}_p f_{ij}) \quad \text{в точке } p. \tag{2.22}$$

Подставляя значения (2.20) и (2.22) в формулу

$$R^k_{lij} = \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il},$$

получаем

$$R^k_{lij} = \overset{0}{R}{}^k_{lij} + \frac{1}{2}\big(\overset{0}{\nabla}_i\overset{0}{\nabla}_l f^k_j - \overset{0}{\nabla}_j\overset{0}{\nabla}_l f^k_i - \overset{0}{\nabla}_i\overset{0}{\nabla}{}^k f_{jl} + \overset{0}{\nabla}_j\overset{0}{\nabla}{}^k f_{il} + \overset{0}{\nabla}_i\overset{0}{\nabla}_j f^k_l - \overset{0}{\nabla}_j\overset{0}{\nabla}_i f^k_l\big) + \tilde r^k_{lij}, \tag{2.23}$$

где тензорное поле $\tilde r \in \mathbb{R}^{(2)}_2[[f]]$ допускает оценку

$$|\overset{0}{\nabla}{}^{(l)}\tilde r|_0 \le C_l\|f\|_{C^{l+2}}\sum_{j=0}^{l+2}|\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}f|_0. \tag{2.24}$$

Мы доказали (2.23) в выделенной точке p, используя специальную систему координат. Но поскольку эта формула инвариантна, она справедлива на всем M.

Теперь вычисляем тензор Риччи $\rho_{ij} = R^p_{ipj}$ метрики g. Для этого сворачиваем равенство (2.23) по индексам i и k. В результате свертки четвертое и шестое слагаемые из скобок в (2.23) обращаются в нуль в силу условия соленоидальности (2.1) поля f, и получаем

$$\rho_{ij} = \overset{0}{\rho}_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_0 f_{ij} - \frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}_i\overset{0}{\nabla}_j \operatorname{tr} f + \frac{1}{2}\big(\overset{0}{\nabla}_p\overset{0}{\nabla}_i f^p_j + \overset{0}{\nabla}_p\overset{0}{\nabla}_j f^p_i\big) + \tilde r^p_{ipj}. \tag{2.25}$$

Здесь и далее $\Delta_0 = -\overset{0}{\nabla}{}^i\overset{0}{\nabla}_i$ — лапласиан метрики $\overset{0}{g}$. Используя формулы коммутации ковариантных производных и условие соленоидальности f, легко убедиться, что выражение, заключенное в (2.25) в скобки, является линейной алгебраической формой от f. Таким образом, (2.25) может быть записано в бескоординатной форме

$$\rho = \overset{0}{\rho} + \frac{1}{2}\Delta_0 f - \frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}{}^{(2)} \operatorname{tr} f + r, \tag{2.26}$$

где тензорное поле r определяется равенством

$$r_{ij} = \tilde r^p_{ipj} + A^{kl}_{ij} f_{kl}. \tag{2.27}$$

Здесь $A = \big(A^{kl}_{ij}\big)$ — некоторый тензор, выражающийся через тензор кривизны $\overset{0}{R}$ метрики $\overset{0}{g}$. В силу (2.24) r удовлетворяет оценке

$$|\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} r|_0 \le C_l\left(\|f\|_{C^{l+2}}\sum_{j=0}^{l+2}|\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}f|_0 + \sum_{j=0}^{l}|\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}f|_0\right). \tag{2.28}$$

3. Оценка компактности

Следующее важное наблюдение принадлежит Гилки [23]: H^k-норма тензора кривизны R произвольного риманова многообразия контролируется при $k \ge 1$ H^k-нормами тензора Риччи ρ и скалярной кривизны σ. Используя это наблюдение, Гилки нашел следующее представление для спектральных инвариантов, справедливое при $k \ge 2$:

$$a_{k+1}(M,g) = c_k\int\limits_M \big(2|\nabla^{(k-1)}\rho|^2 + (k^2+k+1)|\nabla^{(k-1)}\sigma|^2 - P_k(g,\nabla,R)\big)\,dV, \tag{3.1}$$

где $c_k = (-1)^{k+1}/2^{k+2}(2k+3)!!$. Здесь $P_k(g,\nabla,R)$ — некоторый инвариантный многочлен от переменных $\nabla^{(l)}R$ ($l \le k-2$). Этот многочлен однороден степени

$2k+2$ по ∇ и R, если степень однородности ∇ считается равной единице, а степень однородности R — двум. Более подробно этот многочлен описывается следующим образом. Рассмотрим моном вида

$$g^{r_1r_2}\dots g^{r_{2k+2m-1}r_{2k+2m}}(\nabla_{p_1\dots p_{a_1}}R_{i_1j_1k_1l_1})\dots(\nabla_{q_1\dots q_{a_m}}R_{i_mj_mk_ml_m}), \qquad (3.2)$$

в котором $a_s\le k-2$ при $1\le s\le m$ и $2m+(a_1+\dots a_m)=2k+2$. Заметим, что число верхних индексов в мономе (3.2) совпадает с числом нижних индексов. Все индексы монома разбиваются на пары, состоящие из одного верхнего и одного нижнего индексов, и производится свертка по двум индексам каждой пары. В результате получается инвариантная (не зависящая от выбора координат) функция. Многочлен $P_k(g,\nabla,R)$ есть линейная комбинация таких функций с постоянными коэффициентами. Этот многочлен универсален, т. е. не зависит от многообразия.

Замечание. В [14] используется более простое представление этого многочлена. После введения ортонормированного базиса в касательном пространстве вместо (3.2) используются мономы

$$(\nabla_{p_1\dots p_{a_1}}R_{i_1j_1k_1l_1})\dots(\nabla_{q_1\dots q_{a_m}}R_{i_mj_mk_ml_m}) \quad (a_s\le k-2,\ 2m+a_1+\dots+a_m=2k+2),$$

индексы которых разбиваются на пары, и производится свертка по двум индексам каждой пары. Метрика g при этом участвует неявно посредством ортонормированного базиса. Мы не можем использовать это представление, поскольку нам придется рассматривать две метрики одновременно.

Пусть $(M,\overset{0}{g})$ — риманово многообразие постоянной секционной кривизны K_0 и размерности n. Тензор кривизны $\overset{0}{R}$, тензор Риччи $\overset{0}{\rho}$ и скалярная кривизна $\overset{0}{\sigma}$ этого многообразия выражаются формулами

$$\overset{0}{R}_{ijkl}=K_0(\overset{0}{g}_{ik}\overset{0}{g}_{jl}-\overset{0}{g}_{il}\overset{0}{g}_{jk}), \quad \overset{0}{\rho}_{ij}=(n-1)K_0\overset{0}{g}_{ij}, \quad \overset{0}{\sigma}=n(n-1)K_0 \qquad (3.3)$$

и постоянны в том смысле, что

$$\overset{0}{\nabla}\overset{0}{R}=0, \quad \overset{0}{\nabla}\overset{0}{\rho}=0, \quad \overset{0}{\nabla}\overset{0}{\sigma}=0. \qquad (3.4)$$

Для тензорного поля будем использовать нормы

$$\|u\|^2_{L^2}=\int\limits_M |u|^2_0\,dV_0, \quad \|u\|^2_{H^k}=\sum_{l=0}^k\|\overset{0}{\nabla}{}^{(l)}u\|^2_{L^2}.$$

Пусть $f\in C^\infty(S^2\tau'_M)$ — соленоидальное (относительно метрики $\overset{0}{g}$) тензорное поле, которое предполагается малым по сравнению с $\overset{0}{g}$. Степень малости будет уточнена ниже, а пока считаем выполненными оценки (2.3), (2.4). Предположим, что метрики $\overset{0}{g}$ и $g=\overset{0}{g}+f$ изоспектральны. Тогда, во-первых, их объемы совпадают. Приравнивая объемы и используя (2.8), получаем

$$\int\limits_M \operatorname{tr} f\,dV_0=-2\int\limits_M v_2(f)\,dV_0.$$

Поскольку $v_2(f)\in\mathbb{R}_2^{(0)}[[f]]$, отсюда следует оценка

$$\Bigg|\int\limits_M \operatorname{tr} f\,dV_0\Bigg|\le C\|f\|^2_{L^2} \qquad (3.5)$$

с некоторой постоянной C, зависящей лишь от постоянной c из (2.3), (2.4).

В силу (3.3), (3.4) подынтегральное выражение в (3.1) для метрики $\overset{0}{g}$ есть некоторая постоянная, выражающаяся через k и K_0. Обозначим ее через $-K_{0,k}$. Приравнивая значения инварианта a_{k+1} $(k \geq 2)$ для метрик g и $\overset{0}{g}$, получаем

$$\int\limits_M (2|\nabla^{(k-1)}\rho|^2 + (k^2+k+1)|\nabla^{(k-1)}\sigma|^2)\,dV = \int\limits_M (P_k(g,\nabla,R)\,dV - K_{0,k}\,dV_0). \quad (3.6)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в правой части (3.6) тождественно равно нулю при $g = \overset{0}{g}$.

Сначала оценим интеграл из правой части (3.6). Подставляя выражение (2.6) для формы объема, имеем

$$\int\limits_M (P_k(g,\nabla,R)\,dV - K_{0,k}\,dV_0) = \int\limits_M ((1+v_1(f))P_k(g,\nabla,R) - K_{0,k})\,dV_0. \quad (3.7)$$

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\widetilde{P}_k(g,\nabla,R) = (1+v_1(f))P_k(g,\nabla,R) - K_{0,k} \quad (3.8)$$

следующим образом: заменим g_{ij} выражениями $g_{ij}(f)$ из (2.2), g^{ij} — выражениями $g^{ij}(f)$ из (2.12), тензор R — выражением $R(f)$ из (2.23) и, наконец, оператор ∇ — его представлением через $\overset{0}{\nabla}$ из (2.19). Мы утверждаем, что в результате этих замен функция (3.8) перейдет в некоторый ряд, принадлежащий $\mathbb{R}_1^{(k)}[[f]]$, т. е.

$$\widetilde{P}_k(g,\nabla,R) = Q_k(f) \in \mathbb{R}_1^{(k)}[[f]]. \quad (3.9)$$

Действительно, $\widetilde{P}_k(g,\nabla,R)$ может рассматриваться как многочлен от переменных $\nabla^{(l)}R$ $(1 \leq l \leq k-2)$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^{(0)}[[f]]$ (ср. с описанием многочлена $P_k(g,\nabla,R)$ в начале этого раздела). С учетом (3.3) формула (2.23) может быть записана в виде равенства $R = R^{(2)}(\overset{0}{\nabla}, f)$, правая часть которого является многочленом от переменных $\overset{0}{\nabla} f$ и $\overset{0}{\nabla}{}^{(2)} f$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^{(0)}[[f]]$. При замене переменной R выражением $R^{(2)}(\overset{0}{\nabla}, f)$ многочлен $\widetilde{P}_k(g,\nabla,R)$ перейдет в многочлен с коэффициентами из $\mathbb{R}^{(0)}[[f]]$ от переменных $\nabla^{(l)}\overset{0}{\nabla} f$, $\nabla^{(l)}\overset{0}{\nabla}{}^{(2)} f$ $(0 \leq l \leq k-2)$. Эти переменные выразятся через $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} f$ $(1 \leq l \leq k)$ при замене ∇ на $\overset{0}{\nabla}$, как следует из утверждения, приведенного после (2.19). Наконец, при замене g на $\overset{0}{g}$ меняются лишь коэффициенты многочлена, поскольку эта замена не связана с дифференцированием. Тем самым в результате этих замен получается многочлен от переменных $\overset{0}{\nabla}{}^{(l)} f$ $(1 \leq l \leq k)$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^{(0)}[[f]]$. Иными словами, $Q_k(f) \in \mathbb{R}^{(k)}[[f]]$. Свободный член ряда $Q_k(f)$ равен нулю, поскольку $Q_k(0) = \widetilde{P}_k(\overset{0}{g}, \overset{0}{\nabla}, \overset{0}{R}) = 0$, как отмечалось выше. Это доказывает (3.9).

Ряд $Q_k(f)$ обладает еще одним важным свойством: каждый моном этого ряда содержит четное число вхождений оператора $\overset{0}{\nabla}$. Это вытекает из инвариантности ряда и теоремы Г. Вейля об инвариантах ортогональной группы (см. [24, теорема II.11.A]). Впрочем, в справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственно, контролируя сохранение четности при заменах (2.19) и (2.23).

С помощью (3.9) формула (3.7) приобретает вид

$$\int\limits_M (P_k(g,\nabla,R)\,dV - K_{0,k}\,dV_0) = \int\limits_M Q_k(f)\,dV_0. \tag{3.10}$$

Для оценки интеграла из правой части выделим линейные по f слагаемые подынтегрального выражения

$$Q_k(f) = L_k(f) + Q'_k(f), \quad \text{где } Q'_k(f) \in \mathbb{R}_2^{(k)}[[f]].$$

Линейная форма $L_k(f)$ состоит из слагаемых, которые получаются из производных $\overset{0}{\nabla}_{l_1\dots l_{2m}} f_{ij}$ $(2m \le k)$ путем поднятия половины индексов с помощью тензора $\overset{0}{g}{}^{ij}$ с последующей сверткой по всем индексам, сгруппированным в пары. Очевидно, что при $m > 0$ каждое такое слагаемое имеет дивергентную форму и, следовательно, дает нулевой вклад в интеграл (3.10). При $m = 0$ имеем единственное слагаемое $\operatorname{tr} f$, интеграл от которого оцениваем с помощью (3.5).

Слагаемые порядка $m \ge 2$ ряда $Q_k(f)$ получаются из произведений

$$\overset{0}{\nabla}{}^{(l_1)} f \dots \overset{0}{\nabla}{}^{(l_m)} f \quad (l_i \le k,\ l_1 + \dots + l_m = 2l)$$

путем поднятия половины индексов с последующей сверткой по всем индексам. Первые $m-2$ множителя оцениваем постоянной 1 из (2.4). Интеграл от оставшегося квадратичного по f выражения оценивается нормой $\|f\|^2_{H^k}$. В итоге получаем оценку

$$\left|\int\limits_M Q_k(f)\,dV_0\right| \le C\|f\|^2_{H^k}. \tag{3.11}$$

В последующих оценках буквой C обозначаются различные постоянные, зависящие от k, постоянной c из (2.3), (2.4) и, возможно, от $(M, \overset{0}{g})$, но не зависящие от f. Из (3.6) и (3.10), (3.11) следует оценка

$$\int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|^2\,dV \le C\|f\|^2_{H^k}. \tag{3.12}$$

Далее нашей целью является выражение интеграла из левой части (3.12) через f с подходящей оценкой возникающих остаточных членов. Начнем с замены формы объема dV метрики g формой объема dV_0 метрики $\overset{0}{g}$. Используя (2.6), получаем

$$\int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|^2\,dV = \int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|^2\,dV_0 + r_k(f), \tag{3.13}$$

где

$$r_k(f) = \int\limits_M v_1(f)|\nabla^{(k-1)}\rho|^2\,dV_0.$$

Поскольку $v_1(f) \in \mathbb{R}_1^{(0)}[[f]]$, остаток допускает оценку

$$|r_k(f)| \le C\|f\|_C \int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|^2\, dV_0. \tag{3.14}$$

Потребуем, чтобы поле f было настолько мало, что $C\|f\|_C < 1/2$. Тогда из (3.12)–(3.14) вытекает оценка

$$\int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|^2\, dV_0 \le C\|f\|^2_{H^k}. \tag{3.15}$$

Заменим участвующую в (3.15) норму $|\cdot|$ метрики g нормой $|\cdot|_0$ метрики $\overset{0}{g}$. Используя (2.14), (2.15), получаем

$$\int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|^2\, dV_0 = \int\limits_M |\nabla^{(k-1)}\rho|_0^2\, dV_0 + r_k(f)$$

с некоторым новым остатком, допускающим ту же оценку (3.14). Таким образом, (3.15) приводится к виду

$$\|\nabla^{(k-1)}\rho\|_{L^2} \le C\|f\|_{H^k}. \tag{3.16}$$

Следующим шагом является замена участвующей в (3.16) ковариантной производной ∇ метрики g на $\overset{0}{\nabla}$. Применяя (2.19) к $u = \rho$, получаем

$$\nabla^{(k-1)}\rho = \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\rho + D^{k-1}_{2,0}\rho + \sum_{j=1}^{k-2} D^{k-1}_{2,j}\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}\rho.$$

Поскольку $\overset{0}{\nabla}\overset{0}{\rho} = 0$, это можно переписать в виде

$$\nabla^{(k-1)}\rho - \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho}) = D^{k-1}_{2,0}\rho + \sum_{j=1}^{k-2} D^{k-1}_{2,j}\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}(\rho - \overset{0}{\rho}). \tag{3.17}$$

Как отмечено после (2.19), $D^{k-1}_{2,j} \in \mathbb{R}_1^{(k-1)}[[f]]$. Поэтому

$$\left|D^{k-1}_{2,j}\right|_0 \le C\sum_{i=0}^{k-1} |\overset{0}{\nabla}{}^{(i)} f|_0 \le kC. \tag{3.18}$$

Поскольку поле f ограничено в C^2-норме, из (2.26) следует, что

$$|\rho|_0 \le C. \tag{3.19}$$

Оценивая слагаемые из правой части (3.17) с помощью (3.18), (3.19), получаем

$$|\nabla^{(k-1)}\rho - \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})|_0 \le C\left(\sum_{j=0}^{k-1} |\overset{0}{\nabla}{}^{(j)} f|_0 + \sum_{j=1}^{k-2} |\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}(\rho - \overset{0}{\rho})|_0\right).$$

Заметим, что $\sum\limits_{j=1}^{k-2} |\overset{0}{\nabla}{}^{(j)}(\rho - \overset{0}{\rho})|_0 \le C\sum\limits_{j=0}^{k} |\overset{0}{\nabla}{}^{(j)} f|_0$, так как $\rho - \overset{0}{\rho} \in \mathbb{R}_1^{(2)}[[f]]$. Используя это неравенство для оценки последнего слагаемого из правой части предыдущей формулы, получаем

$$|\nabla^{(k-1)}\rho - \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})|_0 \le C\sum_{j=0}^{k} |\overset{0}{\nabla}{}^{(j)} f|_0.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя, приходим к оценке

$$\|\nabla^{(k-1)}\rho - \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})\|_{L^2} \le C\|f\|_{H^k}.$$

Отсюда в силу (3.16) следует, что

$$\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})\|_{L^2} \le C\|f\|_{H^k}. \tag{3.20}$$

Наконец, выразим участвующую в (3.20) норму

$$\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})\|^2_{L^2} = \int\limits_M |\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})|^2_0\, dV_0 \tag{3.21}$$

в терминах f. Дифференцируя (2.26), получаем

$$\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho}) = \frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f - \frac{1}{2}\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f + \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)} r.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho - \overset{0}{\rho})\|^2_{L^2} = \frac{1}{4}\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f\|^2_{L^2} \\ - \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f, \overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f)_{L^2} + \int\limits_M r_1^{(k-1)}\, dV_0,\end{aligned} \tag{3.22}$$

где

$$r_1^{(k-1)} = |\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)} r|^2_0 + \langle \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f, \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)} r\rangle_0 - \langle \overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f, \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)} r\rangle_0. \tag{3.23}$$

Рассмотрим сначала третье слагаемое из правой части (3.22). Имеем

$$\langle \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f, \overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f\rangle_0 = \overset{0}{\nabla}_{i_1\dots i_{k-1}}\Delta_0 f_{ij} \cdot \overset{0}{\nabla}{}^{i_1\dots i_{k-1}}\overset{0}{\nabla}{}^i\overset{0}{\nabla}{}^j \operatorname{tr} f.$$

Используя тот факт, что ковариантные производные коммутируют с точностью до алгебраических линейных членов, это равенство приводится к виду

$$\langle \overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f, \overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f\rangle_0 = -\overset{0}{\nabla}_{i_1\dots i_{k-1}}\Delta_0(\overset{0}{\nabla}{}^i f_{ij})\cdot \overset{0}{\nabla}{}^{i_1\dots i_{k-1}}\overset{0}{\nabla}{}^j \operatorname{tr} f + B_1(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)} f) + \dots, \tag{3.24}$$

где $B_1(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)} f)$ — некоторая квадратичная форма от $\overset{0}{\nabla}{}^{(k)} f$, а многоточием обозначены слагаемые, имеющие дивергентную форму. Первое слагаемое в правой части (3.24) равно нулю в силу соленоидальности поля f. После интегрирования (3.24) дает

$$(\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f, \overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}\operatorname{tr} f)_{L^2} = \int\limits_M B_1(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)} f)\, dV_0. \tag{3.25}$$

Теперь преобразуем первое слагаемое из правой части (3.22). Переставляя ковариантные производные в произведении

$$|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f|^2_0 = \overset{0}{\nabla}_{i_1\dots i_{k-1}}\overset{0}{\nabla}{}^p\overset{0}{\nabla}_p f_{ij} \cdot \overset{0}{\nabla}{}^{i_1\dots i_{k-1}}\overset{0}{\nabla}{}^q\overset{0}{\nabla}_q f^{ij}$$

и перебрасывая производные с одного множителя на другой путем выделения дивергентных слагаемых, получаем

$$|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f|^2_0 = |\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)} f|^2_0 + B_2(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)} f) + \dots,$$

где опять $B_2(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f)$ — квадратичная форма от $\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f$, а многоточие обозначает дивергентное слагаемое. После интегрирования это дает

$$\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}\Delta_0 f\|^2_{L^2} = \|\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}f\|^2_{L^2} + \int\limits_M B_2(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f)\,dV_0. \tag{3.26}$$

Подставляя (3.25), (3.26) в (3.22), записываем результат в виде

$$\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}(\rho-\overset{0}{\rho})\|^2_{L^2} = \frac{1}{4}\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}f\|^2_{L^2} + \frac{1}{4}\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}\operatorname{tr} f\|^2_{L^2} + r_2^{(k-1)} \tag{3.27}$$

с остаточным членом

$$r_2^{(k-1)} = \int\limits_M \big(r_1^{(k-1)} + B(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f)\big)\,dV_0, \tag{3.28}$$

где $B(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f)$ — квадратичная форма, допускающая оценку

$$\int\limits_M |B(\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f)|\,dV_0 \le C\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k)}f\|^2_{L^2}. \tag{3.29}$$

Чтобы оценить интеграл от $r_1^{(k-1)}$, обратимся к равенству (3.23). Из него следует оценка

$$\int\limits_M \big|r_1^{(k-1)}\big|\,dV_0 \le C(\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}r\|^2_{L^2} + \|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}r\|_{L^2}\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}f\|_{L^2}). \tag{3.30}$$

Напомним, что r определяется формулой (2.27) и удовлетворяет оценке (2.28), из которой следует, что

$$\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k-1)}r\|_{L^2} \le C(\|f\|_{C^{k+1}}\|f\|_{H^{k+1}} + \|f\|_{H^{k-1}}). \tag{3.31}$$

Из (3.30), (3.31) вытекает неравенство

$$\int\limits_M \big|r_1^{(k-1)}\big|\,dV_0 \le C\big(\|f\|_{C^{k+1}}\|f\|^2_{H^{k+1}} + \|f\|^2_{H^{k-1}}\big). \tag{3.32}$$

Объединяя оценки (3.29) и (3.32), получаем для остатка (3.28) оценку

$$\big|r_2^{(k-1)}\big| \le C\big(\|f\|_{C^{k+1}}\|f\|^2_{H^{k+1}} + \|f\|^2_{H^k}\big). \tag{3.33}$$

Наконец, заменив левую часть неравенства (3.20) его значением из (3.27), получим $\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}f\|^2_{L^2} \le C\|f\|^2_{H^k} - 4r_2^{(k-1)}$. Оценивая последнее слагаемое в правой части с помощью (3.33), приходим к неравенству

$$\|\overset{0}{\nabla}{}^{(k+1)}f\|^2_{L^2} \le 4C\|f\|_{C^{k+1}}\|f\|^2_{H^{k+1}} + C\|f\|^2_{H^k}. \tag{3.34}$$

Если наложить на f условие малости, потребовав, чтобы $4C\|f\|_{C^{k+1}} \le 1/2$, то из (3.34) следует оценка компактности

$$\|f\|^2_{H^{k+1}} \le C\|f\|^2_{H^k}. \tag{3.35}$$

Подведем итог этого раздела.

Лемма 3.1. *Пусть (M,g) — риманово многообразие постоянной секционной кривизны. Для любого $k \ge 2$ существует такая C^{k+1}-окрестность V метрики g, что оценка компактности*

$$\|g'-g\|_{H^{k+1}} \le C\|g'-g\|_{H^k}$$

выполнена для всех $g' \in V$, удовлетворяющих условиям $\delta_g g' = 0$, $\operatorname{Vol}(M,g) = \operatorname{Vol}(M,g')$ и $a_{k+1}(M,g) = a_{k+1}(M,g')$.

Теорема 1.3 следует из леммы 3.1 посредством доводов, приведенных во введении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kac M.* Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Mon. 1966. V. 73. P. 1–23.
2. *Osgood B., Philips R., Sarnak P.* Extremals of determinant of Laplacians // J. Funct. Anal. 1988. V. 80, N 1. P. 148–211.
3. *Milnor J.* Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1964. V. 51. P. 542.
4. *Vigneras M. F.* Variétés Riemanniennes isospectrales et non isométrique // Ann. Math. 1980. V. 112, N 1. P. 21–32.
5. *Sunada T.* Riemannian coverings and isospectral manifolds // Ann. Math. 1985. V. 121, N 1. P. 168–186.
6. *Gordon C., Wilson E.* Isospectral deformations of compact solvmanifolds // J. Differ. Geom. 1984. V. 19, N 1. P. 241–256.
7. *Croke C. B., Sharafutdinov V. A.* Spectral rigidity of a negatively curved manifold // Topology. 1998. V. 37, N 6. P. 1265–1273.
8. *McKean H. P.* Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface // Commun. Pure Appl. Math. 1972. V. 25, N 3. P. 225–246. Correction: ibid. 1974. V. 27, N 134.
9. *Thurston W. P.* Three-dimensional geometry and topology. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1997. (Princeton Math. Ser.; 35). V. 1.
10. *Wang H. C.* Topics in totally discontinuous groups // Symmetric spaces. New York: Boothby–Weiss, 1972. P. 460–485.
11. *Osgood B., Philips R., Sarnak P.* Compact isospectral sets of surfaces // J. Funct. Anal. 1988. V. 80, N 1. P. 212–234.
12. *Brooks R., Perry P., Petersen P.* Compactness and finiteness theorems for isospectral manifolds // J. Reine Angew. Math. 1992. V. 426. P. 67–89.
13. *Croke C. B., Dairbekov N. S., Sharafutdinov V. A.* Local boundary rigidity of a compact Riemannian manifold with curvature bounded above. // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352, N 9. P. 3937–3956.
14. *Gilkey P. B.* Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem. Wilmington, Delaware (USA): Publish or Perish, Inc., 1984.
15. *Berger M.* Eigenvalues of the Laplacian // Global analysis. Proc. Sympos. Pure Math. Berkeley, Calif., 1968. V. 16. P. 121–126.
16. *Patodi V. K.* Curvature and the fundamental solution of the heat operator // J. Indian Math. Soc. 1970. V. 34. P. 269–285.
17. *Guillemin V., Kazhdan D.* Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds // Topology. 1980. V. 19, N 3. P. 301–302.
18. *Sharafutdinov V., Uhlmann G.* On deformation boundary rigidity and spectral rigidity of Riemannian surfaces with no focal points // J. Differ. Geom. 2000. V. 56, N 1. P. 93–110.
19. *Dairbekov N., Sharafutdinov V.* Some problems of integral geometry on Anosov manifolds // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2003. V. 23. P. 59–74.
20. *Llave R. de la, Marco J. M., Moriyon R.* Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livshic cohomology equation // Ann. Math. (2). 1986. V. 123, N 3. P. 537–611.
21. *Лившиц А. Н.* Некоторые свойства гомологий У-систем // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 555–564.
22. *Llave R. de la.* Remarks on Sobolev regularity of Anosov systems // Ergodic Theory Dyn. Syst. 2001. V. 21. P. 1139–1180.
23. *Gilkey P. B.* Functorality and heat equation asymptotics. // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. Differ. Geom. Eger (Hungary). 1989. V. 56. P. 285–315.
24. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.

Статья поступила 23 матра 2009 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sharaf@math.nsc.ru