Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 519.1

О ПЕРЕСТАНОВКАХ, ПОРОЖДЕННЫХ СЛОВАМИ ШТУРМА

М. А. Макаров

Аннотация. Бесконечные перестановки (в нашем смысле) введены в работе [1]. В данной работе введен класс бесконечных перестановок, порожденных словами Штурма и по своим свойствам похожих на них. Найдена комбинаторная сложность, описаны графы Рози, частоты подперестановок и функции рекуррентности. Также найдены их арифметическая сложность и сложность Камаэ.

Ключевые слова: бесконечная перестановка, слово Штурма, комбинаторная сложность, граф Рози, арифметическая сложность, сложность Камаэ.

1. Введение

Бесконечные перестановки можно рассматривать с точки зрения комбинаторных характеристик, аналогичных тем, которые традиционно рассматриваются для символьных последовательностей. Например, в работе [1] исследуются низкая комбинаторная сложность и периодичность бесконечных перестановок.

Под *бесконечной перестановкой* π в дальнейшем будем понимать линейный порядок $\preceq_\pi$ на некотором счетном множестве X (обычно на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ или на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$) по отношению к «обычному» линейному порядку $\leq$ на X. Более точно, каждая бесконечная перестановка — это упорядоченная тройка $\pi = \langle X, \leq, \preceq_\pi \rangle$, где $\leq$ и $\preceq_\pi$ — линейные порядки на X. Вместо записи $x \preceq_\pi y$ для $x, y \in X$ мы используем более удобную запись $\pi(x) \leq \pi(y)$. Нетрудно понять, что любую биекцию конечного множества на себя можно мыслить как линейный порядок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и, следовательно, определить конечные перестановки аналогичным образом. Элементы множества X по отношению к перестановке π будем называть *вершинами перестановки* и обозначать через $\pi(1), \pi(2), \dots$. Так, например, конечную перестановку $\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ будем часто записывать в виде $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)$, причем число n будем называть *длиной* перестановки π. Множество всех конечных перестановок длины n обозначаем через $\mathscr{S}_n$.

Для каждой перестановки π (конечной или бесконечной) и $x, y \in X$, $x \neq y$, определим символ $\gamma^\pi\{x, y\} \in \{0, 1\}$ (или просто $\gamma\{x, y\}$, если ясно, о какой перестановке идет речь) следующим образом:

$$\gamma^\pi\{x, y\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi(x) < \pi(y), \\ 1, & \text{если } \pi(x) > \pi(y). \end{cases}$$

Ясно, что перестановка π полностью определяется символами $\gamma^\pi\{x, y\}$. Таким образом, бесконечная перестановка может быть задана двумерным словом над двухсимвольным алфавитом.

Пусть заданы бесконечная перестановка $\pi = \langle \mathbb{N}, \leq, \preceq_\pi \rangle$ и два натуральных числа m_1 и m_2, причем $m_1 < m_2$. Тогда линейный порядок $\preceq_\pi$ на $\mathbb{N}$ порождает линейный порядок на множестве $\{m_1, m_1 + 1, \ldots, m_2\}$. Конечную перестановку, соответствующую этому линейному порядку, будем обозначать через $\pi[m_1, m_2]$. Иными словами, $\pi[m_1, m_2]$ — это такая перестановка длины $m_2 - m_1 + 1$, что для всех $i, j \in \{1, m_2 - m_1 + 1\}$ выполнено

$$\gamma^{\pi[m_1,m_2]}\{i,j\} = \gamma^\pi\{m_1 + i - 1, m_1 + j - 1\}.$$

Аналогичным образом можно определить $\pi[m_1, m_2]$ и для случая конечной перестановки π.

Пример 1. Если $\pi = 2431$, то $\pi[2, 4] = 321$.

Будем пользоваться аналогичным обозначением для символьных последовательностей: запись $w[m_1, m_2]$ означает подслово $w(m_1)w(m_1 + 1) \ldots w(m_2)$ слова w.

Будем говорить, что конечная перестановка $\tau \in \mathscr{S}_n$ является *подперестановкой* бесконечной перестановки π, если $\tau = \pi[m_1, m_2]$ для некоторых m_1 и m_2. Множество конечных подперестановок бесконечной перестановки π будем обозначать через F_π. Кроме того, для фиксированной длины n обозначим через $F_\pi(n) = F_\pi \cap \mathscr{S}_n$ множество подперестановок π длины n, а их количество обозначим через $f_\pi(n)$. Последовательность $\{f_\pi(n)\}_{n=2}^\infty$ называется *комбинаторной сложностью* бесконечной перестановки π. Легко видеть, что $f_\pi(n) \leq |\mathscr{S}_n| = n!$.

Исследуя структуру подслов бесконечных слов, удобно рассматривать последовательность графов Рози. Некоторая информация о графах Рози (для бесконечных слов) может быть найдена, например, в [2]. Аналогичное понятие для бесконечных перестановок может быть введено следующим образом.

Для заданной бесконечной перестановки π *графом Рози* порядка n будем называть ориентированный мультиграф $G_\pi(n) = \langle F_\pi(n), F_\pi(n+1) \rangle$, множество вершин которого — это все подперестановки π длины n, а множество дуг — это все подперестановки π длины $n+1$. Более точно, каждая дуга $G_\pi(n)$, идущая из вершины $u \in F_\pi(n)$ в вершину $v \in F_\pi(n)$, соответствует перестановке $\xi \in F_\pi(n+1)$ такой, что $u = \xi[1, n]$ и $v = \xi[2, n+1]$. В $G_\pi(n)$ допускаются параллельные ребра, поскольку перестановка ξ с указанными свойствами может быть не единственной.

Другими характеристиками бесконечных перестановок являются *арифметическая сложность* и *сложность Камаэ*. Необходимые определения даны в соответствующих разделах.

Бесконечные перестановки и бесконечные слова имеют много общего. Более того, иногда удается бесконечному слову сопоставить бесконечную перестановку с похожими свойствами по некоторой схеме. Одна из таких схем рассмотрена в работе [3].

Пусть $w = w(1)w(2) \ldots w(n) \ldots$ — произвольное непериодическое слово над алфавитом $\{0, 1\}$. Последовательность его суффиксов по лексикографическому порядку образует бесконечную перестановку на $\mathbb{N}$, которую мы называем *допустимой* и обозначаем через π_w. Будем говорить, что конечная перестановка *w-допустима*, если она является подперестановкой π_w.

Пример 2. Перестановка 2431 является w-допустимой для любого слова w такого, что $w[1, 6] = 011010$, поскольку в этом случае легко убедиться, что $\pi_w[1, 4] = 2431$.

Замечание 1. Если $w(i) = w(j)$, то $\gamma^{\pi_w}\{i, j\} = \gamma^{\pi_w}\{i + 1, j + 1\}$.

Замечание 2. Имеем $\pi_w(n) < \pi_w(n+1)$ тогда и только тогда, когда $w(n) = 0$. Подробное доказательство этого факта см. в доказательстве леммы 1 в [3].

Лемма 1 [3, лемма 1]. *Пусть слова $u = u(1)u(2)\dots$ и $v = v(1)v(2)\dots$ таковы, что $\pi_u[1, n+1] = \pi_v[1, n+1]$. Тогда $u[1, n] = v[1, n]$.*

Из леммы 1 непосредственно следует нижняя оценка

$$f_{\pi_w}(n) \geq f_w(n-1), \tag{$*$}$$

где $f_w(n)$ — комбинаторная сложность слова w, т. е. количество всех его подслов длины n. В работе [3] получена также верхняя оценка на комбинаторную сложность допустимых перестановок. В частности, доказано, что не существует такого слова w, что сложность порожденной им перестановки $f_{\pi_w}(n)$ растет быстрее, чем $O(n \cdot 2^n)$.

В настоящей статье мы рассматриваем бесконечные перестановки, порожденные *словами Штурма*. Есть несколько эквивалентных определений слов Штурма (см. например [4]), мы используем следующее. Зафиксируем иррациональное число $\alpha \in (0, 1)$ и действительное число $\beta \in \mathbb{R}$ и положим

$$w(n) = \lfloor \alpha(n+1) + \beta \rfloor - \lfloor \alpha n + \beta \rfloor.$$

Будем говорить, что $w(\alpha, \beta) = w(1)w(2)\dots$ — *слово Штурма с параметрами* α и β. Классический результат Морса и Хедлунда [5] гласит, что для всякого бесконечного слова w, не имеющего вид uv^ω, выполнено $f_w(n) \geq n+1$. Класс слов, для которых это неравенство обращается в равенство, совпадает с классом слов Штурма. Тем самым слова Штурма имеют минимальную комбинаторную сложность среди существенно непериодических.

Обозначим через $\sigma(\alpha, \beta) = \pi_{w(\alpha,\beta)}$ перестановку, порожденную словом Штурма $w(\alpha, \beta)$. В следующем разделе будет показано, что для перестановки $\sigma(\alpha, \beta)$ достигается нижняя оценка $(*)$, т. е. будет доказано, что

$$f_{\sigma(\alpha,\beta)}(n) = f_{w(\alpha,\beta)}(n-1) = n.$$

Из этого, в частности, будет следовать, что перестановки, порожденные словами Штурма, имеют минимальную комбинаторную сложность в классе допустимых перестановок. Однако, как показано в работе [1], среди всех непериодических перестановок есть перестановки, сложность которых растет медленнее.

2. Комбинаторная сложность

В данном разделе параметры α и β зафиксированы, поэтому для краткости вместо $w(\alpha, \beta)$ будем писать просто w, а вместо $\sigma(\alpha, \beta)$ — просто σ.

Рассмотрим последовательность действительных чисел $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенную соотношением

$$s_n = \alpha n + \beta - \lfloor \alpha n + \beta \rfloor.$$

Обозначим через σ' перестановку, порожденную последовательностью $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. такую перестановку σ', что $\sigma'(i) < \sigma'(j)$ тогда и только тогда, когда $s_i < s_j$.

Замечание 3. Из определения слов Штурма следует, что $w(n) = 0$ тогда и только тогда, когда $s_n < 1 - \alpha$. В частности, отсюда вытекает, что

$$s_{n+1} - s_n = \begin{cases} \alpha, & \text{если } w(n) = 0, \\ \alpha - 1, & \text{если } w(n) = 1. \end{cases}$$

Лемма 2. *Выполнено равенство $\sigma = \sigma'$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\gamma^{\sigma}\{i,j\} = \gamma^{\sigma'}\{i,j\}$ при всех $i,j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Предположим, что $\sigma(i) < \sigma(j)$. Тогда существуют такие $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и слово $p \in \{0,1\}^*$, что $w[i,i+k] = p0$ и $w[j,j+k] = p1$. Покажем индукцией по длине p, что $\sigma'(i) < \sigma'(j)$. Если длина p равна нулю, то из замечания 3 следует, что $s_i < 1-\alpha \leq s_j$, откуда $\sigma'(i) < \sigma'(j)$. Теперь предположим, что для длины p, равной $k \geq 0$, утверждение доказано, и рассмотрим его для длины $k+1$. Так как $k+1 \geq 1$, имеем $w(i) = w(j)$. Следовательно, из замечания 3 получим $s_{i+1} - s_i = s_{j+1} - s_j$. Значит, $s_{i+1} - s_{j+1} = s_i - s_j$. Из совпадения знаков левой и правой частей данного равенства вытекает, что $\gamma^{\sigma'}\{i+1, j+1\} = \gamma^{\sigma'}\{i,j\}$. Но из замечания 1 и предположения индукции следует, что $\sigma'(i+1) < \sigma'(j+1)$, откуда $\sigma'(i) < \sigma'(j)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеем $\sigma[m_1+1, m_1+n+1] = \sigma[m_2+1, m_2+n+1]$ тогда и только тогда, когда $w[m_1+1, m_1+n] = w[m_2+1, m_2+n]$.*

Доказательство. Если $\sigma[m_1+1, m_1+n+1] = \sigma[m_2+1, m_2+n+1]$, то равенство $w[m_1+1, m_1+n] = w[m_2+1, m_2+n]$ непосредственно следует из леммы 1. Докажем обратное утверждение.

Пусть $w[m_1+1, m_1+n] = w[m_2+1, m_2+n]$. Если $1 \leq i < j \leq n+1$, то, учитывая замечание 3, имеем

$$\begin{aligned} s_{m_1+j} - s_{m_1+i} &= k\alpha - |w[m_1+i, m_1+j-1]|_1 \\ &= k\alpha - |w[m_2+i, m_2+j-1]|_1 = s_{m_2+j} - s_{m_2+i}, \end{aligned}$$

где через $|u|_1$ обозначено количество единиц в слове u. Следовательно, $\gamma^{\sigma}\{m_1+i, m_1+j\} = \gamma^{\sigma}\{m_2+i, m_2+j\}$ при $1 \leq i < j \leq n+1$, откуда $\sigma[m_1+1, m_1+n+1] = \sigma[m_2+1, m_2+n+1]$.

Лемма 3 фактически означает, что перестановка σ и слово w *комбинаторно-изоморфны* в том смысле, что все свойства слова w, определяемые лишь через операцию взятия подслова, могут быть перенесены на перестановку σ. Такими свойствами являются, например, комбинаторная сложность и последовательность графов Рози. Для некоторой полноты картины приведем еще два таких свойств, которые традиционно рассматриваются для бесконечных слов. А именно, это частоты подслов и функции рекуррентности.

Пусть задана бесконечная перестановка π на $\mathbb{N}$, τ — ее конечная подперестановка длины n. Пусть перестановка τ встречается в префиксе $\pi[1, k+n-1]$ в качестве подперестановки $M_k^{\pi}(\tau)$ раз. Иными словами,

$$M_k^{\pi}(\tau) = |\{m | \pi[m+1, m+n] = \tau, 0 \leq m \leq k-1\}|.$$

Положим

$$\mu_{\pi}(\tau) = \lim_{k\to\infty} \frac{M_k^{\pi}(\tau)}{k}.$$

Если предел в правой части существует, то число $\mu_{\pi}(\tau)$ называется *частотой подперестановки* τ в перестановке π. Аналогично можно определить частоту $\mu_w(v)$ подслова v в бесконечном слове w.

Обозначим через $R_{\pi}(n)$ минимальное число такое, что в любой перестановке из $F_{\pi}(R_w(n))$ встречаются в качестве подперестановок все перестановки из $F_{\pi}(n)$. Если такого числа не существует, т. е. если расстояние между последовательными вхождениями в π некоторой ее подперестановки не ограничено, то $R_{\pi}(n)$ полагается равным бесконечности. Функцию $R_{\pi}(n)$ будем называть *функцией рекуррентности.* Перестановка π называется *равномерно рекуррентной*, если $R_\pi(n)$ конечна при всех n. Определим еще две функции, родственные функции рекуррентности. А именно, через $R'_\pi(n)$ обозначим длину кратчайшего префикса $\pi[1, R'_\pi(n)]$, содержащего в качестве подперестановок все перестановки из $F_\pi(n)$, через $R''_\pi(n)$ — длину кратчайшей подперестановки перестановки π, содержащей в качестве подперестановок все перестановки из $F_\pi(n)$. Нетрудно видеть, что всегда выполняются неравенства $R''_\pi(n) \le R'_\pi(n) \le R_\pi(n)$. Аналогичным образом определяются функции рекуррентности $R_w(n)$, $R'_w(n)$, $R''_w(n)$ для бесконечного слова w.

Теорема 1. *При любом натуральном $n \ge 2$ верны следующие утверждения.*

(1) *Комбинаторная сложность перестановки σ равна $f_\sigma(n) = f_w(n-1) = n$.*

(2) *Граф Рози $G_\sigma(n)$ изоморфен графу Рози $G_w(n-1)$.*

(3) *Перестановка σ равномерно рекуррентна, причем*

$$R_\sigma(n) = R_w(n-1), \quad R'_\sigma(n) = R'_w(n-1), \quad R''_\sigma(n) = R''_w(n-1).$$

(4) *Если π — конечная подперестановка длины n перестановки σ, то ее частота в σ существует и равна $\mu_\sigma(\pi) = \mu_w(u)$, где u — подслово длины $n-1$ слова w, определяемое соотношениями $u(i) = \gamma^\pi\{i, i+1\}$ при $i \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 3.

3. Сложность Камаэ

Сложность Камаэ для слов введена в работе [6]. Аналогичное понятие можно ввести и для бесконечных перестановок.

Последовательность целых положительных чисел $d = \langle d_1, \dots, d_{n-1}\rangle$ условимся называть *окном* длины n с *дистанциями* $d_1, \dots, d_{n-1}$. Будем говорить, что конечная перестановка τ длины n *встречается в бесконечной перестановке π по окну* d, если существует такое m, что $\gamma^\tau\{i,j\} = \gamma^\pi\{m + D_{i-1}, m + D_{j-1}\}$ при всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \ne j$, где $D_0 = 0$, $D_k = \sum\limits_{j=1}^{k} d_j$ при $1 \le k \le n-1$. Количество перестановок, встречающихся в π по окну d, обозначим через $f_\pi(d)$. В частности, если d — окно с дистанциями $d_1 = \dots = d_{n-1} = 1$, то получаем комбинаторную сложность: $f_\pi(d) = f_\pi(n)$. Положим $k_\pi(n) = \sup\limits_d f_\pi(d)$, где супремум берется по всем окнам d длины n. Последовательность $\{k_\pi(n)\}_{n=2}^\infty$ будем называть *сложностью Камаэ* (или *максимальной оконной сложностью*) перестановки π. В [6] доказано, что сложность Камаэ слов Штурма равна $2n$.

Теорема 2. *Сложность Камаэ перестановки σ равна $k_\sigma(n) = n$.*

Доказательство. Покажем, что по любому окну длины n в перестановке σ встречается ровно n различных перестановок. Зафиксируем окно $d = \langle d_1, \dots, d_{n-1}\rangle$. В силу леммы 2 интересующее нас множество перестановок совпадает с множеством перестановок, порожденных последовательностями вида

$$\langle s_{m+D_0}, \dots, s_{m+D_{n-1}}\rangle = \langle \{s_m + D_0\alpha\}, \dots, \{s_m + D_{n-1}\alpha\}\rangle,$$

где через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x, т. е. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Как известно, последовательность чисел вида s_m образует всюду плотное множество на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, множество перестановок, встречающихся в σ

по окну d, совпадает с множеством перестановок, порожденных последовательностями вида $\langle\{\beta' + D_0\alpha\}, \dots, \{\beta' + D_{n-1}\alpha\}\rangle$, где $\beta' \in [0,1]$. Покажем, что при непрерывном увеличении числа β' от 0 до 1 перестановка, порожденная указанной последовательностью меняется в точности тогда, когда одно из чисел $b_0 = \beta' + D_0\alpha, \dots, b_{n-1} = \beta' + D_{n-1}\alpha$ попадает на целую точку, причем все эти перестановки различны. Дробные части указанных чисел удобно изображать на окружности единичной длины. Более точно, зафиксируем на окружности точку, которую назовем *началом координат*; тогда число $x \in [0,1)$ будем изображать такой точкой окружности, что при движении по окружности от начала координат к ней против часовой стрелки проходится дуга длины x. Изобразим на окружности дробные части $\{b_0\}, \dots, \{b_{n-1}\}$. Они разбивают окружность на n дуг. Очевидно, что перестановки, соответствующие двум таким наборам точек (идущим по окружности в одинаковом порядке), совпадают тогда и только тогда, когда начало координат попадает в одну и ту же дугу. При непрерывном увеличении β' от 0 до 1 все эти n точек будут равномерно поворачиваться против часовой стрелки, совершив в конечном счете полный оборот. Поэтому начало координат побывает в каждой из n дуг. Следовательно, всего по окну d встретится ровно n различных перестановок. Теорема доказана.

4. Арифметическая сложность

Через $\alpha_\pi(k,d)$ будем обозначать бесконечную перестановку, соответствующую линейному порядку, индуцированному $\preceq_\pi$ на арифметической прогрессии $\{k+d, k+2d, k+3d, \dots\}$. А именно,

$$\gamma^{\alpha_\pi(k,d)}\{i,j\} = \gamma^\pi\{k+id, k+jd\}.$$

В частности, при $k=0$ и $d=1$ получаем $\alpha_\pi(0,1) = \pi$.

Кроме того, обозначим через $A_\pi(n)$ множество перестановок длины n, встречающихся в π по арифметическим прогрессиям:

$$A_\pi(n) = \bigcup_{k,d} F_{\alpha_\pi(k,d)}(n), \quad A_\pi = \bigcup_n A_\pi(n).$$

Последовательность $\{a_\pi(n)\}_{n=2}^\infty$, где $a_\pi(n) = |A_\pi(n)|$, будем называть *арифметической сложностью* бесконечной перестановки π.

Теорема 3. *Арифметическая сложность перестановки $\sigma = \sigma(\alpha,\beta)$ равна*

$$a_\sigma(n+1) = (n+1)\sum_{p=1}^{n} \varphi(p),$$

где φ — функция Эйлера.

Доказательство. Последовательность $\{s_n\}$, введенную в разд. 2, будем теперь обозначать через $\{s_n(\alpha,\beta)\}$, указывая явно, что она зависит от параметров α и β. В случае если α рационально, слово $w(\alpha,\beta)$ получается периодическим. Поэтому некоторые его суффиксы будут совпадать, и тем самым бесконечную перестановку $\sigma(\alpha,\beta)$ нельзя определить корректно. Однако если минимальный период слова $w(\alpha,\beta)$ больше n, то понятно, что корректно определяется префикс $\sigma(\alpha,\beta)[1,n]$. Легко видеть, что $s_{k+dn}(\alpha,\beta) = s_n(d\alpha - \lfloor d\alpha\rfloor, \beta + k\alpha)$. Следовательно,

$$A_{\sigma(\alpha,\beta)} = \bigcup_{d,k} F_{\sigma(d\alpha - \lfloor d\alpha\rfloor, \beta+k\alpha)}.$$

Как известно, множество $\{d\alpha - \lfloor d\alpha \rfloor \mid d \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно на $[0,1]$. Следовательно, $A_{\sigma(\alpha,\beta)} = \bigcup\limits_{\alpha',\beta'} F_{\sigma(\alpha',\beta')}$. Таким образом, $A_{\sigma(\alpha,\beta)}$ не зависит ни от α, ни от β, и задача свелась к нахождению комбинаторной сложности языка

$$\mathscr{F} = \bigcup_{\alpha,\beta\in[0,1]} F_{\sigma(\alpha,\beta)}.$$

Зафиксируем натуральное n и будем искать $a_\sigma(n+1) = |\mathscr{F}(n+1)|$. Каждой точке (α,β) квадрата $[0,1]\times[0,1]$ сопоставляем перестановку $\sigma(\alpha,\beta)[1,n+1]$. Как и в доказательстве теоремы 2, будем изображать члены последовательности $\{s_i(\alpha,\beta)\}_{i=1}^{n+1}$ точками на единичной окружности. Ясно, что перестановка $\sigma(\alpha,\beta)[1,n+1]$ полностью определяется положением этих точек друг относительно друга и относительно начала координат. Следовательно, при непрерывном изменении α и β указанная перестановка может измениться в одном из двух случаев: если одна из точек на окружности «перескочит» через начало координат или если какие-то две точки поменяются местами. Первый случай соответствует равенству $\beta + k\alpha = m$ при некоторых $k \in \{0,\dots,n\}$ и $m \in \mathbb{Z}$. Второй случай соответствует равенству $k\alpha = m$ при некоторых $k \in \{2,\dots,n\}$ и $m \in \mathbb{Z}$ (ясно, что можно ограничиться рассмотрением случая $k \in \{2,\dots,n\}$, $m \in \{1,\dots,n\}$, где k и m взаимно просты). Таким образом, получаем два семейства прямых, которые делят квадрат $[0,1]\times[0,1]$ на некоторое количество частей. Понятно, что всем точкам (α,β) квадрата, принадлежащим одной и той же части, соответствует одна и та же перестановка $\sigma(\alpha,\beta)[1,n+1]$. Докажем, что верно и обратное. Пусть $\sigma(\alpha_1,\beta_1)[1,n+1] = \sigma(\alpha_2,\beta_2)[1,n+1]$. Если точки (α_1,β_1) и (α_2,β_2) лежат по разные стороны от какой-нибудь прямой семейства $\{\beta + k\alpha = m\}$, ввиду предложения 2 из [7] тогда $w(\alpha_1,\beta_1)[1,n] \neq w(\alpha_2,\beta_2)[1,n]$, что противоречит лемме 1. Значит, отрезок, соединяющий точки (α_1,β_1) и (α_2,β_2), не пересекает ни одной прямой семейства $\{\beta + k\alpha = m\}$. Предположим, что он пересекает какую-нибудь прямую семейства $\{k\alpha = m\}$, скажем прямую $k_0\alpha = m_0$. Легко видеть, что при движении по этому отрезку от (α_1,β_1) к (α_2,β_2) символ $\gamma^{\sigma(\alpha,\beta)}\{1,1+k_0\}$ изменится на противоположный ровно в одной точке, а именно в точке пересечения с прямой $k_0\alpha = m_0$. Следовательно, $\gamma^{\sigma(\alpha_1,\beta_1)}\{1,1+k_0\} \neq \gamma^{\sigma(\alpha_2,\beta_2)}\{1,1+k_0\}$, что противоречит равенству $\sigma(\alpha_1,\beta_1)[1,n+1] = \sigma(\alpha_2,\beta_2)[1,n+1]$. Таким образом, задача свелась к подсчету количества частей, на которые разбился квадрат.

В работе [7] уже подсчитано количество частей, на которые разбивается квадрат прямыми семейства $\{\beta + k\alpha = m\}$. Обозначим множество этих частей через A_0, а их количество — через $a_0(n+1)$. В работе [7] показано, что

$$a_0(n+1) = 1 + \sum_{p=1}^{n} (n-p+1)\varphi(p).$$

При добавлении семейства вертикальных прямых $\{k\alpha = m\}$ некоторые части из A_0 будут разделены на несколько частей. Таким образом,

$$a_\sigma(n+1) = a_0(n+1) + \sum h(m,k),$$

где сумма берется по всем $k \in \{2,\dots,n\}$, $m \in \{1,\dots,n\}$ таким, что m и k взаимно просты; через $h(m,k)$ обозначено количество частей из A_0, которые пересекает прямая $k\alpha = m$. Нетрудно понять, что $h(m,k) - 1$ равно количеству таких внутренних точек $(m/k,\beta)$ квадрата $[0,1]\times[0,1]$, через которые проходит хотя бы одна прямая семейства $\{\beta + k\alpha = m\}$. Прямая $\beta + k'\alpha = m'$ проходит через точку $\left(\frac{m}{k}, m' - \frac{k'm}{k}\right)$. Для любого k' выбором m' можно добиться того, чтобы эта точка принадлежала $\{m/k\} \times [0, 1)$. Поэтому $h(m, k) - 1$ равно количеству попарно различных ненулевых остатков от деления $k'm$ на k. Однако поскольку m взаимно просто с k, остаток m имеет порядок k в циклической группе $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, т. е. количество указанных остатков равно $k - 1$. Таким образом, $h(m, k) - 1 = k - 1$, откуда $h(m, k) = k$. Тогда сумма $\sum h(m, k)$ по всем $k \in \{2, \dots, n\}$, $m \in \{1, \dots, n\}$ таким, что m и k взаимно просты, равна $\sum\limits_{k=2}^{n} k\varphi(k)$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} a_\sigma(n+1) &= a_0(n+1) + \sum_{k=2}^{n} k\varphi(k) \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{n} (n - p + 1)\varphi(p) + \sum_{k=2}^{n} k\varphi(k) = (n+1)\sum_{p=1}^{n} \varphi(p). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Мы нашли точную формулу для $a_\sigma(n)$ (и она не зависит от параметров α и β), в то время как арифметическая сложность слов Штурма зависит от α и до сих пор не найдена, для нее известны лишь нижняя [8] и верхняя [9] оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fon-Der-Flaass D. G., Frid A. E.* On periodicity and low complexity of infinite permutations // Europ. J. Comb. 2007. V. 28, N 8. P. 2106–2114.
2. *Cassaigne J.* On a conjecture of J. Shallit // Proc. of the 24th Intern. colloquium on automata, languages and programming. Bologna: Springer-Verl., 1997. P. 693–704.
3. *Макаров М.* О перестановках, порожденных бесконечными бинарными словами // Сиб. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 304–311.
4. *Berstel J.* Recent results in Sturmian words // Developments in language theory. II. Magdeburg, 1996. P. 13–24.
5. *Morse M., Hedlund G. A.* Symbolic dynamics. II: Sturmian trajectories // Amer. J. Math. 1940. V. 61. P. 1–42.
6. *Kamae T., Zamboni L.* Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic theory and dynamical systems. 2002. V. 22, N 4. P. 1191–1199.
7. *Berstel J., Pocchiola M.* A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words // Intern. J. Algebra Comput. 1993. V. 3. P. 349–355.
8. *Фрид А. Э.* Нижняя оценка на арифметическую сложность слов Штурма // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 14–22.
9. *Cassaigne J., Frid A.* On arithmetical complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 2007. V. 380, N 3. P. 304–316.

Статья поступила 26 ноября 2007 г.

Макаров Михаил Александрович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`mike_mike@ngs.ru`