Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512

СУПЕРАЛГЕБРЫ И ОПЕРАДЫ. I

С. Н. Тронин

Аннотация. Строится теория мультиоператорных супералгебр и супералгебр над операдами.

Ключевые слова: супералгебра, операда, тождество.

Введение

В работе предпринята попытка построить теорию мультиоператорных супералгебр с использованием теории операд. Традиционная супералгебра — это $\mathbb{Z}_2$-градуированный модуль над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей с заданной на нем бинарной билинейной операцией $x \cdot y$, обладающей свойством: если x, y однородны и $\tilde{x}, \tilde{y}$ — их степени (элементы множества $\{0, 1\}$), то $x \cdot y = -(-1)^{\tilde{x}\tilde{y}} y \cdot x$. К этому тождеству добавляются другие, характеризующие супералгебру как объект из того или иного многообразия (ассоциативных, лиевских, йордановых и т. п.) супералгебр. Возможно ли такое обобщение этого определения, которое приводило бы к теории, подобной теории линейных мультиоператорных алгебр в духе работ [1, 2]? Наш ответ на этот вопрос положителен. При этом оказывается, что у каждого многообразия «обычных» линейных мультиоператорных алгебр, определяемых полилинейными тождествами, имеется «суперааналог». Имеется также аналог грассмановой оболочки супералгебры для самого общего случая, который обладает точно таким же «классифицирующим» свойством, что и в случае супералгебр с одной бинарной операцией [3, 4]. Теория мультиоператорных супералгебр строится в данной работе с использованием языка теории операд.

Работа состоит из двух частей. Первая часть содержит § 1, 2. В § 1 описывается способ построения многообразий супералгебр для произвольной сигнатуры Ω. Основой для определения супералгебр в таком общем случае является предположение о том, что на множестве n-арных операций Ω_n действует справа группа подстановок n-й степени Σ_n, а также наличие особого левого действия группы Σ_n на n-й тензорной степени $\mathbb{Z}_2$-градуированного модуля над коммутативным кольцом. Используя это определение, можно развивать теорию тождеств и многообразий линейных Ω-супералгебр аналогично тому, как это делается для линейных Ω-алгебр.

В § 2 вводится понятие супералгебр над линейными Σ-операдами. Используемые определения и обозначения из теории операд соответствуют работам [5, 6]. Построен $\mathbb{Z}_2$-градуированный аналог «операды эндоморфизмов» (которая впервые появилась, по-видимому, в [7]). Описаны правила, которые позволяют задавать алгебры и супералгебры над операдами в терминах тождеств. Показано, что многообразие супералгебр (в смысле § 1) над линейной симметрической операдой (т. е. Σ-операдой) определяется полилинейными тождествами. Из результатов первых двух параграфов можно легко вывести, что известные типы супералгебр получаются как супералгебры над соответствующими операдами.

Вторая часть работы содержит § 3–5. В § 3 доказывается, что многообразие супералгебр определяется полилинейными тождествами тогда, когда оно рационально эквивалентно [8, 9] многообразию супералгебр над некоторой линейной симметрической операдой. Этот результат аналогичен основному результату работы [6]. В § 4 вводится понятие грассмановой оболочки для супералгебр над произвольной линейной операдой и показывается, что «традиционный» [3] способ определения принадлежности супералгебры к тому или иному многообразию в случае «традиционных» супералгебр с одной бинарной операцией умножения равносилен тому способу определения многообразий супералгебр, который был использован в § 1, 2. В § 5 аналогичным образом исследуются представления супералгебр, а точнее операдные аналоги представлений, которые можно определить для произвольных супералгебр над произвольными операдами. Известно понятие модуля над алгеброй над операдой, служащее заменой понятия представления алгебр для случая произвольных алгебр над произвольными операдами. В § 5 определяются модули над супералгебрами над операдами и устанавливаются некоторые их свойства.

Отметим еще, что предварительные результаты о супералгебрах над операдами опубликованы в [10–13].

§ 1. Мультиоператорные супералгебры

Через K на протяжении всей данной работы будет обозначаться некоторое коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированный K-модуль L с четной компонентой L_0 и нечетной L_1. Степень однородного элемента $x \in L$ будем обозначать через $\tilde{x}$. Напомним, что если $x \in L_i$, то $\tilde{x} = i \in \{0, 1\}$. Тензорную степень $L^{\otimes n}$ можно также наделить естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой. Если все $x_i \in L$ однородны и $y = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$, то $\tilde{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \pmod 2$. Исходным пунктом для наших результатов является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Существует левое действие группы подстановок Σ_n на $L^{\otimes n}$ такое, что для однородного элемента $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$ и $\sigma \in \Sigma_n$*

$$\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \mathrm{sgn}(\sigma, \bar{x})(x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

где $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ (строка символов) и $\mathrm{sgn}(\sigma, \bar{x}) \in \{+1, -1\}$, причем если σ — транспозиция, $\sigma = (i, j)$, $i < j$, то $\mathrm{sgn}(\sigma, \bar{x}) = (-1)^k$, где $k = \tilde{x}_i \tilde{x}_j + (\tilde{x}_i + \tilde{x}_j)(\tilde{x}_{i+1} + \dots + \tilde{x}_{j-1})$.

Доказательство. Используем следующее задание группы подстановок Σ_n образующими и соотношениями (см. [14, (6.28)]):

$$t_i^2 = (t_i t_{i+1})^3 = (t_j t_i t_{i+1} t_i)^2 = 1,$$

где $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, $j \neq i, i+1$, и подразумевается, что $t_1 = t_n$. При этом t_i соответствует транспозиции (i, n), причем умножение подстановок соответствует естественным образом определяемому левому действию симметрической группы Σ_n на множестве $\{1, \dots, n\}$.

Будем использовать обозначения вида $x\otimes\dots\otimes\overset{i}{y}\otimes\dots\otimes z$, чтобы пометить i-й слева «множитель» y. Определим автоморфизмы $t_i : L^{\otimes n} \to L^{\otimes n}$ следующим образом:

$$t_i(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_i} \otimes \dots \otimes \overset{n}{x_n}) = (-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_n + (\tilde{x}_i+\tilde{x}_n)(\tilde{x}_{i+1}+\dots+\tilde{x}_n)}(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_n} \otimes \dots \otimes \overset{n}{x_i}).$$

Так как $(i, j) = (i, n)(j, n)(i, n)$, необходимо сначала проверить, что при $i < j < n$ имеет место равенство

$$t_it_jt_i(x_1\otimes\dots\otimes x_n) = (-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_j + (\tilde{x}_i+\tilde{x}_j)(\tilde{x}_{i+1}+\dots+\tilde{x}_{j-1})}(x_1\otimes\dots\otimes\overset{i}{x_j}\otimes\dots\otimes\overset{j}{x_i}\otimes\dots\otimes x_n). \tag{1}$$

Рассмотрим однородный элемент $w = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ и проделаем необходимые вычисления:

$t_i(w) = \varepsilon_1(x_1 \otimes\dots\otimes \overset{i}{x_n} \otimes\dots\otimes x_i)$, $\quad \varepsilon_1 = (-1)^{k_1}$, $k_1 = \tilde{x}_i\tilde{x}_n + (\tilde{x}_i + \tilde{x}_n)(\tilde{x}_{i+1} + \dots + \tilde{x}_{n-1})$,

$t_it_j(w) = \varepsilon_1\varepsilon_2(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_n} \otimes \dots \otimes \overset{j}{x_i} \otimes \dots \otimes x_j)$, $\varepsilon_2 = (-1)^{k_2}$, $k_2 = \tilde{x}_j\tilde{x}_i + (\tilde{x}_i + \tilde{x}_j)(\tilde{x}_{j+1} + \dots + \tilde{x}_{n-1})$,

$t_it_jt_i(w) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_j} \otimes \dots \otimes \overset{j}{x_i} \otimes \dots \otimes x_n)$, $\varepsilon_3 = (-1)^{k_3}$, $k_3 = \tilde{x}_n\tilde{x}_j + (\tilde{x}_n + \tilde{x}_j)(\tilde{x}_{i+1} + \dots + \tilde{x}_{j-1} + \tilde{x}_i + \tilde{x}_{j+1} + \dots + \tilde{x}_{n-1})$.

Вычислим $k_1 + k_2 + k_3$. Положим $p = \tilde{x}_{i+1} + \dots + \tilde{x}_{j-1}$, $q = \tilde{x}_{j+1} + \dots + \tilde{x}_{n-1}$. Тогда $k_1 = \tilde{x}_i\tilde{x}_n + \tilde{x}_ip + \tilde{x}_i\tilde{x}_j + \tilde{x}_iq + \tilde{x}_np$, $k_2 = \tilde{x}_i\tilde{x}_j + (\tilde{x}_i + \tilde{x}_j)q$, $k_3 = \tilde{x}_n\tilde{x}_j + \tilde{x}_jp + \tilde{x}_i\tilde{x}_j + \tilde{x}_jq + \tilde{x}_np + \tilde{x}_n\tilde{x}_i + \tilde{x}_nq$. Отсюда видно, что $k_1 + k_2 + k_3 \equiv \tilde{x}_i\tilde{x}_j + (\tilde{x}_i + \tilde{x}_j)p \pmod 2$. При $j < i$ аналогично показывается, что

$$t_it_jt_i(x_1\otimes\dots\otimes x_n) = (-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_j + (\tilde{x}_i+\tilde{x}_j)(\tilde{x}_{j+1}+\dots+\tilde{x}_{i-1})}(x_1\otimes\dots\otimes\overset{j}{x_i}\otimes\dots\otimes\overset{i}{x_j}\otimes\dots\otimes x_n).$$

Проверим, что для автоморфизмов t_i выполнены указанные выше соотношения для образующих Σ_n. То, что $t_i^2 = 1$, очевидно. Покажем, что $(t_it_{i+1})^3 = 1$. Так как $(t_it_{i+1})^3 = (t_it_{i+1}t_i)(t_{i+1}t_it_{i+1})$, можно использовать предыдущие выкладки:

$$t_it_{i+1}t_i(w) = (-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_{i+1}}(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_{i+1}} \otimes \overset{i+1}{x_i} \otimes \dots \otimes x_n),$$

$$t_{i+1}t_it_{i+1}(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_{i+1}} \otimes \overset{i+1}{x_i} \otimes \dots \otimes x_n) = (-1)^{\tilde{x}_{i+1}\tilde{x}_i}w.$$

Отсюда $(t_it_{i+1})^3(w) = w$.

Покажем теперь, что если $t = t_jt_it_{i+1}t_i$, то $t^2(w) = w$ при $j \neq i, i+1$. Пусть для определенности $j < i$. Тогда

$$\begin{aligned} t_j((t_it_{i+1}t_i)(w)) &= t_j((-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_{i+1}}(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{j}{x_j} \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_{i+1}} \otimes \overset{i+1}{x_i} \otimes \dots \otimes x_n)) \\ &= (-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_{i+1} + \tilde{x}_j\tilde{x}_n + (\tilde{x}_{j+1}+\dots+\tilde{x}_{n-1})}(x_1 \otimes \dots \otimes \overset{j}{x_n} \otimes \dots \otimes \overset{i}{x_{i+1}} \otimes \overset{i+1}{x_i} \otimes \dots \otimes x_j). \end{aligned}$$

Последующее применение $t_it_{i+1}t_i$ даст перестановку i-го и $(i+1)$-го множителей и коэффициент $(-1)^{\tilde{x}_i\tilde{x}_{i+1}}$. Применение же t_j удвоит в показателе степени часть $\tilde{x}_j\tilde{x}_n + (\tilde{x}_j + \tilde{x}_n)(\tilde{x}_{j+1} + \dots + \tilde{x}_{n-1})$, т. е. исходный аргумент w преобразуется снова в w.

Таким образом, доказано существование гомоморфизма группы Σ_n в группу однородных автоморфизмов модуля $L^{\otimes n}$ такого, что транспозиция (i, j) отображается в автоморфизм, действующий по формуле (1). Следовательно, результат действия произвольного $\sigma \in \Sigma_n$ на однородном элементе $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ равен $x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$, умноженному на плюс единицу или на минус единицу. Эта величина и обозначена через $\operatorname{sgn}(\sigma, x_1 \dots x_n)$. $\square$

Следствие 1.1. *Значение* $\mathrm{sgn}(\sigma, x_1 \dots x_n)$ *зависит только от упорядоченной последовательности* $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$.

Замечание 1.1. Можно показать, что построенное в теореме 1.1 действие Σ_n совпадает с определенным в [15, лемма 1.5, следствие 1.6]. Это же действие фактически используется в [16], причем то, что в нашей работе обозначается как $\mathrm{sgn}(\sigma, \bar{x})$, в [16] называется «Koszul sign». При вычислениях, однако, удобно использовать явную формулу для этой величины, которая и дана в теореме 1.1.

Замечание 1.2. Пусть $\bar{x} = x_1 \dots x_n$, $\sigma \in \Sigma_n$ и $\sigma\bar{x} = x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}$. Тогда

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2, \bar{x}) = \mathrm{sgn}(\sigma_1, \sigma_2\bar{x})\,\mathrm{sgn}(\sigma_2, \bar{x}). \tag{2}$$

Равенство (2) допускает следующую интерпретацию. Рассмотрим множество Z, состоящее из всех элементов вида $\bar{x} = x_1 \dots x_n$, где $x_i \in L_0 \cup L_1$ для всех i. Группа Σ_n естественным образом действует на Z справа: $(\bar{x}, \sigma) \mapsto \bar{x}\sigma$. Определим правый Σ_n-модуль A (с мультипликативно записываемой групповой операцией) как произведение $\prod\limits_{\bar{x} \in Z} \{\pm 1\}$, причем группа Σ_n действует на элементах A посредством действия на индексы их компонент так, как это отмечено выше. Тогда определена функция из Σ_n в A, сопоставляющая подстановке σ элемент A, $\bar{x}$-я компонента которого есть $\mathrm{sgn}(\sigma, \bar{x})$, и равенство (2) означает, что эта функция является 1-коциклом.

Определение 1.1. Зафиксируем коммутативное ассоциативное кольцо с единицей K и рассмотрим семейство непересекающихся множеств (сигнатуру) $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$. Будем предполагать, что на каждом множестве символов n-арных операций Ω_n справа действует симметрическая группа Σ_n. Определим K-линейную Ω-*супералгебру* A как $\mathbb{Z}_2$-градуированный модуль $A = A_0 \oplus A_1$ над кольцом K, снабженный следующей структурой: для каждого символа операции $\omega \in \Omega_n$ и произвольного набора $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}_2$ определена полилинейная операция вида $\omega^A : A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_n} \to A_{i_1 + \dots + i_n}$. Действие этой операции будет обозначаться так: $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \omega^A(a_1 \dots a_n)$. При этом требуется, чтобы для любой подстановки $\sigma \in \Sigma_n$ и произвольных однородных $a_1, \dots, a_n$ выполнялось равенство

$$(\omega\sigma)^A(a_1 \dots a_n) = \mathrm{sgn}(\sigma, \bar{a})\omega^A(a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Далее вместо ω^A будет использоваться запись ω, так как смысл обозначений во всех случаях однозначно восстанавливается из контекста.

Гомоморфизмы Ω-супералгебр $f : A \to B$ определяются как K-линейные отображения, сохраняющие градуировку (т. е. однородные, в другой терминологии — четные) и действия операций из Ω. Ограничение гомоморфизма f на однородную компоненту A_i $(i = 0, 1)$ будем обозначать через f_i. Категорию всех Ω-супералгебр обозначим через $\mathrm{SAlg}(\Omega)$.

Идеалы и фактор-супералгебры для Ω-супералгебр определяются естественным образом аналогично тому, как это делается в случае Ω-алгебр или, например, супералгебр Ли.

Как и в [6], будем обозначать через $\mathrm{Alg}(\Omega)$ категорию всех «обычных» K-линейных Ω-алгебр, а свободную алгебры с базисом X в этом многообразии — через $\mathrm{Fr}_\Omega(X)$ или просто через $\mathrm{Fr}(X)$, если ясно, какова сигнатура. Если M — многообразие линейных Ω-алгебр, то свободная алгебра с базисом X в этом многообразии будет обозначаться через $\mathrm{Fr}_M(X)$.

В теории Ω-супералгебр имеется много внешне аналогичного тому, что имеет место для Ω-алгебр. Сформулируем те фрагменты теории, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1.2. *В категории* $\mathrm{SAlg}(\Omega)$ *существуют свободные объекты. Точнее, для любой пары непересекающихся множеств* (X, Y) *(где* X *— множество четных базисных элементов, а* Y *— множество нечетных) существует* Ω*-супералгебра* $\mathrm{Fr}(X,Y) = \mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)$ *вместе с отображениями* $\eta_0 : X \to \mathrm{Fr}(X,Y)_0$, $\eta_1 : Y \to \mathrm{Fr}(X,Y)_1$ *такими, что для любой* Ω*-супералгебры* $A = A_0 \oplus A_1$ *и любых отображений* $\varphi_0 : X \to A_0$, $\varphi_1 : Y \to A_1$ *существует один и только один гомоморфизм супералгебр* $f : \mathrm{Fr}(X,Y) \to A$ *такой, что* $f_0\eta_0 = \varphi_0$, $f_1\eta_1 = \varphi_1$.

Доказательство. Это утверждение фактически будет (независимо) доказано ниже в теореме 2.5 и в следствии 2.1, но можно провести и прямое построение по аналогии с тем, которое имеется в теории линейных Ω-алгебр [1, 2]. Общая идея заключается в том, чтобы взять линейную Ω-алгебру с базисом $X \cup Y$ (множества X и Y считаются непересекающимися), рассмотреть в ней естественную $\mathbb{Z}_2$-градуировку и профакторизовать этот градуированный K-модуль по идеалу, порожденному всеми элементами вида

$$(\omega\sigma)w_1 \dots w_n - \mathrm{sgn}(\sigma, w_1 \dots w_n)\omega w_{\sigma^{-1}(1)} \dots w_{\sigma^{-1}(n)},$$

где $\omega \in \Omega_n$, $\sigma \in \Sigma_n$, $w_1, \dots, w_n$ — произвольные однородные элементы. $\square$

Определение 1.2. *Многообразием* Ω-супералгебр будем называть непустую полную подкатегорию M категории $\mathrm{SAlg}(\Omega)$ такую, что существует множество Θ однородных элементов $\mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)$, где X и Y счетны, обладающее следующими свойствами:

1) $A \in \mathrm{Ob}(M)$ тогда и только тогда, если для каждого гомоморфизма $h : \mathrm{Fr}_\Omega(X,Y) \to A$ и любого $t \in \Theta$ имеет место равенство $h(t) = 0$;

2) для каждого $t \in \Theta$, представленного как «многочлен» $t(z_1, \dots, z_n)$, где $z_1, \dots, z_n \in X \cup Y$ — все входящие в его запись базисные элементы, и для *любого* другого набора $z'_1, \dots, z'_n \in X \cup Y$ элемент $t(z'_1, \dots, z'_n)$ также принадлежит Θ.

Элементы множества Θ, удовлетворяющего сформулированным только что условиям 1 и 2, будут называться *тождествами* многообразия супералгебр M. Многообразие, определяемое семейством тождеств Θ, будет обозначаться через $\mathrm{Var}(\Theta)$.

Лемма 1.1. *Рассмотрим идеал* J*, порожденный множеством* Θ *из определения* 1.2. *Тогда множество* $J_0 \cup J_1$ *также будет удовлетворять свойствам* 1 *и* 2 *из этого определения.*

Доказательство. Определим по индукции множества Θ_n, полагая $\Theta_1 = \Theta$ и $\Theta_n = \{\omega w_1 \dots w_n \mid \omega \in \Omega_n, w_j$ — однородные элементы $\mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)$, причем хотя бы одно из них принадлежит Θ_k для некоторого $k < n\}$. Идеал J есть K-подмодуль, порожденный объединением всех Θ_n, $n = 1, 2, \dots$. Свойства 1 и 2 из определения 1.2 легко доказываются индукцией по n для каждого из множеств Θ_n. Следовательно, они справедливы и для $J_0 \cup J_1$. $\square$

Ясно, что $\mathrm{Var}(\Theta) = \mathrm{Var}(J_0 \cup J_1)$.

Определение 1.3. Идеал J свободной супералгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)$ будем называть *вполне инвариантным*, если $h(J) \subseteq J$ для любого эндоморфизма h супералгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)$ и, кроме того, для $J_0 \cup J_1$ выполнено свойство 2 из определения 1.2.

Эквивалентным термином для «вполне инвариантного» будет «вполне характеристический». Идеал J из леммы 1.1 является, очевидно, вполне инвариантным. Точно так же, как и в случае многообразий «обычных» (т. е. не супер) алгебр, показывается, что $\mathrm{Fr}_M(X,Y) = \mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)/J$ является свободной супералгеброй многообразия M с базисом (X,Y). Так как X и Y счетны, в M существуют и свободные супералгебры с любыми базисами.

Определение 1.4. Будем говорить, что элемент $w \in \mathrm{Fr}_\Omega(X,Y)$ *полилинеен*, если он однороден в смысле $\mathbb{Z}_2$-градуировки и является линейной комбинацией слов от некоторого множества переменных из $X \cup Y$, причем каждая переменная из этого множества имеет ровно одно вхождение в каждое из этих слов. Будем говорить, что *многообразие M определяется* (или *задается*) *полилинейными тождествами*, если $M = \mathrm{Var}(\Theta)$ для некоторого множества Θ полилинейных элементов, удовлетворяющих свойствам 1 и 2 из определения 1.2.

Справедлив следующий аналог известного результата из [17] (см. также [18]).

Теорема 1.3. *Пусть K — поле нулевой характеристики. Тогда каждое многообразие супералгебр определяется полилинейными тождествами.*

Доказательство — очевидное видоизменение доказательства из [17]. □

В дальнейшем нам потребуется супераналог известных результатов о рациональной эквивалентности [8, 9].

Определение 1.5. Пусть M_1 и M_2 — некоторые категории супералгебр над коммутативным кольцом K (можно не предполагать, что это обязательно многообразия), и пусть M_0 — категория $\mathbb{Z}_2$-градуированных K-модулей и их однородных гомоморфизмов. Будем говорить, что M_1 и M_2 *рационально эквивалентны*, если существуют функторы $F_{2,1} : M_1 \to M_2$, $F_{1,2} : M_2 \to M_1$, которые являются, во-первых, взаимно обратными изоморфизмами категорий M_1 и M_2 (изоморфизмами, а не только эквивалентностями), а во-вторых, если $F_{0,i} : M_i \to M_0$ — забывающие функторы, то должны выполняться равенства $F_{0,1}F_{1,2} = F_{0,2}$, $F_{0,2}F_{2,1} = F_{0,1}$.

Имеет место следующий аналог теоремы 1.2.1 из [10].

Теорема 1.4. *Пусть M_1, M_2 — многообразия супералгебр, а C_1 и C_2 — полные подкатегории категорий M_1 и M_2 соответственно такие, что $\mathrm{Ob}(C_i) = \{\mathrm{Fr}_{M_i}(X,Y)\}$, а множества X, Y счетны. Многообразия M_1 и M_2 рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда рационально эквивалентны C_1 и C_2.*

Доказательство мало отличается от доказательства аналогичного результата из [9]. □

§ 2. Супералгебры над операдами

Основные определения теории операд можно найти в работах автора [5, 6]. Из других работ, содержащих исходные сведения по теории линейных симметрических операд, можно упомянуть, например, [19–23]. Отметим также недавнюю работу [24].

Как и выше, будем обозначать через K коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Пусть R есть K-линейная симметрическая операда (или Σ-операда [6, 7]). K-линейность вместе с симметричностью означает, что все компоненты $R(n)$ — правые $K\Sigma_n$-модули, а все отображения композиции в операде

R, т. е. отображения вида

$$R(m)\times R(n_1)\times\dots\times R(n_m)\to R(n_1+\dots+n_m),\quad (x,y_1,\dots,y_m)\mapsto xy_1\dots y_m,$$

K-линейны по каждому аргументу (кроме, может быть, тех y_i, для которых $n_i=0$). Набор свойств, которыми должны обладать такие отображения, в необходимой нам форме содержится в [5]. Компоненты гомоморфизмов линейных симметрических операд являются также и гомоморфизмами правых $K\Sigma_n$-модулей. Категорию K-линейных R_Σ-алгебр и их гомоморфизмов будем обозначать через $\mathrm{Alg}(R)$. В данной работе, как правило, операды симметричны и K-линейны. Исключения из этого правила оговариваются особо.

Пример 2.1. Пусть V — некоторый K-модуль. Положим

$$E_V(n)=\mathrm{Hom}_K(V^{\otimes n},V).$$

Тогда семейство $E_V=\{E_V(n)\mid n\geq 0\}$ становится K-линейной симметрической операдой. Пусть $\psi: V^{\otimes m}\to V$, $\psi_i: V^{\otimes n_i}\to V$ $(1\leq i\leq m)$ — гомоморфизмы K-модулей. Тогда композиция в операде E_V определяется по правилу $\psi\psi_1\dots\psi_m=\psi(\psi_1\otimes\dots\otimes\psi_m)$. Правое действие Σ_m на $E_V(m)$ определяется так: $(\psi\sigma)(v_1\otimes\dots\otimes v_m)=\psi(v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\dots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)})$. В работе [7] было фактически показано (еще до появления в [25] самого термина «операда»), что E_V является линейной симметрической операдой.

Напомним, что если R есть K-линейная симметрическая операда, то задание структуры R-алгебры на K-модуле A равносильно заданию гомоморфизма операд $R\to E_A$. Напомним также следующее определение.

Определение 2.1. Пусть R есть K-линейная симметрическая операда. *Идеалом* I операды R называется следующий комплекс данных. Во-первых, $I=\{I(n)\mid n\geq 0\}$, где для всех n множество $I(n)$ есть правый $K\Sigma_n$-подмодуль в $R(n)$. Во-вторых, если $x\in R(m)$, $x_1\in R(n_1)$, …, $x_m\in R(m)$, то композиция $xx_1\dots x_m\in R(n_1+\dots+n_m)$ принадлежит $I(n_1+\dots+n_m)$, если либо $x\in I(m)$, либо $x_i\in I(n_i)$ для некоторого i, $1\leq i\leq m$.

Точно так же, как и в случае колец, определяется фактор-операда R/I операды R по идеалу I, причем $(R/I)(n)=R(n)/I(n)$ для всех n, и композиция определяется по правилу

$$(x+I(m))(x_1+I(n_1))\dots(x_m+I(n_m))=xx_1\dots x_m+I(n_1+\dots+n_m).$$

Справедливы аналоги всех обычных результатов о фактор-кольцах, изоморфизмах и т. п.

Напомним, как устроены свободные алгебры в $\mathrm{Alg}(R)$. Пусть $T^n(X)$ есть свободный K-модуль с базисом X^n, изоморфный n-й тензорной степени свободного K-модуля с базисом X.

Теорема 2.1. *Свободная алгебра с базисом X в многообразии $\mathrm{Alg}(R)$ имеет следующий вид:*

$$\mathrm{Fr}_R(X)=\bigoplus_{n\geq 0}R(n)\otimes_{K\Sigma_n}T^n(X).$$

Если I есть идеал в операде R, то для множества X определено отображение

$$\bigoplus_{n\geq 0}I(n)\otimes_{K\Sigma_n}T^n(X)\longrightarrow\bigoplus_{n\geq 0}R(n)\otimes_{K\Sigma_n}T^n(X),$$

образ которого $I(X)$ *есть вполне инвариантный идеал в* $\mathrm{Fr}_R(X)$. *Семейство этих идеалов по всем* X *является подфунктором функтора* Fr_R *и определяет многообразие* $\mathrm{Alg}(R/I)$. *Имеет место естественный изоморфизм функторов:*

$$\mathrm{Fr}_{R/I}(X) \cong \mathrm{Fr}_R(X)/I(X).$$

Доказательство можно найти, например, в [6] (где рассмотрена несколько более общая ситуация). Последнее утверждение теоремы вытекает из рассмотрения точных последовательностей вида

$$0 \longrightarrow I(n) \longrightarrow R(n) \longrightarrow R(n)/I(n) \longrightarrow 0$$

и из точности справа функтора тензорного произведения. □

Отметим, что свободные алгебры многообразия алгебр в виде, описанном в теореме 2.1, были вычислены (возможно, впервые) для многообразия алгебр Ли в [26] (см. также [27]; для ассоциативных алгебр аналогичное утверждение почти тривиально). В работе [26] также была фактически построена (при некоторых ограничениях на K) операда $\mathscr{L}ie$, для которой $\mathrm{Alg}(\mathscr{L}ie)$ есть многообразие алгебр Ли.

Пример 2.2. Подробное описание операды Σ, компоненты которой — симметрические группы, $\Sigma(n) = \Sigma_n$, можно найти (как частный случай более общей конструкции) в [28]. Через $K\Sigma$ будем обозначать линеаризацию этой операды, т. е. $K\Sigma(n) = K\Sigma_n$ — групповая K-алгебра симметрической группы Σ_n.

Напомним конструкцию тензорного произведения операд (см. также [29]). Пусть O и R суть K-линейные операды (не обязательно симметрические). Тогда $O \otimes R$ по определению есть семейство K-модулей $(O \otimes R)(n) = O(n) \otimes R(n)$, где тензорные произведения берутся над K. Операция композиции определяется следующим образом:

$$(x \otimes y)(x_1 \otimes y_1)\dots(x_m \otimes y_m) = (xx_1 \dots x_m) \otimes (yy_1 \dots y_m).$$

В случае, если обе операды O и R являются симметрическими, на всех $(O \otimes R)(n)$ очевидным образом определены структуры правых $K\Sigma_n$-модулей и и это превращает $O \otimes R$ в симметрическую операду.

Если O — несимметрическая операда, то операду $O \otimes K\Sigma$ можно превратить в симметрическую, полагая $(x \otimes \sigma)\tau = x \otimes (\sigma\tau)$ для $x \in O(n)$, $\sigma, \tau \in \Sigma_n$.

Пример 2.3. Напомним конструкцию свободной операды (см., например, [6, 18]). Фактически свободную K-линейную операду FO_Ω с множеством свободных образующих $\Omega = \{\Omega_n \mid n \geq 0\}$ можно построить так: $FO_\Omega(n)$ есть K-линейная оболочка множества полилинейных элементов (слов) в абсолютно свободной K-линейной Ω-алгебре с базисом из n элементов $x_1, \dots, x_n$. Будем записывать их в виде $w = w(x_1, \dots, x_n)$. Действие симметрической группы Σ_n на таких словах следующее: если $\sigma \in \Sigma_n$, то $w\sigma = w(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. Композиция в этой операде — подстановка с одновременной перенумерацией переменных. Более конкретно, пусть $w(x_1, \dots, x_m) \in FO_\Omega(m)$, $w_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \in FO_\Omega(n_i)$, $1 \leq i \leq m$. Тогда

$$ww_1 \dots w_m = w(w_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, w_m(x_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_m})).$$

Для каждого $n = 0, 1, 2\dots$ рассмотрим подмножество $\mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega(n) \subseteq FO_\Omega(n)$, являющееся линейной оболочкой тех слов, в которых переменные встречаются по одному разу в таком порядке: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Семейство $\mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega = \{\mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega(n) \mid n =$

$1, 2, \dots\}$ является несимметрической подоперадой операды FO_Ω (рассматриваемой как несимметрическая операда), и это свободная несимметрическая операда с базисом Ω. Имеет место изоморфизм операд: $FO_\Omega \cong \mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega \otimes K\Sigma$. На компонентах он устроен следующим образом. Базисным элементам $w(x_1, \dots, x_n) \otimes \sigma$ компоненты $(\mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega \otimes K\Sigma)(n) = \mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega(n) \otimes K\Sigma_n$ взаимно однозначно сопоставляются элементы свободной симметрической операды $w\sigma = w(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. В дальнейшем по мере необходимости операда FO_Ω будет отождествляться таким способом с операдой $\mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega \otimes K\Sigma$, причем в записи $w \otimes \sigma$ знак тензорного произведения будет опускаться. Таким образом, элементы $FO_\Omega(n)$ однозначно представляются в виде $\sum\limits_i \lambda_i w_i \sigma_i$, где $\lambda_i \in K, \sigma_i \in \Sigma_n$, а w_i есть Ω-слова, являющиеся базисными элементами $\mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega(n)$.

В дальнейшем выражение вида $w(x_1, \dots, x_n)$ иногда будет обозначаться как $w(\bar{x})$ или даже $w\bar{x}$, где $\bar{x} = x_1 \dots x_n$. Напомним также, что левое действие элемента $\sigma \in \Sigma_n$ на строку $\bar{x}$ производится по правилу $\sigma\bar{x} = x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}$.

Поскольку операды образуют многообразие многосортных универсальных алгебр, каждая операда R изоморфна фактор-операде некоторой свободной операды FO_Ω по идеалу I. Рассмотрим произвольное семейство $\Upsilon = \{\Upsilon(n) \mid \Upsilon(n) \subseteq I(n), n \geq 0\}$ образующих элементов этого идеала. Компонентами идеала, порожденного семейством Υ, являются $K\Sigma_n$-линейные оболочки операдных композиций вида $ww_1 \dots w_m$, в которых хотя бы один из элементов $w, w_1, \dots, w_m$ принадлежит множеству $\Upsilon(k)$ для подходящего k. Как уже сказано, элементы $\Upsilon(k)$ имеют следующий вид: $z = \sum\limits_i \lambda_i w_i \sigma_i$, где $\lambda_i \in K$, $\sigma_i \in \Sigma_k$ — подстановки, а $w_i \in \mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega(k)$ — слова в алфавите Ω. Будем говорить в этом случае, что операда R *задается множеством образующих* Ω и *определяющих соотношений* Υ.

Теорема 2.2. *Пусть операда R задана множеством образующих Ω и семейством Υ соотношений вида $\sum\limits_i \lambda_i w_i \sigma_i = 0$, где $\sigma_i \in \Sigma_n$, $w_i \in \mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega$ — слова в алфавите Ω, $\lambda_i \in K$. Тогда многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ определяется всеми тождествами вида $\sum\limits_i \lambda_i w_i(\sigma_i \bar{x}) = 0$, где $\bar{x} = x_1 x_2 \dots$, $x_i \in X$, X счетно, причем в $\bar{x}$ все символы различны, и $\sigma\bar{x} = x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}$. В частности, отсюда следует, что любое многообразие алгебр $\mathrm{Alg}(R)$ определяется полилинейными тождествами.*

Доказательство. В [6, теорема 4.5] показано, что рационально эквивалентны многообразия $\mathrm{Alg}(\Omega)$ и $\mathrm{Alg}(FO_\Omega)$. Пусть X — счетное множество. Обозначим через $\Upsilon(X)$ множество элементов вида $\sum\limits_i \lambda_i w_i(\sigma\bar{x})$, описанных в формулировке теоремы ($\Upsilon(X)$ — семейство образующих идеала $I(X)$), и через $\mathrm{Var}(\Upsilon(X))$ — подмногообразие $\mathrm{Alg}(\Omega)$, определяемое этими тождествами. Гомоморфизм операд (естественная проекция на фактор-операду) $FO_\Omega \to R = FO_\Omega/I$ индуцирует функтор $\mathrm{Alg}(R) \to \mathrm{Alg}(FO_\Omega)$, являющийся вполне унивалентным. Это означает, что многообразие $\mathrm{Alg}(R)$ можно рассматривать как подмногообразие $\mathrm{Alg}(FO_\Omega)$. Остается непосредственной проверкой убедиться, что взаимно обратные функторы рациональной эквивалентности, описанные в [6, теорема 4.5], осуществляют изоморфизм подмногообразий $\mathrm{Var}(\Upsilon(X))$ и $\mathrm{Alg}(R)$. $\square$

Теперь определим понятие супералгебры над линейной операдой R.

Определение 2.2. *Супералгеброй* над операдой R будем называть $\mathbb{Z}_2$-градуированный K-модуль $A = A_0 \oplus A_1$ вместе с семейством однородных линейных отображений, определенных для каждого $\omega \in R(n)$, имеющих вид

$$A^{\otimes n} \longrightarrow A, \quad a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \omega a_1 \dots a_n,$$

и обладающих следующими свойствами.

(1) $\varepsilon a = a$ для любого $a \in A$ (напомним, что $\varepsilon \in R(1)$ — единица операды R).

(2) $\omega(\omega_1 \bar{a}_1) \dots (\omega_m \bar{a}_m) = ((\omega\omega_1 \dots \omega_m)\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$, где $\bar{a}_i = a_{i,1} \dots a_{i,n_i}$, $1 \le i \le m$, $a_{i,j} \in A$, $\omega_i \in R(n_i)$, $\omega \in R(m)$.

(3) Если $a_1, \dots, a_m \in A$ — однородные элементы A, $\bar{a} = a_1 \dots a_m$, $\omega \in R(m)$, $\sigma \in \Sigma_m$, то

$$(\omega\sigma)a_1 \dots a_m = \operatorname{sgn}(\sigma, \bar{a})\omega(a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(m)}).$$

Только последнее свойство существенно отличается от определения алгебр над операдами. Определим гомоморфизм супералгебр $h : A \to B$ как однородное K-линейное отображение такое, что $h(\omega a_1 \dots a_m) = \omega h(a_1) \dots h(a_m)$ для произвольных $a_1, \dots, a_m \in A$, $\omega \in R(m)$. Категорию супералгебр над операдой и их гомоморфизмов обозначим через $\mathrm{SAlg}(R)$.

Очевидно, что супералгебры над R можно рассматривать как Ω-супералгебры в смысле § 1, где $\Omega_n = R(n)$ для всех n, однако то, что $\mathrm{SAlg}(R)$ можно считать многообразием супералгебр в смысле § 1, требует доказательства и будет доказано ниже в теореме 2.6.

Теорема 2.3. *Пусть* $L = L_0 \oplus L_1$ — $\mathbb{Z}_2$*-градуированный модуль над коммутативным кольцом* K. *Пусть* $E_L(n) = HOM_K(L^{\otimes n}, L)$ — *множество однородных гомоморфизмов* $\mathbb{Z}_2$*-градуированно модулей. Тогда на* $E_L = \{E_L(n) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ *естественным образом можно ввести структуру операды: если* $\omega \in E_L(m)$, $\omega_i \in E_L(n_i)$, $1 \le i \le m$, *то* $\omega\omega_1 \dots \omega_m = \omega(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_m)$. *Действия симметрических групп определяются так: если* $x_1, \dots, x_n \in L$ — *однородные элементы,* $\sigma \in \Sigma_n$ *и* $\omega \in E_L(n)$, *то* $(\omega\sigma)(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn}(\sigma, \bar{x})\omega(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$. *Задание на* L *структуры супералгебры над операдой* R *равносильно заданию гомоморфизма операд* $R \to E_L$.

Доказательство. Операда, которая строится в данной теореме, является $\mathbb{Z}_2$-градуированным аналогом «клона полилинейных операций» $O(A)$ из [7, § 1] (в современной терминологии это операда эндоморфизмов). Это позволяет опустить часть выкладок, почти дословно повторяющих, например, те, что содержатся в [7, леммы 1, 2]. Существенные отличия $\mathbb{Z}_2$-градуированного случая относятся к проверке двух аксиом операды, связывающих композицию и действия симметрических групп на компонентах операды. Прежде всего речь идет о согласованности знаков, появляющихся в левых и правых частях равенств из этих двух аксиом. В дальнейших рассуждениях будут использованы некоторые обозначения и результаты из [5, 6, 28].

Пусть $z_{i,j}$ — однородные элементы L, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$, $\omega_i \in E_L(n_i)$, $\omega \in E_L(m)$, $\tau_i \in \Sigma_{n_i}$, $\sigma \in \Sigma_m$. Положим $\bar{z}_i = z_{i,1} \dots z_{i,n_i}$, $\bar{z} = \bar{z}_1 \dots \bar{z}_m$, $\overline{\omega}\bar{z} = \omega_1(z_{1,1} \otimes \dots \otimes z_{1,n_1}) \dots \omega_m(z_{m,1} \otimes \dots \otimes z_{m,n_m})$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m) \in P(n, m)$, где $n = n_1 + \dots + n_m$. Здесь, как и в [5], P есть категория, объекты которой — множества $[n] = \{1, \dots, n\}$, а морфизмы — неубывающие отображения. Морфизмы этой категории из $[n]$ в $[m]$ можно отождествить с последовательностями $(n_1, \dots, n_m)$, где $n_i \ge 0$ есть прообраз $i \in [m]$. Напомним [5], что если $\tau_1 \in \Sigma_{n_1}$, $\tau_2 \in \Sigma_{n_2}$, то $\tau = \tau_1 \sqcup \tau_2 \in \Sigma_{n_1+n_2}$ определяется так: $\tau(i) = \tau_1(i)$ при $1 \le i \le n_1$,

$\tau(n_1+j) = n_1 + \tau_2(j)$ при $1 \le j \le n_2$. Подстановка $\tau_1 \sqcup \dots \sqcup \tau_m$ для произвольного m определяется аналогично. Первая из двух аксиом операды, которую необходимо проверить, такова (см. [5]):

$$\omega(\omega_1\tau_1)\dots(\omega_m\tau_m) = (\omega\omega_1\dots\omega_m)(\tau_1 \sqcup \dots \sqcup \tau_m).$$

Нетривиальная часть доказательства этого свойства сводится к проверке равенства

$$\mathrm{sgn}(\tau_1 \sqcup \dots \sqcup \tau_m, \bar{z}) = \mathrm{sgn}(\tau_1, \bar{z}_1)\dots\mathrm{sgn}(\tau_m, \bar{z}_m).$$

Это равенство вытекает из определения sgn и соотношения (2).

Последняя аксиома операды (в форме, приведенной в [5]) имеет вид

$$(\omega\sigma)\omega_1\dots\omega_m = (\omega_1\omega_{\sigma^{-1}(1)}\dots\omega_{\sigma^{-1}(m)})(\sigma^*\alpha).$$

Напомним определение $\sigma^*\alpha \in \Sigma_{n_1+\dots+n_m}$ (см. [5]). В категории FSet, объекты которой — множества вида $[n]$, а морфизмы — всевозможные отображения между такими множествами, существует расслоенное копроизведение

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, equal] & \sigma^*[n] \arrow[r, "\alpha\sigma"] \arrow[d, "\sigma^*\alpha"] & {[m]} \arrow[d, "\sigma."] \\
& {[n]} \arrow[r, "\alpha"] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

Здесь $\alpha\sigma = (n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(m)})$.

Доказательство того, что в E_L выполнена последняя аксиома операды, в конечном счете сводится к проверке равенства

$$\mathrm{sgn}(\sigma^*\alpha, \bar{z}) = \mathrm{sgn}(\sigma, \overline{\omega}\bar{z}). \tag{3}$$

Так как все отображения ω_i однородны, степень элемента $\omega_i(z_{i,1}\otimes\dots\otimes z_{i,n_i})$ равна $\sum\limits_j \tilde{z}_{i,j} \pmod 2$. С учетом следствия 1.1 в доказательстве удобно заменить в sgn строки однородных элементов L последовательностями из их степеней. Далее, если $\bar{z}$ — строка из символов $+1, -1$ (так что $\tilde{z}_{i,j} = z_{i,j}$) и $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, то положим $\alpha\bar{z} = v_1\dots v_m$, где $v_i = \sum\limits_j \tilde{z}_{i,j} \pmod 2$ для всех i. Тогда (3) равносильно равенству

$$\mathrm{sgn}(\sigma^*\alpha, \bar{z}) = \mathrm{sgn}(\sigma, \alpha\bar{z}). \tag{4}$$

Докажем это равенство индукцией по $r = \max\limits_i n_i$. Случай $r = 1$ тривиален. Рассмотрим подробнее случай $r = 2$ и проведем для него индукцию по числу l множителей в представлении σ в виде произведения транспозиций вида $(i, i+1)$. При $l = 1$ достаточно разобраться с ситуацией, где $\sigma = (1,2)$, $m = 2$ и α есть либо $(1,2)$, либо $(2,2)$, либо $(2,1)$. Проведем вычисления для $\alpha = (1,2)$, остальные случаи разбираются аналогично. Подстановка $\sigma^*\alpha$ при $\sigma = (1,2)$, $\alpha = (1,2)$ имеет вид $(1,2)$ $(1,3)$. Теперь левая часть (4), вычисленная по правилу, содержащемуся в теореме 1.1, равна $(-1)^{\tilde{z}_{1,1}\tilde{z}_{2,2}+(\tilde{z}_{1,1}+\tilde{z}_{2,2})\tilde{z}_{2,1}+\tilde{z}_{2,2}\tilde{z}_{2,1}}$.

Правая часть (4) равна $(-1)^{\tilde{z}_{1,1}(\tilde{z}_{2,1}+\tilde{z}_{2,2})}$. Очевидно, имеет место равенство.

Предположим, что для подстановок, представимых в виде произведения менее чем l транспозиций вида $(i, i+1)$, утверждение справедливо. Представим тогда σ в виде $\sigma = \tau\rho$, где для τ и ρ предположение индукции выполняется, и используем тождество $(\tau\rho)^*\alpha = (\tau^*(\alpha\rho))(\rho^*\alpha)$. Это тождество доказано в [28] (необходимо учитывать, что обозначения [28] несколько отличаются от обозначений данной работы). Его также легко доказать, используя приведенное выше категорное определение $\sigma^*\alpha$. Напомним, что если $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, то $\alpha\rho = (n_{\rho(1)}, \dots, n_{\rho(m)})$. Используя равенство (2), получаем

$$\mathrm{sgn}((\tau\rho)^*\alpha, \bar{z}) = \mathrm{sgn}(\tau^*(\alpha\rho), (\rho^*\alpha)\bar{z})\,\mathrm{sgn}(\rho^*\alpha, \bar{z}).$$

Поэтому

$$\mathrm{sgn}(\tau^*(\alpha\rho), (\rho^*\alpha)\bar{z})\,\mathrm{sgn}(\rho^*\alpha, \bar{z}) = \mathrm{sgn}(\tau, (\alpha\rho)((\rho^*\alpha)\bar{z}))\,\mathrm{sgn}(\rho, \alpha\bar{z}).$$

Доказываемое утверждение следует теперь из непосредственно проверяемого тождества $(\alpha\rho)((\rho^*\alpha)\bar{z}) = \rho(\alpha\bar{z})$ с помощью повторного применения равенства (2).

Продолжим индуктивное рассуждение по $r = \max\limits_i n_i$. Пусть $r > 2$ и для всех случаев, где соответствующий максимум меньше r, равенство (4) справедливо. Так как α есть морфизм категории P (см. [5, 28]), его можно представить в виде $\alpha = \beta\gamma$ следующим образом. Пусть $\beta = (l_1, \dots, l_m)$, $\gamma = (k_{1,1}, \dots, k_{1,l_1}, \dots, k_{m,1}, \dots, k_{m,l_m})$, так что $n_i = k_{i,1} + \dots + k_{i,l_i}$ для всех i. Если $n_i < r$, то полагаем $l_i = n_i$ и $k_{i,j} = 1$ для всех $j \geq 1$, если же $n_i = r$, то — $l_i = r - 1$, $k_{i,1} = 2$, $k_{i,j} = 1$ при $j > 1$. В [28] доказано тождество $\sigma^*(\beta\gamma) = (\sigma^*\beta)^*\gamma$. Поскольку β и γ удовлетворяют предположению индукции и имеет место равенство $(\beta\gamma)\bar{z} = \beta(\gamma\bar{z})$, можно завершить индуктивное рассуждение следующим вычислением:

$$\mathrm{sgn}(\sigma^*(\beta\gamma), \bar{z}) = \mathrm{sgn}((\sigma^*\beta)^*\gamma, \bar{z}) = \mathrm{sgn}(\sigma^*\beta, \gamma\bar{z}) = \mathrm{sgn}(\sigma, \beta(\gamma\bar{z})) = \mathrm{sgn}(\sigma, \alpha\bar{z}).$$

Последнее утверждение теоремы непосредственно следует из определений супералгебры над операдой и E_L. □

Пусть L_0 — свободный K-модуль с базисом X, а L_1 — свободный K-модуль с базисом Y. Положим $L = L_0 \oplus L_1$. В этом случае будем обозначать $\mathbb{Z}_2$-градуированный K-модуль $L^{\otimes n}$ через $T^n(X, Y)$.

Теорема 2.4. *Свободная супералгебра с базисом* (X, Y) *в многообразии* $\mathrm{SAlg}(R)$ *имеет вид* $\mathrm{Fr}_R(X, Y) = \bigoplus\limits_{n \geq 0} R(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X, Y)$.

Доказательство проходит по той же схеме, что и в теореме 2.2. Сначала определяем структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной R-алгебры на $\mathbb{Z}_2$-градуированном K-модуле $\mathrm{Fr}(X, Y) = \mathrm{Fr}_R(X, Y)$. Если $\bar{x}_i = x_{i,1} \dots x_{i,k_i}$ — базисные элементы $T^{k_i}(X, Y)$, то, как и в теореме 2.1,

$$\omega(\omega_1\bar{x}_1 \dots \omega_m\bar{x}_m) = (\omega\omega_1 \dots \omega_m)(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m).$$

Соответствие $(\omega_1\bar{x}_1 \dots \omega_m\bar{x}_m) \to \omega(\omega_1\bar{x}_1 \dots \omega_m\bar{x}_m)$ продолжается до однородного гомоморфизма градуированных модулей. Отличие от случая неградуированных алгебр состоит в способе взаимодействия с элементами Σ_n:

$$\omega\sigma(x_1x_2 \dots x_n) = \mathrm{sgn}(\sigma, \bar{x})\omega x_{\sigma^{-1}(1)} \dots x_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Непосредственная проверка показывает, что определение R-супералгебры выполнено. Пусть A — некоторая R-супералгебра, $\gamma : X \to A$ — однородное отображение, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$, $\gamma_0 : X \to A_0$, $\gamma_1 : X \to A_1$. Существует и однозначно определено продолжение до однородного гомоморфизма $\gamma^{\otimes n} : T^n(X, Y) \to A^{\otimes n}$, $(z_1 \dots z_n) \to \gamma(z_1) \otimes \dots \otimes \gamma(z_n)$, $z_i \in X \cup Y$. Используя определение структуры R-алгебры на A, получаем отображение

$$R(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X, Y) \xrightarrow{1 \otimes \gamma^{\otimes n}} R(n) \otimes_{K\Sigma_n} A^{\otimes n} \longrightarrow A.$$

Сумма этих отображений и дает искомый гомоморфизм алгебр, единственность которого очевидна. □

Заметим, что частный случай этой теоремы (для супералгебр Ли) получен в работе [10] (см. также [30]).

Для произвольного семейства множеств символов операций $\Omega = \{\Omega_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ определим $\Omega\Sigma = \{\Omega\Sigma_n \mid n = 0, 1, \dots\}$, полагая $\Omega\Sigma_n = \Omega_n \times \Sigma_n$. Группы Σ_n действуют справа на $\Omega\Sigma_n$, поэтому можно определить $\Omega\Sigma$-супералгебры.

Теорема 2.5. *Рассмотрим произвольное семейство (сигнатуру)* $\Omega = \{\Omega_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ *как базис свободной операды* FO_Ω. *Тогда многообразие* $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$ *рационально эквивалентно многообразию* $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$. *В частности, можно отождествлять* $\mathrm{Fr}_{\Omega\Sigma}(X, Y)$ *и* $\mathrm{Fr}_{FO_\Omega}(X, Y)$.

Доказательство. Если A — супералгебра из $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$, то для каждой пары $(\omega, \sigma) \in \Omega_n \times \Sigma_n$ и произвольных однородных $a_1, \dots, a_n \in A$ определено отображение $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma, a_1 \dots a_n)\omega(a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)})$, превращающее A в $\Omega\Sigma$-супералгебру. Легко убедиться, что тем самым определен функтор $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega) \to \mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$, коммутирующий с забывающими функторами.

Обратно, пусть A есть $\Omega\Sigma$-супералгебра. Из определения следует, что для каждого n определены отображения вида $\Omega_n \times \Sigma_n \to E_A(n)$. Здесь под E_A понимается операда, построенная выше в теореме 2.3. Рассматривая Ω_n как подмножество $\Omega_n \times \Sigma_n$ ($\omega \in \Omega_n$ отождествляется с $(\omega, 1)$) и используя универсальное свойство свободной операды, получаем отсюда гомоморфизм операд $FO_\Omega \to E_A$, задающий на A структуру FO_Ω-супералгебры. Тем самым определен функтор $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma) \to \mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$, обратный к построенному выше и также коммутирующий с забывающими функторами. Таким образом, имеет место рациональная эквивалентность. □

Теорема 2.6. 1. *Если* I *— идеал в операде* R, *то для любых множеств* X, Y *определено отображение, индуцированное включениями* $I(n) \subseteq R(n)$:

$$\bigoplus_{n \geq 0} I(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X, Y) \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} R(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X, Y),$$

образ которого $I(X, Y)$ *есть идеал свободной алгебры* $\mathrm{Fr}_R(X, Y)$. *Семейство этих идеалов по всем* (X, Y) *является подфунктором функтора* Fr_R. *Гомоморфизм на фактор-операду* $R \to R/I$ *индуцирует вложение в качестве полной подкатегории:* $\mathrm{SAlg}(R/I) \subseteq \mathrm{SAlg}(R)$. *В категории* $\mathrm{SAlg}(R)$ *имеет место естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Fr}_{R/I}(X, Y) \cong \mathrm{Fr}_R(X, Y)/I(X, Y).$$

2. *Пусть* $R = FO_\Omega$, I *— идеал* R. *Отождествим* $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$ *с* $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$ *по теореме* 2.5 *и соответственно отождествим* $\mathrm{Fr}_{FO_\Omega}(X, Y)$ *с* $\mathrm{Fr}_{\Omega\Sigma}(X, Y)$. *Тогда* $I(X, Y)$ *— вполне инвариантный идеал и определяемое им многообразие супералгебр рационально эквивалентно* $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega/I)$. *В частности, категории супералгебр над операдами можно считать многообразиями супералгебр в смысле* § 1.

3. *Более конкретно, пусть некоторая операда* R *задана множеством образующих* Ω *и семейством* Υ *соотношений вида* $\sum\limits_i \lambda_i w_i \sigma_i = 0$, *где* $\sigma_i \in \Sigma_n$, $w_i \in \mathscr{F}\mathscr{O}_\Omega$ *— слова в алфавите* Ω, $\lambda_i \in K$. *Тогда многообразие* $\mathrm{SAlg}(R)$ *определяется всеми тождествами вида*

$$\sum_i \lambda_i \,\mathrm{sgn}(\sigma_i, \bar{z}) w_i z_{\sigma_i^{-1}(1)} \dots z_{\sigma_i^{-1}(n)} = 0,$$

где $\bar{z} = z_1 z_2 \dots z_n$, $z_i \in X \cup Y$, *все символы* z_i *различны и* X, Y *счетны.*

В частности, отсюда следует, что любая категория $\mathrm{SAlg}(R)$ *как многообразие* $\Omega\Sigma$*-супералгебр в смысле определения* 1.2 *определяется полилинейными тождествами.*

Доказательство. Тот факт, что $I(X, Y)$ является идеалом, непосредственно следует из определения операций в свободной алгебре. Если $R = FO_\Omega$, то однородные (в смысле $\mathbb{Z}_2$-градуировки) элементы $I(X, Y)$ являются линейными комбинациями всех возможных элементов вида $\xi z_1 \dots z_n$, где $\xi \in I(n)$, $z_1, \dots, z_n \in X \cup Y$, $n = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющих единственному условию: во всех слагаемых величина $\tilde{z}_1 + \dots + \tilde{z}_n \pmod 2$ остается одной и той же. Исходя из этого, нетрудно убедиться, что $I(X, Y)$ — вполне инвариантный идеал. Дальнейшие рассуждения почти те же самые, что и при доказательстве теоремы 2.2. Рассмотрим установленную в теореме 2.5 рациональную эквивалентность $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$ и $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$, и пусть $O = FO_\Omega / I$, где идеал I порождается множеством Υ. Пусть X и Y — счетные множества. Тогда через $\Upsilon(X, Y)$ обозначим семейство всех элементов вида $\sum\limits_i \lambda_i \operatorname{sgn}(\sigma_i, \bar{z}) w_i z_{\sigma_i^{-1}(1)} \dots z_{\sigma_i^{-1}(n)}$, описанных в формулировке теоремы. Ясно, что можно интерпретировать их как тождества в сигнатуре $\Omega\Sigma$. Обозначим через $\mathrm{Var}(\Upsilon(X, Y))$ подмногообразие в $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$, определяемое этими тождествами. Для супералгебр так же, как и для алгебр, естественная проекция на фактор-операду $FO_\Omega \to O$ индуцирует вполне унивалентный функтор $\mathrm{SAlg}(O) \to \mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$, который позволяет отождествить $\mathrm{SAlg}(O)$ с подмногообразием $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$. Доказательство завершается непосредственной проверкой того, что функторы, осуществляющие изоморфизм $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$ и $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$, индуцируют изоморфизм подмногообразий $\mathrm{SAlg}(O)$ и $\mathrm{Var}(\Upsilon(X, Y))$. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть семейство* $\Omega = \{\Omega_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ *таково, что на всех* Ω_n *справа действуют симметрические группы* Σ_n. *Обозначим временно через* $[\omega]$ *образ элемента* $\omega \in \Omega_n$ *в* $FO_\Omega(n)$. *Тогда многообразие* $\mathrm{SAlg}(\Omega)$ *рационально эквивалентно многообразию* $\mathrm{SAlg}(R)$, *где* R *— фактор-операда операды* FO_Ω *по идеалу* I, *порожденному всеми разностями* $[\omega\sigma] - [\omega]\sigma$, *где* ω *— всевозможные элементы из* Ω_n, $\sigma \in \Sigma_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. *В частности,* $\mathrm{Fr}_\Omega(X, Y)$ *можно отождествить с* $\mathrm{Fr}_R(X, Y)$.

Доказательство. Гомоморфизм $FO_\Omega \to R = FO_\Omega / I$ индуцирует вполне унивалентный функтор $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega) \to \mathrm{SAlg}(R)$, так что $\mathrm{SAlg}(R)$ можно считать полной подкатегорией $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$. Рассматривая функтор, осуществляющий рациональную эквивалентность $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$ и $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$, видим, что $\mathrm{SAlg}(R)$ при этом соответствует многообразию M супералгебр, определяемому тождествами, которые строятся по I так, как это показано в теореме 2.6.

С другой стороны, рассмотрим отображения $\Omega_n \times \Sigma_n \to \Omega_n$, действующие по правилу $(\omega, \sigma) \mapsto \omega\sigma$. Семейство этих отображений индуцирует вполне унивалентный функтор $\mathrm{SAlg}(\Omega) \to \mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$. Непосредственная проверка показывает, что образ $\mathrm{SAlg}(\Omega)$ в $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$ есть многообразие супералгебр (в смысле определения 1.2). Его тождества легко находятся в явном виде, и это те же самые тождества, которыми определяется многообразие M. $\square$

Из доказательства этого следствия вытекает простое, но важное утверждение, которое будет существенным образом использовано в § 3.

Следствие 2.2. *Каждое многообразие* Ω*-супералгебр рационально эквивалентно подмногообразию многообразия* $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$.

Используя теоремы 1.1, 2.2, и 2.6, легко убедиться, что наши методы позволяют без особого труда получить тождества всех известных видов супералгебр, в частности, супералгебр Ли, йордановых и альтернативных супералгебр, а также супералгебр Мальцева.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А. Г.* Мультиоператорные кольца и алгебры // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 3–15.

2. *Баранович Т. М., Бургин М. С.* Линейные Ω-алгебры // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 4. С. 61–106.

3. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.

4. *Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П.* Неассоциативные структуры // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 57. С. 179–266. (Итоги науки и техники).

5. *Тронин С. Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 924–936.

6. *Тронин С. Н.* Операды и многообразия, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 670–694.

7. *Артамонов В. А.* Клоны полилинейных операций // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 47–59.

8. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.

9. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

10. *Тронин С. Н.* О строении свободных супералгебр Ли // IV Всесоюзная школа «Алгебры Ли и их применения в математике и физике», посвященная 80-летию со дня рождения профессора В. В. Морозова. Казань, 30 мая – 5 июня 1990 г.: Тез. сообщений. Казань, 1990. С. 45.

11. *Тронин С. Н.* Супералгебры и линейные операды // Міжнародна алгебраічна конференція, присв. пам'яти проф. Л. М. Глускина (1922–1985). Слов'янськ, Донецька обл., Украіна, 25–29 серпня 1997. Київ, 1997. С. 93–94.

12. *Тронин С. Н.* Многообразия супералгебр и линейные операды // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы / Школа-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова. Казань, 13–18 сент. 1999 г. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 1999. С. 224–227.

13. *Тронин С. Н.* Теория операд и универсальная алгебра // Алгебра и анализ-2004: Материалы / Междунар. конф., посвящ. 200-летию Казанского гос. ун-та. Казань, 2–9 июля 2004 г. Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 23. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2004. С. 20–21.

14. *Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

15. *Berele A., Regev A.* Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representation of Lie superalgebras // Adv. Math. 1987. V. 64, N 2. P. 118–175.

16. *Fox T. F., Markl M.* Distributive laws, bialgebras and cohomology // Contemp. Math. 1997. V. 202. P. 167–205.

17. *Кизнер Ф. И.* Две теоремы о тождествах в мультиоператорных алгебрах // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 39–42.

18. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

19. *Ginzburg V., Kapranov M.* Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76, N 1. P. 203–272.

20. *Kriz I., May J. P.* Operads, algebras, modules, and motives // Asterisque. 1995. V. 233. P. 1–137.

21. *Loday J-L.* La renaissance des operades // Asterisque. 1996. V. 237. P. 47–74.

22. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in algebra, topology and physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Amer. Math. Soc. Math. Surveys and Monographs; V. 96).

23. *Смирнов В. А.* Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий. М.: Факториал-Пресс, 2002.

24. *Доценко В. В., Хорошкин А. С.* Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды // Функцион. анализ и его прил. 2007. Т. 41, № 1. С. 1–22.

25. *May J. P.* The geometry of iterated loop spaces. Berlin: Springer-Verl., 1972. (Lect. Notes Math.; V. 271). (Рус. перевод — в книге: Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977. С. 267–403)

26. *Клячко А. А.* Элементы Ли в тензорной алгебре // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1296–1304.

27. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М: Наука, 1985.

28. *Тронин С. Н., Гареева Л. Д.* О некоторых операдах, связанных с операдой симметрических групп. I // Изв. вузов. Математика. 2002. № 9. С. 61–72.

29. *Тронин С. Н., Копп О. А.* Матричные линейные операды // Изв. вузов. Математика. 2000. № 6. С. 52–63.

30. *Заворотченко И. А.* Об однородной структуре свободных супералгебр Ли // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1991. № 3. С. 80–82.

Статья поступила 23 января 2008 г.

Тронин Сергей Николаевич
Казанский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Serge.Tronin@ksu.ru`