Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.542.6

ФАКТОРИЗАЦИИ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ $\mathfrak{X}$–ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

А. Баллестер-Болинше, К. Кальво

Аннотация. Рассматриваются факторизации однопорожденных $\mathfrak{X}$-локальных формаций конечных групп, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. Известные результаты о факторизации локальных и композиционных формаций выводятся как частные случаи из результатов данной статьи.

Ключевые слова: локальная формация, локальная по Бэру формация, композиционная формация, однопорожденная формация.

Посвящается профессору Л. А. Шеметкову
в связи с его 70-летием

1. Введение

Класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, принято называть *гомоморфом. Многообразие групп* — это такой гомоморф $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия подгрупп и обладает тем свойством, что любая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу $\mathfrak{F}(G)$, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — многообразия, то их произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ — это многообразие, состоящее из всех групп, являющихся расширением группы из $\mathfrak{F}$ с помощью группы из $\mathfrak{G}$. А. Л. Шмелькин доказал [1], что произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — нетривиальные многообразия, тогда и только тогда является многообразием, порожденным конечной группой, когда $\mathfrak{F}$ нильпотентно, $\mathfrak{G}$ абелево и многообразия $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ имеют взаимно простые экспоненты.

Согласно Гашюцу *формация групп* — это гомоморф, замкнутый относительно подпрямых произведений с конечным числом множителей. В настоящей статье мы будем рассматривать только конечные группы. Многообразие в универсуме $\mathfrak{E}$ всех конечных групп — это в точности формация конечных групп, замкнутая относительно взятия подгрупп. В этом случае $\mathfrak{F}(G)$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом группы* G и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — формации, то их формационное произведение — это класс $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$, определенный следующим образом:

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} := (G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}).$$

Известно, что $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ также является формацией (см. [2, теорема IV.1.8]). Если $\mathfrak{F}$ замкнута относительно взятия субнормальных подгрупп, то $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ совпадает с обычным произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$.

Работа выполнена при поддержке гранта MTM2004–08219–C02–02, MEC (Испания) и FEDER (Европейский Союз). Второй автор поддержан предокторским грантом MEC (Испания).

А. Н. Скиба дал описание всех возможных факторизаций локальной формации, порожденной некоторой группой (см. [3, 4]). В качестве приложения своего исследования он предложил новое доказательство упомянутой теоремы Шмелькина.

Бэр и Л. А. Шеметков независимо друг от друга ввели в рассмотрение формации, используя композиционные факторы. В книге [2] эти формации названы *локальными по Бэру*; Л. А. Шеметков назвал их *композиционными формациями* (см. [5, 6]). Каждая локальная формация является композиционной. В разрешимом универсуме понятие локальной формации совпадает с понятием композиционной формации.

А. Н. Скиба в работе [4] расширил один из своих результатов о локальных формациях на композиционные формации и доказал, что если $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ является однопорожденной композиционной формацией и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$, то формация $\mathfrak{F}$ также композиционная.

Общее расширение результатов Скибы предложено в [7] с использованием концепции $\mathfrak{X}$-локальной формации, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп с условием полноты.

Теорема 1 (см. [7, теорема 1]). *Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ — $\mathfrak{X}$-локальная формация, порожденная группой G. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ нетривиальны и либо $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$, либо $\mathfrak{S}_p\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}$ для всех простых $p \in \operatorname{char} \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-локальной.*

Семейство $\mathfrak{X}$-локальных формаций было введено Фёрстером в [8]; определение $\mathfrak{X}$-локальной формации приведем в следующем разделе. Сейчас лишь отметим, что если $\mathfrak{X}$ — класс всех простых групп, то $\mathfrak{X}$-локальные формации — это в точности локальные формации. Если же $\mathfrak{X}$ — класс всех абелевых простых групп, то $\mathfrak{X}$-локальные формации совпадают с композиционными формациями (см. [2]).

Факторизации однопорожденных композиционных формаций изучались также в [9–11]. В настоящей статье мы опишем факторизации вида $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{H}$ — однопорожденная $\mathfrak{X}$-локальная формация, причем $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ нетривиальны. Большинство упомянутых результатов вытекают из нашего исследования в специальных случаях, когда $\mathfrak{X}$ либо класс всех простых групп, либо класс всех абелевых простых групп.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 формулируются некоторые определения и используемые результаты. В разд. 3 мы доказываем наши основные результаты. Мы используем стандартные обозначения и основные понятия теории формаций, с которыми читатель может детально ознакомиться в [2, 6, 12].

2. Предварительные сведения

Вначале дадим определение $\mathfrak{X}$-локальной формации.

Обозначим через $\mathfrak{J}$ класс всех простых групп. Для любого подкласса $\mathfrak{Y}$ из $\mathfrak{J}$ положим $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{Y}$; $\mathrm{E}\,\mathfrak{Y}$ есть класс всех тех групп, композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{Y}$. Ясно, что $\mathrm{E}\,\mathfrak{Y}$ является классом Фиттинга и, таким образом, каждая группа G имеет наибольшую нормальную $\mathrm{E}\,\mathfrak{Y}$-подгруппу, называемую $\mathrm{E}\,\mathfrak{Y}$-*радикалом.* Главный фактор H/K группы G, принадлежащий $\mathrm{E}\,\mathfrak{Y}$, называется $\mathfrak{Y}$-*главным фактором*, а если к тому же p делит порядок H/K, то говорят, что H/K есть $\mathfrak{Y}_p$-*главный фактор группы* G. Иногда мы будем отождествлять простое число p с циклической группой C_p порядка p. Через $\mathbb{P}$

будем обозначать множество всех простых чисел, и если $\mathfrak{H}$ — некоторый класс групп, то положим $\pi(\mathfrak{H}) = \{p \in \mathbb{P} \mid \text{существует } G \in \mathfrak{H} \text{ такая, что } p \text{ делит } |G|\}$.

Везде в данной статье $\mathfrak{X}$ обозначает некоторый фиксированный класс простых групп с условием

$$\pi(\mathfrak{X}) = \{p \in \mathbb{P} \mid C_p \in \mathfrak{X}\} =: \operatorname{char}\mathfrak{X}.$$

Определение 2. $\mathfrak{X}$-*формационная функция* f сопоставляет каждому $X \in \operatorname{char}(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$ формацию $f(X)$ (возможно, пустую). Если f — $\mathfrak{X}$-формационная функция, то $\mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$ обозначает класс всех групп G, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) если H/K — $\mathfrak{X}_p$-главный фактор группы G, то $G/\mathrm{C}_G(H/K) \in f(p)$;

2) если G/K — монолитическая фактор-группа такая, что композиционный фактор ее цоколя $\mathrm{Soc}(G/K)$ изоморфен $E \in \mathfrak{X}'$, то $G/K \in f(E)$.

Нетрудно проверить, что $\mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$ — формация (см. [12, теорема 3.1.4]).

Определение 3. Говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-*локальной*, если найдется такая $\mathfrak{X}$-формационная функция f, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$. В этом случае будем говорить, что f есть $\mathfrak{X}$-*локальное задание* для $\mathfrak{F}$ или что f *определяет* $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{X}$-формационная функция f называется *полной*, если $\mathfrak{S}_p f(p) = f(p)$ для каждого $p \in \operatorname{char}(\mathfrak{X})$; f называется *интегрированной*, если $f(S) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждой простой группы $S \in \operatorname{char}(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$.

Рассмотрим простое число $p \in \operatorname{char}(\mathfrak{X})$ и группу G. Если G имеет $\mathfrak{X}_p$-главные факторы, то через $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(G)$ обозначается пересечение централизаторов всех $\mathfrak{X}_p$-главных факторов группы G. Если G не имеет ни одного $\mathfrak{X}_p$-главного фактора, то полагаем $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(G) = G$.

Лемма 4 (см. [12, замечание 3.1.7]). *Пусть f_i — $\mathfrak{X}$-формационная функция, $i \in \mathscr{I}$. Тогда $\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f_i) = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(g)$, где $g(S) = \bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}} f_i(S)$ для всех $S \in (\operatorname{char}\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$.*

Пусть f_1 и f_2 — две $\mathfrak{X}$-формационные функции. Будем писать $f_1 \le f_2$, если $f_1(S) \subseteq f_2(S)$ для всех $S \in (\operatorname{char}\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}'$. Заметим, что в этом случае $\mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f_1) \subseteq \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f_2)$. По лемме 4 каждая $\mathfrak{X}$-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную $\mathfrak{X}$-формационную функцию $\underline{f}$, определяющую $\mathfrak{F}$ и такую, что $\underline{f} \le f$ для каждой $\mathfrak{X}$-формационной функции f с условием $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$. Мы называем $\underline{f}$ *минимальным $\mathfrak{X}$-локальным заданием* формации $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{K}$ — некоторый класс групп, то пересечение всех $\mathfrak{X}$-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{K}$, есть наименьшая $\mathfrak{X}$-локальная формация, содержащая $\mathfrak{K}$. Такая $\mathfrak{X}$-локальная формация обозначается через $\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{K})$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{J}$, то положим $\mathrm{lform}(\mathfrak{K}) = \mathrm{form}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{Y})$, а если $\mathfrak{X} = \mathbb{P}$, то формация $\mathrm{form}_{\mathbb{P}}(\mathfrak{K})$ обычно обозначается через $\mathrm{bform}(\mathfrak{K})$. Наименьшая формация, содержащая $\mathfrak{K}$, обозначается через $\mathrm{form}(\mathfrak{K})$.

Определение 5. Формация $\mathfrak{F}$ называется *однопорожденной $\mathfrak{X}$-локальной формацией*, если найдется группа G такая, что $\mathfrak{F}$ — наименьшая $\mathfrak{X}$-локальная формация, содержащая G.

Определение 6. Для класса групп $\mathfrak{K}$ и простого числа p определим формацию

$$K_{\mathfrak{X}}(p) := \mathfrak{S}_p \, \mathrm{form}(G/\mathrm{C}_G(H/K) \mid G \in \mathfrak{K} \text{ и } H/K \text{ — } \mathfrak{X}_p\text{-главный фактор в } G),$$

имея в виду, что $K_{\mathfrak{X}}(p) = \varnothing$, если не существует никакой группы $G \in \mathfrak{K}$ с $\mathfrak{X}_p$-главными факторами.

В следующей теореме описывается минимальное $\mathfrak{X}$-локальное задание формации $\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{K})$, где $\mathfrak{K}$ — некоторый класс групп. Указывается также полная и интегрированная $\mathfrak{X}$-формационная функция, определяющая $\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{K})$.

Теорема 7 (см. [12, теоремы 3.1.11, 3.1.17]). *Пусть* $\mathfrak{K}$ — *класс групп и* $\mathfrak{F} = \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{K})$. *Тогда*

• $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(\underline{f})$, *где* $\underline{f}(p) = \mathrm{form}(G/\,\mathrm{C}_G(H/K) \mid G \in \mathfrak{K}$ *и* H/K *есть* $\mathfrak{X}_p$-*главный фактор в* $G)$, *если* $p \in \mathrm{char}\,\mathfrak{X}$, *и* $\underline{f}(S) = \mathrm{form}\big(G/L \mid G \in \mathfrak{K},\ G/L$ *монолитична и* $\mathrm{Soc}(G/L) \in \mathrm{E}(S)\big)$, *если* $S \in \mathfrak{X}'$. *Кроме того,* $\underline{f}$ — *минимальное* $\mathfrak{X}$-*локальное задание для* $\mathfrak{F}$. *Заметим, что* $\underline{f}(p) = \mathrm{form}(G/\,\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(G) \mid G \in \mathfrak{K})$ *для всех* $p \in \mathrm{char}\,\mathfrak{X}$ *таких, что существует группа из* $\mathfrak{K}$ *с* $\mathfrak{X}_p$-*главными факторами.*

• $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(F)$, *где* $\begin{cases} F(p) = K_{\mathfrak{X}}(p), & \text{если } p \in \mathrm{char}(\mathfrak{X}), \\ F(E) = \mathrm{form}(\mathfrak{K}), & \text{если } E \in \mathfrak{X}'. \end{cases}$ *Кроме того,* F *полная и интегрированная. Будем говорить, что* F — *каноническое* $\mathfrak{X}$-*локальное задание для* $\mathfrak{F}$.

Нам понадобятся также следующие леммы.

Лемма 8 (см. [12, замечание 3.1.7]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}$-*локальная формация, и пусть* f — *ее определяющая* $\mathfrak{X}$-*формационная функция. Если* N — *нормальная подгруппа из* G *такая, что* $N \in \mathrm{E}\,\mathfrak{X}$, $G/N \in \mathfrak{F}$ *и* $G/\,\mathrm{C}_G(N) \in f(p)$ *для каждого* $p \in \pi(N)$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 9. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}$-*локальная формация, и пусть* f — $\mathfrak{X}$-*формационная функция, определяющая* $\mathfrak{F}$. *Если* f *интегрированная, то* $\mathfrak{S}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ *для каждого* $p \in \mathrm{char}(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Возьмем $p \in \mathrm{char}(\mathfrak{X})$ и предположим, что $\mathfrak{S}_p f(p)$ не содержится в $\mathfrak{F}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{S}_p f(p) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — группа с единственной минимальной нормальной подгруппой N. Очевидно, N — p-группа, и $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $G/\,\mathrm{C}_G(N) \in f(p)$, можем применить лемму 8 и получить $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Поэтому $\mathfrak{S}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. $\square$

Лемма 10 (см. [2, предложение A.18.5]). *Пусть* G — *группа и* X — *примитивная группа типа* 2, *т. е. монолитическая примитивная группа с неабелевым цоколем. Тогда* $X \wr G$, *регулярное сплетение* X *с* G, *есть примитивная группа типа* 2.

Лемма 11 [11, лемма 3.11]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *формация Фиттинга такая, что* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{K}$ — *непустой класс групп. Если* G — *группа такая, что* $G \in \mathrm{form}(\mathfrak{K})$ *и* $G_{\mathfrak{F}} = 1$, *то* $G \in \mathrm{form}(A/A_{\mathfrak{F}} \mid A \in \mathfrak{K})$.

Лемма 12. *Рассмотрим простое число* $p \in \mathrm{char}(\mathfrak{X})$ *и группу* G *такие, что* $\mathrm{O}_p(G) = 1$. *Обозначим через* W *сплетение* $C_p \wr G$ *с базой* $B = C_p^{\#}$. *Тогда* $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W) = B$.

Доказательство. $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)$ можно рассматривать как группу операторов для B с действием путем сопряжения. Рассмотрим главный ряд группы W, проходящий через B:

$$1 = T_0 \trianglelefteq T_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq T_n = B \trianglelefteq T_{n+1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq T_m = W.$$

Тогда $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)$ стабилизирует следующий ряд подгруппы B:

$$1 = T_0 \trianglelefteq T_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq T_n = B.$$

Так как B — p-группа, мы можем применить [2, следствие A.12.4], и тогда получаем, что $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)/\mathrm{C}_{\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)}(B)$ — p-группа. Мы можем заключить, что $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)$ — p-группа, так как $\mathrm{C}_{\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)}(B) = \mathrm{C}_W(B) \cap \mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W) = B \cap \mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)$ есть p-группа. Отсюда следует требуемый результат с учетом того, что $B \leq \mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W)$ и $\mathrm{O}_p(G) = 1$. $\square$

Следующий результат есть обобщение леммы 3 из [3].

Лемма 13. *Рассмотрим две формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \neq (1)$, и формационное произведение $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$. Пусть n — натуральное число. Предположим, что существует такая группа $A \in \mathfrak{F}$, что для каждой $B \in \mathfrak{G}$ с условием $|B| > n$ группа $(A \wr B)^{\mathfrak{G}}$ не содержится подпрямо в базе группы $A \wr B$. Тогда существует такое простое число $p \in \pi(\mathfrak{H})$, что каждая p-группа изоморфна подгруппе $\mathfrak{G}$-группы.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{G}$ содержит группы порядка, большего, чем n. Если $B \in \mathfrak{G}$ и $|B| > n$, рассмотрим сплетение $B_1 = A \wr B$ с базой $B_2 = A^{\#}$. Пусть A^B — первая копия группы A в B_2, и пусть A_B — проекция группы $B_1^{\mathfrak{G}}$ в A^B. Так как $B_1^{\mathfrak{G}}$ не содержится подпрямо в B_2, получаем, что A_B строго содержится в A^B.

Пусть теперь D — группа из $\mathfrak{G}$ такая, что $|D| > n$. Положим $T_1 = (A^D/A_D) \wr D$. Согласно [3, лемма 1] имеем $T_1 \in \mathfrak{G}$. Кроме того, $|T_1| > n$. Теперь рассмотрим $T_2 = (A^{T_1}/A_{T_1}) \wr T_1$. Идя дальше, обозначим $T_t = (A^{T_{t-1}}/A_{T_{t-1}}) \wr T_{t-1}$. Очевидно, $T_i \in \mathfrak{G}$ и $|T_i| > n$ для каждого i. Так как $\pi(A)$ конечно, существует такое простое число p, что для каждого натурального i найдется индекс $\alpha_i > i$ такой, что $p \in \pi(A^{T_{\alpha_i}}/A_{T_{\alpha_i}})$.

Рассмотрим последовательность $G_0 = C_p$, $G_1 = C_p \wr C_p, \ldots, G_i = C_p \wr G_{i-1}$. Докажем, что для каждого натурального i найдется такое k, что G_{i-1} изоморфна подгруппе из T_k. Рассуждая по индукции, предположим, что G_{i-1} изоморфна подгруппе из T_j. Существует $t > j$ такое, что $p \in \pi(A^{T_t}/A_{T_t})$. Так как T_j изоморфна подгруппе из T_t, получаем, что G_{i-1} изоморфна подгруппе S из T_t. Согласно [2, лемма A.18.2] получаем, что $C_p \wr T_t$ изоморфна подгруппе из $(A^{T_t}/A_{T_t}) \wr T_t = T_{t+1}$. Пусть T — база сплетения $C_p \wr T_t$. Тогда TS изоморфна подгруппе из T_{t+1} и согласно [2, лемма A.18.8] $TS \cong C_p^m \wr G_{i-1}$, где $m = |T_t : S|$. Поэтому $C_p^m \wr G_{i-1}$ изоморфна подгруппе из T_{t+1}. Применяя [2, лемма A.18.2], получаем, что $G_i = C_p \wr G_{i-1}$ изоморфна подгруппе из T_{t+1}.

Пусть теперь P — p-группа порядка p^n. Пусть L — нормальная подгруппа порядка p из P. Тогда $|P/L| = p^{n-1}$. Предположим индуктивно, что P/L изоморфна подгруппе T из G_i. Рассмотрим $G_{i+1} = C_p \wr G_i$, и пусть M — база группы G_{i+1}. В силу [2, лемма A.18.8] $MT \cong C_p^m \wr T$, где $m = |G_i : T|$. Поэтому $C_p^m \wr T$ изоморфна подгруппе из G_{i+1}. Применяя [2, лемма A.18.2], получаем, что $L \wr (P/L)$ изоморфна подгруппе из G_{i+1}. Согласно [2, теорема A.18.9] $L \wr (P/L)$ содержит подгруппу, изоморфную P. Поэтому P изоморфна подгруппе из G_{i+1}. $\square$

Как мы отмечали во введении, $\mathfrak{X}$-локальная формация оказывается локальной в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех простых групп. Другой подход к обобщению понятия локальной формации предложил Л. А. Шеметков, который ввел концепцию *π-локальной формации*, где π — некоторое непустое множество простых чисел.

Определение 14 (см. [13]). Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел.

• π-*Локальный спутник* f сопоставляет каждому элементу из $\pi \cup \{\pi'\}$ некоторую (возможно, пустую) формацию.

• Символом $G_{\pi d}$ обозначим наибольшую нормальную подгруппу N из G такую, что $\pi \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K подгруппы N (если $\pi \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$, то мы полагаем $G_{\pi d} = 1$).

• Если f — некоторый π-локальный спутник, то $\mathrm{LF}_\pi(f)$ обозначает класс всех групп G, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) если H/K — главный фактор группы G, то $G/\mathrm{C}_G(H/K) \in f(p)$ для каждого $p \in \pi(H/K) \cap \pi$;

2) $G/G_{\pi d} \in f(\pi')$.

• Формация $\mathfrak{F}$ называется π-*локальной*, если существует такой π-локальный спутник f, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\pi(f)$. В этом случае f называется π-*локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Необходимо отметить, что в общем случае $\mathfrak{X}$-локальные формации не обязаны быть π-локальными для $\pi = \mathrm{char}\,\mathfrak{X}$ (см. [12, 3.3.20]). Однако π-локальность и $\mathfrak{X}$-локальность эквивалентны в π-отделимом универсуме согласно [12, 3.4.6].

3. Основные результаты

Первая теорема анализирует факторизации однопорожденной $\mathfrak{X}$-локальной формации. В дальнейшем π обозначает характеристику $\mathfrak{X}$.

Теорема 15. *Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ — $\mathfrak{X}$-локальная формация, порожденная группой G. Предположим, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — нетривиальные формации и либо $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$, либо $\mathfrak{S}_p\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}$ для всех простых чисел $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда*

1. *Каждая простая группа из $\mathfrak{F}$ абелева.*

2. *Каждая примитивная монолитическая группа из $\mathfrak{F}$ есть расширение абелевой группы с помощью нильпотентной.*

3. *$\mathfrak{F}$ метанильпотентна и π-локальна.*

4. *$\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G})$ — класс всех абелевых композиционных факторов групп из $\mathfrak{G}$.*

5. *$H_{\mathfrak{X}}(p) = F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G}$ для каждого простого $p \in \pi$.*

6. *Если $\mathfrak{F}$ не π-нильпотентна, то $\mathfrak{G}$ является абелевой и однопорожденной.*

7. *Если $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{G}$, то*

$$\pi(A/\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$$

для каждого $p \in \pi$.

8. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_p$ — класс всех p-групп, $p \in \pi$, то*

$$\mathfrak{G}/\mathrm{O}_p(\mathfrak{G}) := \mathrm{form}(X/\mathrm{O}_p(X) \mid X \in \mathfrak{G})$$

есть однопорожденная формация.

9. *Если $\mathfrak{F}$ π-нильпотентна, $|\pi(\mathfrak{F})| > 1$ и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\mathfrak{G}$ является однопорожденной.*

Доказательство. 1. Предположим, что теорема неверна, и рассмотрим неабелеву простую группу $S \in \mathfrak{F}$. Пусть B — группа из $\mathfrak{G}$ такая, что $|B| > |G|$. Рассмотрим сплетение $X := S \wr B$. Тогда $X \in \mathfrak{H}$. Известно, что $\mathfrak{N}\,\mathrm{form}(G)$, где $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, является локальной формацией. Поэтому $\mathfrak{N}\,\mathrm{form}(G)$ $\mathfrak{X}$-локальна и, таким образом, $\mathfrak{H}$ содержится в $\mathfrak{N}\,\mathrm{form}(G)$. Получается, что $X \in \mathfrak{N}\,\mathrm{form}(G)$. Так как $\mathrm{F}(X) = 1$, имеем $X \in \mathrm{form}(G)$. Согласно [2, предложение A.18.5] база $S^\natural$ группы X является минимальной нормальной подгруппой в X. Поэтому $S^\natural$ изоморфна главному фактору группы G. Получили противоречие.

2. Предположим, что A — монолитическая примитивная группа из $\mathfrak{F}$. Убедимся в том, что $\mathrm{Soc}(A)$ абелев, а $A/\mathrm{Soc}(A)$ нильпотентна. Допустим, что это не так. Тогда либо $\mathrm{Soc}(A)$ неабелев, либо $\mathrm{Soc}(A)$ абелев и $A/\mathrm{Soc}(A)$ не нильпотентна. Пусть B — группа из $\mathfrak{G}$ такая, что $|B| > |G|$, и рассмотрим сплетение $D := A \wr B$. Если $\mathrm{Soc}(A)$ неабелев, то A — примитивная группа типа 2. По лемме 10 D также примитивная группа типа 2 и $\mathrm{Soc}(D) = \mathrm{Soc}(A)^\natural$. Так как $\mathrm{Soc}(D)$ не содержится в $\mathrm{F}(D)$, получаем, что $\mathrm{F}(D) = 1$. Теперь предположим, что $\mathrm{Soc}(A)$ абелев, но $A/\mathrm{Soc}(A)$ не нильпотентна. Так как $\mathrm{C}_A(\mathrm{Soc}(A)) = \mathrm{Soc}(A)$ и $A/\mathrm{Soc}(A) \neq 1$, то $\mathrm{Soc}(A)$ не содержится в $\mathrm{Z}(A)$. Согласно [2, предложение A.18.5] $\mathrm{Soc}(A)^\natural$ есть минимальная нормальная подгруппа в D. Очевидно, $\mathrm{Soc}(A)^\natural$ содержится в $\mathrm{F}(D)$, и так как $\mathrm{C}_D(\mathrm{Soc}(A)^\natural) = \mathrm{Soc}(A)^\natural$, получаем, что $\mathrm{F}(D) = \mathrm{Soc}(A)^\natural$.

Предположим, что $D \in \mathfrak{H}$. Тогда $D/\mathrm{F}(D) \in \mathrm{form}(G)$, ибо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\,\mathrm{form}(G)$. Если $\mathrm{F}(D) = 1$, то $D \in \mathrm{form}(G)$. Тогда $\mathrm{Soc}(D) = \mathrm{Soc}(A)^\natural$ — главный фактор D, изоморфный главному фактору G; противоречие. Если $\mathrm{Soc}(A)$ абелев и $A/\mathrm{Soc}(A)$ не нильпотентна, то $D/\mathrm{Soc}(A)^\natural \in \mathrm{form}(G)$. Рассмотрим такой главный фактор H/K группы A, что $\mathrm{Soc}(A) \leq K$ и $\mathrm{Z}(H/K) \neq A/K$. Из [2, предложение A.18.5] следует, что $H/K^\natural$ — минимальная нормальная подгруппа в $(A/K) \wr B$, изоморфной $(A \wr B)/K$. Поэтому $(H/K)^\natural$ — главный фактор группы $D/\mathrm{Soc}(A)^\natural$. Это означает, что $(H/K)^\natural$ изоморфен главному фактору группы G, что невозможно.

Мы доказали, что для каждой группы B из $\mathfrak{G}$ с условием $|B| > |G|$ сплетение $D := A \wr B$ не принадлежит $\mathfrak{H}$, а это означает, что $D^{\mathfrak{G}}$ не содержится подпрямо в $A^\natural$, базе группы D. По лемме 13 найдется такое простое число q, что класс $\mathfrak{S}_q$ всех q-групп содержится в классе $\mathrm{S}(\mathfrak{G})$ всех подгрупп групп из $\mathfrak{G}$.

С другой стороны, рассмотрим такую группу C из $\mathfrak{G}$, что $|C| > |G|$ и $E := A \wr C$. Мы знаем, что $E^{\mathfrak{G}}$ не содержится подпрямо в базе $A^\natural$ группы E. Пусть A_1 — первая копия группы A в $A^\natural$, и пусть M — проекция $E^{\mathfrak{G}}$ в A_1. Тогда M — собственная нормальная подгруппа в A_1. Согласно [3, лемма 1] $(A_1/M) \wr C$ есть фактор-группа группы $E/E^{\mathfrak{G}}$. Пусть A_0 — максимальная нормальная подгруппа из A_1, содержащая M. Тогда по утверждению 1 A_1/A_0 изоморфна C_p для некоторого простого p. В силу [2, лемма A.18.2] $(A_1/A_0) \wr C$ есть фактор-группа группы $(A_1/M) \wr C \in \mathfrak{G}$. Поэтому $C_p \wr C \in \mathfrak{G}$. Пусть N — диагональная подгруппа базы $C_p^\natural$ сплетения $C_p \wr C$. Тогда N — центральная минимальная подгруппа в $C_p \wr C$, изоморфная C_p. Мы можем применить [2, предложение IV.1.5] и тогда получаем $C_p \in \mathfrak{G}$.

Теперь предположим, что $p \neq q$, и рассмотрим q-группу Q. Мы знаем, что существует такая группа $G(Q)$ в $\mathfrak{G}$, что Q содержится в $G(Q)$. Пусть $X = C_p \wr G(Q)$ — соответствующее сплетение. Так как $X \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\,\mathrm{form}(G)$, получается, что $X/\mathrm{F}(X) \in \mathrm{form}(G)$. Поскольку $\mathrm{F}(X)$ — p-группа, $X/\mathrm{F}(X)$ имеет силовскую q-подгруппу, содержащую копию группы Q; противоречие. Следовательно, $p = q$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{S}_p\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Если это не так, мы можем рассмотреть группу $U \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}$ минимального порядка. Тогда $V = \mathrm{Soc}(U)$ — p-группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в U. Ввиду $C_p \in \mathfrak{G}$ имеем $U/V \neq 1$. Рассмотрим группу $W = A \wr (U^m/V^m)$, где $m = |G|$. Мы знаем, что $(U^m/V^m)^{\mathfrak{G}}$ не содержится подпрямо в базе $A^\natural$ группы W. Рассуждая, как и выше, получаем $C_p \wr (U^m/V^m) \in \mathfrak{G}$. Таким образом, $V^m \wr (U^m/V^m) \in \mathrm{Q}\,\mathrm{R}_0\big(C_p \wr (U^m/V^m)\big) \subseteq \mathfrak{G}$. Применяя [2, теоремы A.18.9, IV.1.14], выводим, что U^m принадлежит $\mathrm{Q}\,\mathrm{R}_0(V^m \wr (U^m/V^m)) \subseteq \mathfrak{G}$. Это противоречие показывает, что $\mathfrak{S}_p\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$.

Предположим, рассуждая от противного, что $\mathfrak{H}$ не совпадает с $\mathfrak{G}$, и возьмем группу $X \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{G}$ минимального порядка. Тогда $X^{\mathfrak{G}}$ — минимальная нормальная подгруппа в X и $X^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}$. По утверждению 1 $X^{\mathfrak{G}}$ есть r-группа для некоторого простого r. Так как $\mathfrak{S}_p\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, то r отлично от p. Рассматривая сплетение $C_r \wr G(Q)$ групп C_r и $G(Q)$, где $G(Q)$ — группа из $\mathfrak{G}$, содержащая p-группу Q, получаем, что класс всех p-групп содержится в формации, порожденной G; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{S}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_p\mathfrak{G} = \mathfrak{G} = \mathfrak{H}$. Это заключительное противоречие показывает, что A является расширением абелевой группы с помощью нильпотентной.

3. Предположим, что $\mathfrak{F}$ не метанильпотентна, и среди $\mathfrak{F}$-групп, не являющихся метанильпотентными, выберем группу U минимального порядка. Тогда U — монолитическая примитивная группа, так как класс всех метанильпотентных групп есть насыщенная формация. По утверждению 2 U является расширением абелевой группы с помощью нильпотентной. Но это противоречит выбору U. Значит, $\mathfrak{F}$ — метанильпотентная формация. По [7, теорема 1] $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-локальной формацией. Так как $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп, формация $\mathfrak{F}$ является π-локальной.

4. Рассмотрим $C_p \in \mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X}$. Поскольку $C_p \in \mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{H})$ и формация $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{X}$-локальна, то $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{F}$, то $C_p \in \mathfrak{F}$, что и требуется. Предположим, что $\mathfrak{S}_p \not\subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{X}$-локальна, отсюда следует, что $C_p \notin \mathfrak{F}$. Из [14, следствие 28] вытекает, что $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{G}$. Рассмотрим простое число $q \neq p$ такое, что $C_q \in \mathfrak{F}$ и $W = C_q \wr P$, где P — p-группа. Очевидно, $W \in \mathfrak{H}$, и поэтому $W/\operatorname{F}(W) \in \operatorname{form}(G)$. Поскольку $\operatorname{F}(W)$ — q-группа, то $P \in \operatorname{form}(G)$. Мы получили $\mathfrak{S}_p \subseteq \operatorname{form}(G)$, что невозможно. Поэтому $\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$.

5. Рассмотрим простое число $p \in \pi$. Если $\mathfrak{S}_p$ не содержится в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{S}_p$ не содержится также и в $\mathfrak{F}$, так что $H_{\mathfrak{X}}(p) = F_{\mathfrak{X}}(p) = \varnothing$. Предположим теперь, что $\mathfrak{S}_p$ содержится в $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{F}$, то можно применить [14, теорема 7] и тогда $H_{\mathfrak{X}}(p) = F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{S}_p \not\subseteq \mathfrak{F}$, то $C_p \in \mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G})$. Так как $\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, имеем $C_p \in \mathfrak{F}$; противоречие.

6. Предположим, что существует такое простое число $p \in \pi$, что $\mathfrak{F}$ не p-нильпотентна. Если H/K — p-главный фактор группы $U \in \mathfrak{F}$, то $U/\operatorname{C}_U(H/K)$ — нильпотентная p'-группа. Это означает, что $F_{\mathfrak{X}}(p) \subseteq \mathfrak{S}_p\mathfrak{N}_{p'}$, где $\mathfrak{N}_{p'}$ — класс всех нильпотентных p'-групп. Если $F_{\mathfrak{X}}(p) = \mathfrak{S}_p$, то каждый p-главный фактор группы $\mathfrak{F}$ централен. Так как это невозможно, приходим к неравенству $F_{\mathfrak{X}}(p) \neq \mathfrak{S}_p$ и можем рассмотреть такое простое число $q \neq p$, что $C_q \in F_{\mathfrak{X}}(p)$.

Предположим, что $\mathfrak{G}$ неабелева, и возьмем неабелеву $\mathfrak{G}$-группу B. Предположим, что $q \in \pi(B)$, и пусть L — подгруппа порядка q из B. Пусть m — натуральное число с условием $m > |G|$, и пусть $W = C_q \wr B^m$. Очевидно, $W \in F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G} = H_{\mathfrak{X}}(p)$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\operatorname{form}(G)$, получаем, что $H_{\mathfrak{X}}(p) \subseteq \mathfrak{S}_p\operatorname{form}(G)$ и, значит, $W \in \operatorname{form}(G)$. Рассмотрим $(C_q)^\natural L^m \leq W$. Согласно [2, лемма A.18.8] $(C_q)^\natural L^m \cong ((C_q)^{|B^m:L^m|} \wr L^m)$. Поэтому $C_q \wr L^m \in \mathrm{Q}((C_q)^\natural L^m)$ и тем самым класс нильпотентности $cl_q(C_q \wr L^m)$ группы $C_q \wr L^m$ не больше, чем класс нильпотентности силовских q-подгрупп из G. Так как $cl_q(C_q \wr L^m) \geq m+1$, получаем противоречие. Мы установили, что $q \notin \pi(B)$.

Рассмотрим алгебраическое замыкание F поля из q элементов и регулярный модуль FB. По теореме Машке $FB = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$, где V_i — неприводимый FB-модуль, $i = 1, 2, \dots, r$. Если $\dim V_i = 1$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, то $B/\operatorname{C}_B(V_i)$ абелева и, значит, $B' \le \bigcap \operatorname{C}_B V_i = 1$. Но это невозможно, так как B неабелева. Поэтому найдется неприводимый FB-модуль V такой, что $\dim V \ge 2$. Согласно [2, теорема B.5.23] $V \otimes \cdots^m \cdots \otimes V$ — неприводимый FB^m-модуль. Применяя [2, лемма B.5.14], приходим к существованию неприводимого $GF(q)B^m$-модуля W такого, что W_F содержит $V \otimes \cdots^m \cdots \otimes V$ в качестве подмодуля. Тогда соответствующее полупрямое произведение $R = [W]B^m$ принадлежит $F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G}$. Получается, что $R \in \operatorname{form}(G)$ и, значит, W изоморфна главному фактору группы G. Так как $\dim_F(W) \ge 2^m$, это дает противоречие. Поэтому $\mathfrak{G}$ — абелева формация.

Теперь покажем, что $\mathfrak{G}$ содержится в $\operatorname{form}(G)$. Если это не так, рассмотрим группу $U \in \mathfrak{G} \setminus \operatorname{form}(G)$ наименьшего порядка. Тогда U — абелева монолитическая группа и, значит, она является r-группой для некоторого простого числа r. Рассмотрим сплетение $W = C_q \wr U$. Имеем $W \in F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G} = H_{\mathfrak{X}}(p)$. Получается, что $W \in \operatorname{form}(G)$ и тем самым $U \in \operatorname{form}(G)$, что противоречит выбору U.

Так как $\mathfrak{F}$ разрешима, а $\mathfrak{G}$ абелева, $\mathfrak{H}$ разрешима. Поэтому G — разрешимая группа. Согласно [2, теорема VII.1.6] $\mathfrak{G}$ содержит только конечное число подформаций. Рассмотрим ряд

$$(1) = \mathfrak{G}_0 \subseteq \mathfrak{G}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{G}_{n-1} \subseteq \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G},$$

где $\mathfrak{G}_i$ — максимальная подформация из $\mathfrak{G}_{i+1}$. Очевидно, $\mathfrak{G} = \operatorname{form}(\mathfrak{G}_{n-1}, G_{n-1})$, где G_{n-1} — группа из $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}_{n-1}$. Кроме того, $\mathfrak{G}_{n-1} = \operatorname{form}(\mathfrak{G}_{n-2}, G_{n-2})$, где $G_{n-2} \in \mathfrak{G}_{n-1} \setminus \mathfrak{G}_{n-2}$. Повторяя этот процесс, имеем $\mathfrak{G} = \operatorname{form}(G_0, G_1, \dots, G_{n-1})$, где $G_i \in \mathfrak{G}_{i+1} \setminus \mathfrak{G}_i$. Поэтому $\mathfrak{G} = \operatorname{form}(G_0 \times G_1 \times \dots \times G_{n-1})$.

7. Рассмотрим простое $p \in \pi$. Пусть q — простое число из $\pi\big(A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)\big)$. Так как A метанильпотентна и $\operatorname{F}(A) \subset \operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)$, получаем, что $A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)$ нильпотентна. Кроме того, $\operatorname{O}_p(A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)) = 1$ и тем самым $p \notin \pi(A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A))$. Это означает, что $p \ne q$. Так как $A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A) \in F_{\mathfrak{X}}(p)$ и $A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A) \in \mathfrak{N}$, получается, что $C_q \in F_{\mathfrak{X}}(p)$. Рассуждая, как в п. 6, можно доказать, что $q \notin \pi(B)$. Следовательно, $\pi(A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$.

8. Пусть A — группа из $\mathfrak{G}$. Тогда

$$T := C_p \wr (A/\operatorname{O}_p(A)) \in \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = \mathfrak{H}.$$

По лемме 12 $\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(T) = C_p^{\#}$ — база группы T. Поэтому $A/\operatorname{O}_p(A) \cong T/C_p^{\#} \in \operatorname{form}(G/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(G))$ по теореме 7. Значит, $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$ содержится в $\operatorname{form}(G/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(G))$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{H} = \mathfrak{S}_p\mathfrak{G}$, получаем, что $G^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{S}_p$. Поэтому $G/\operatorname{O}_p(G) \in \mathfrak{G}$. Ввиду $\operatorname{O}_p(G) \le \operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(G)$ и $G/\operatorname{O}_p(G) \in \mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$ имеем $G/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(G) \in \mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$. Следовательно, $\operatorname{form}(G/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(G))$ содержится в $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$, и, таким образом, $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$ — однопорожденная формация.

9. Рассмотрим простые числа p и q такие, что $p \ne q$ и $C_p, C_q \in \mathfrak{F}$. По теореме 7 $\underline{h}(p)$ и $\underline{h}(q)$ — однопорожденные формации. Рассмотрим две группы A и B такие, что $\underline{h}(p) = \operatorname{form}(A)$ и $\underline{h}(q) = \operatorname{form}(B)$. Так как $\mathfrak{F}$ p-нильпотентна для каждого простого $p \in \pi$ и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\mathfrak{F}$ нильпотентна. Поэтому $\underline{h}(p)$ и $\underline{h}(q)$ содержатся в $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что A и B принадлежат $\mathfrak{G}$ и, значит, $\operatorname{form}(A \times B) \subseteq \mathfrak{G}$. Предположим, что $\mathfrak{G}$ не содержится в $\operatorname{form}(A \times B)$, и рассмотрим группу D минимального порядка из $\mathfrak{G} \setminus \operatorname{form}(A \times B)$. Тогда D — монолитическая

группа. Рассмотрим $R = \mathrm{Soc}(D)$. Ясно, что либо $\mathrm{O}_p(D) = 1$, либо $\mathrm{O}_q(D) = 1$. Предположим, что $\mathrm{O}_p(D) = 1$, и рассмотрим сплетение $W = C_p \wr D$. Так как $W \in \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = \mathfrak{H}$ и $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(W) = C_p^{\#}$ по лемме 12, то $D \cong W/C_p^{\#} \in \underline{h}(p) = \mathrm{form}(A) \subseteq \mathrm{form}(A \times B)$. Если $\mathrm{O}_q(D) = 1$, то получаем $D \in \underline{h}(q) = \mathrm{form}(B) \subseteq \mathrm{form}(A \times B)$. Это противоречие показывает, что $\mathfrak{G} = \mathrm{form}(A \times B)$. $\square$

Наша следующая цель — доказать, что обращение теоремы 15 имеет место при условии, что $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. Нам понадобится

Лемма 16. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{X}$-локальная формация. Предположим, что $\mathfrak{F}$ имеет интегрированную $\mathfrak{X}$-формационную функцию f такую, что*

• *$f(p) = \varnothing$, за исключением конечного числа простых чисел $p \in \mathrm{char}(\mathfrak{X})$.*

• *Если $f(p) \neq \varnothing$, то найдется такая группа G_p, что $f(p) = \mathrm{form}(G_p)$.*

• *Существует такая группа H, что для каждой группы $E \in \mathfrak{X}'$ имеет место $f(E) = \mathrm{form}(H)$.*

Тогда $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $\mathfrak{X}$-локальная формация.

Доказательство. Пусть $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ — множество таких простых чисел p, что $f(p) \neq \varnothing$. Рассмотрим группу

$$X = H \times (C_{p_1} \wr (G_{p_1}/\,\mathrm{O}_{p_1}(G_{p_1}))) \times \dots \times (C_{p_n} \wr (G_{p_n}/\,\mathrm{O}_{p_n}(G_{p_n}))).$$

Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$. Рассмотрим $\mathfrak{X}$-формационную функцию g такую, что $\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X) = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(g)$. Если E — группа из $\mathfrak{X}'$, то $H \in f(E) \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, по лемме 9 $C_{p_i} \wr (G_{p_i}/\,\mathrm{O}_{p_i}(G_{p_i})) \in \mathfrak{S}_{p_i}\,\mathrm{form}(G_{p_i}) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому $X \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{X}$-локальна, получаем, что $\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X) \subseteq \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ не содержится в $\mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$, то можно рассмотреть группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$. Тогда G монолитична и $G/N \in \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$, где $N = \mathrm{Soc}(G)$. Если N — $\mathfrak{X}'$-главный фактор группы G, то $G \in \mathrm{form}(H) \subseteq \mathrm{form}(X) \subseteq \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$; противоречие. Теперь предположим, что N — $\mathfrak{X}$-главный фактор группы G. Если $p \in \pi(N)$, то $G/\,\mathrm{C}_G(N) \in f(p) = \mathrm{form}(G_p)$. Так как $\mathrm{O}_p(G/\,\mathrm{C}_G(N)) = 1$, то $G/\,\mathrm{C}_G(N) \in \mathrm{form}(G_p/\,\mathrm{O}_p(G_p))$ по лемме 11. Пусть $T_p = C_p \wr \big(G_p/\,\mathrm{O}_p(G_p)\big)$. Тогда $T_p \in \mathrm{form}(X) \subseteq \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$ и $\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(T_p) = C_p^{\#}$ согласно лемме 11. Поэтому $G_p/\,\mathrm{O}_p(G_p) \cong T_p/C_p^{\#} \in g(p)$. Тем самым $\mathrm{form}(G_p/\,\mathrm{O}_p(G_p)) \subseteq g(p)$ и, значит, $G/\,\mathrm{C}_G(N) \in g(p)$. Применяя лемму 8, получаем $G \in \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(g)$, что противоречит выбору G. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathrm{form}_{\mathfrak{X}}(X)$. $\square$

Теорема 17. *Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ — $\mathfrak{X}$-локальная формация, являющаяся произведением нетривиальных формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *$\mathfrak{F}$ — метанильпотентная однопорожденная π-локальная формация;*

2) *$\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G})$ — класс всех абелевых композиционных факторов групп из $\mathfrak{G}$;*

3) *$H_{\mathfrak{X}}(p) = F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G}$ для каждого простого числа $p \in \pi$;*

4) *если $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{G}$, то $\pi(A/\,\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$ для каждого $p \in \pi$;*

5) *если $\mathfrak{F}$ не π-нильпотентна, то $\mathfrak{G}$ является абелевой и однопорожденной;*

6) *если $\mathfrak{F}$ π-нильпотентна, то либо $\mathfrak{G}$ однопорожденная, либо $\mathfrak{G}/\,\mathrm{O}_p(\mathfrak{G}) := \mathrm{form}(G/\,\mathrm{O}_p(G) \mid G \in \mathfrak{G})$ однопорожденная для каждого $p \in \pi$.*

Если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\mathfrak{H}$ — однопорожденная $\mathfrak{X}$-локальная формация.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathfrak{H} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(h)$, где

$$\begin{cases} h(p) = \underline{h}(p), & \text{если } p \in \pi, \\ h(E) = \mathrm{form}(H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \mid H \in \mathfrak{H}) & \text{для каждой } E \in \mathfrak{X}'. \end{cases}$$

С другой стороны, так как $\mathfrak{F}$ — однопорожденная π-локальная формация и либо $\mathfrak{G}$ однопорожденная, либо $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G}) := \operatorname{form}(G/\operatorname{O}_p(G) \mid G \in \mathfrak{G})$ однопорожденная для каждого простого $p \in \pi$, множество $\pi(\mathfrak{H})$ конечно. Поэтому равенство $h(p) = \varnothing$ справедливо, за исключением конечного числа простых чисел из π. Пусть $p \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi$. Так как формация $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{X}$-локальна, то $C_p \in \mathfrak{H}$ и $h(p) = \underline{h}(p) \neq \varnothing$. Следовательно, либо $C_p \in \mathfrak{F}$, либо $C_p \in \mathfrak{G}$. В обоих случаях $C_p \in \mathfrak{F}$, так как $\mathrm{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$ содержится в $\underline{h}(p)$, поскольку сплетение $C_p \wr X$ принадлежит $\mathfrak{H}$ для $X \in \mathfrak{G}$ с условием $\operatorname{O}_p(\mathfrak{G}) = 1$.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ не π-нильпотентна. В этом случае формация $\mathfrak{G}$ является абелевой и однопорожденной. Докажем, что конечное множество подформаций содержит как формация $h(p)$, где $p \in \pi$ и $h(p) \neq \varnothing$, так и формация $h(E)$, где $E \in \mathfrak{X}'$.

Рассмотрим простое число $p \in \pi$ такое, что $h(p) \neq \varnothing$. Принимая во внимание, что $H_{\mathfrak{X}}(p) = F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G}$ для каждого простого числа $p \in \pi$, заключаем, что $\underline{h}(p) \subseteq \underline{f}(p) \circ \mathfrak{G}$. Кроме того, формация $\underline{f}(p)$ однопорожденная по теореме 7. Так как $\mathfrak{F}$ метанильпотентна, то $\underline{f}(p)$ нильпотентна. С другой стороны, $\pi(\underline{f}(p)) \cap \pi(\mathfrak{G}) = \varnothing$ по условию 4. Согласно [15] формация $\underline{f}(p) \circ \mathfrak{G}$ однопорожденная. Поскольку $\underline{f}(p) \circ \mathfrak{G}$ разрешима, ввиду [2, теорема VII.1.6] она содержит только конечное множество подформаций, и таким же свойством обладает $\underline{h}(p)$. Пусть теперь $H \in \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$. Так как $H^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{E}\,\mathfrak{X}$, то $H^{\mathfrak{G}} \leq H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}}$. Поэтому $H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in \mathfrak{G}$. Следовательно, $h(E) \subseteq \mathfrak{G}$ для каждой группы $E \in \mathfrak{X}'$. Применяя [2, теорема VII.1.6], получаем, что $\mathfrak{G}$ содержит только конечное множество подформаций, и такое же свойство есть у формации $h(E)$.

Если $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{X}$-локальная подформация из $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(m)$, где

$$\begin{cases} m(p) = \underline{m}(p), & \text{если } p \in \pi, \\ m(E) = \operatorname{form}(M/M_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \mid M \in \mathfrak{M}) & \text{для каждой } E \in \mathfrak{X}'. \end{cases}$$

Замечаем, что $m(p) \subseteq h(p)$ для каждого $p \in \pi$ и $m(E) \subseteq h(E)$ для каждой группы $E \in \mathfrak{X}'$. Значит, имеется только конечное множество $\mathfrak{X}$-локальных подформаций $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$. Рассмотрим ряд $(1) = \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{H}_{n-1} \subseteq \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}_i$ — максимальная $\mathfrak{X}$-локальная подформация из $\mathfrak{H}_{i+1}$. Очевидно, $\mathfrak{H} = \operatorname{form}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{H}_{n-1}, G_{n-1})$, где G_{n-1} — группа из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}_{n-1}$. Кроме того, $\mathfrak{H}_{n-1} = \operatorname{form}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{H}_{n-2}, G_{n-2})$, где $G_{n-2} \in \mathfrak{H}_{n-1} \setminus \mathfrak{H}_{n-2}$. Повторяя этот процесс, получаем, что $\mathfrak{H} = \operatorname{form}_{\mathfrak{X}}(G_0, G_1, \ldots, G_{n-1})$, где $G_i \in \mathfrak{H}_{i+1} \setminus \mathfrak{H}_i$. Значит, $\mathfrak{H} = \operatorname{form}_{\mathfrak{X}}(G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_{n-1})$, и $\mathfrak{H}$ — однопорожденная $\mathfrak{X}$-локальная формация.

Теперь предположим, что формация $\mathfrak{F}$ π-нильпотентна. Так как $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, формация $\mathfrak{F}$ на самом деле нильпотентна.

Пусть p — простое число из π такое, что $h(p) \neq \varnothing$. Тогда $h(p) = \underline{h}(p) = \operatorname{form}(H/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(H) \mid H \in \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{G}$. Следовательно, $h(p) = \mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$, поскольку $\operatorname{O}_p(H/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(H)) = 1$ для каждой группы $H \in \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{G}$ является однопорожденной, то таковой является и $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G})$ ввиду леммы 11. Следовательно, формация $h(p)$ является однопорожденной для всех $p \in \pi$.

Докажем, что $h(E)$ является однопорожденной формацией для $E \in \mathfrak{X}'$. Имеем $h(E) \subseteq \mathfrak{G}$, потому что если $H \in \mathfrak{H}$, то $H^{\mathfrak{G}} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathrm{E}\,\mathfrak{X}$ и, следовательно, $H^{\mathfrak{G}} \leq H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}}$.

Предположим, что $\mathfrak{G}$ — однопорожденная формация, и рассмотрим группу T такую, что $\mathfrak{G} = \operatorname{form}(T)$. Докажем, что $h(E) = \operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}})$. Рассмотрим группу $H \in \mathfrak{H}$. Мы знаем, что $H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in \mathfrak{G}$. Отсюда согласно лемме 11 следует, что $H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in \operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}})$. Значит, $h(E) \subseteq \operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}})$. С другой стороны, $T \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in h(E)$ и $\operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}}) \subseteq h(E)$.

Предположим, что $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G}) = \operatorname{form}(T)$. Мы хотим доказать, что $h(E) = \operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}})$. Если $H \in \mathfrak{H}$, то $H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in \mathfrak{G}$. Так как $(H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}})_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} = 1$, по лемме 11 $H/H_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in \operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}})$. С другой стороны, поскольку $T \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}$, имеем $T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}} \in h(E)$ и $\operatorname{form}(T/T_{\mathrm{E}\,\mathfrak{X}}) \subseteq h(E)$.

Теперь мы можем применить лемму 16 и получаем, что $\mathfrak{H}$ — однопорожденная $\mathfrak{X}$-локальная формация. $\square$

Следующий результат получается как комбинация теорем 15 и 17.

Теорема 18. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс простых групп такой, что $\pi = \pi(\mathfrak{X}) = \operatorname{char}\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ — $\mathfrak{X}$-локальная формация такая, что $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. Предположим, что формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ нетривиальны и либо $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$, либо $\mathfrak{S}_p\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}$ для всех простых $p \in \pi$. Тогда $\mathfrak{H}$ является однопорожденной $\mathfrak{X}$-локальной формацией тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *$\mathfrak{F}$ — метанильпотентная и однопорожденная локальная формация;*

2) *$\operatorname{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\operatorname{K}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G})$ — класс всех абелевых композиционных факторов групп из $\mathfrak{G}$;*

3) *$H_{\mathfrak{X}}(p) = F_{\mathfrak{X}}(p) \circ \mathfrak{G}$ для каждого простого числа $p \in \pi$;*

4) *если $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{G}$, то $\pi(A/\operatorname{C}^{\mathfrak{X}_p}(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$ для каждого $p \in \pi$;*

5) *если $\mathfrak{F}$ не π-нильпотентна, то $\mathfrak{G}$ является абелевой и однопорожденной;*

6) *если $\mathfrak{F}$ π-нильпотентна, то либо формация $\mathfrak{G}$ однопорожденная, либо формация $\mathfrak{G}/\operatorname{O}_p(\mathfrak{G}) := \operatorname{form}(G/\operatorname{O}_p(G) \mid G \in \mathfrak{G})$ является однопорожденной для каждого $p \in \pi$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{X}$-локальная формация, порожденная группой G. По теореме 15 $\mathfrak{F}$ π-локальна. Так как $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Поскольку $\mathfrak{F}$ метанильпотентна, $\underline{f}(p)$ нильпотентна. Согласно [2, теорема IV.1.16] формация $\underline{f}(p)$ S-замкнута. Ввиду [2, предложение IV.3.14] $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} = \operatorname{form}_{\mathfrak{X}}(G) \subseteq \operatorname{lform}(G)$. В силу [16] $\operatorname{lform}(G)$ имеет только конечное множество S-замкнутых подформаций, и таким же свойством обладает и $\mathfrak{F}$. Рассмотрим ряд $(1) = \mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{F}_{n-1} \subseteq \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}_i$ — максимальная S-замкнутая локальная подформация из $\mathfrak{F}_{i+1}$. Так как каждая локальная подформация в $\mathfrak{F}$ S-замкнута, $\mathfrak{F}_i$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}_{i+1}$. Очевидно, $\mathfrak{F} = \operatorname{lform}(\mathfrak{F}_{n-1}, G_{n-1})$, где G_{n-1} — группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_{n-1}$. Кроме того, $\mathfrak{F}_{n-1} = \operatorname{lform}(\mathfrak{F}_{n-2}, G_{n-2})$, где $G_{n-2} \in \mathfrak{F}_{n-1} \setminus \mathfrak{F}_{n-2}$. Повторяя этот процесс, получаем, что $\mathfrak{F} = \operatorname{lform}(G_0, G_1, \dots, G_{n-1})$, где $G_i \in \mathfrak{F}_{i+1} \setminus \mathfrak{F}_i$. Поэтому $\mathfrak{F} = \operatorname{lform}(G_0 \times G_1 \times \dots \times G_{n-1})$.

Обратное утверждение следует из теоремы 17, поскольку если $\mathfrak{F}$ — однопорожденная локальная формация, то она является и однопорожденной π-локальной формацией, так как $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$. $\square$

4. Заключительные замечания

1. Основной результат работы [15] вытекает из нашей теоремы 18 в случае, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех простых групп, а главный результат работы [10] есть следствие нашей теоремы 18 для случая, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех абелевых простых групп.

2. Представление нетривиальной формации $\mathfrak{H}$ в виде произведения $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_t$, где $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_t$ — формации, называется *неприводимым*, если $\mathfrak{H} \neq$

$\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_{i-1}\mathfrak{H}_{i+1} \dots \mathfrak{H}_t$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Предположим, что $\mathfrak{H}$ — однопорожденная $\mathfrak{X}$-локальная формация. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_t$ — неприводимое представление формации $\mathfrak{H}$, $t \geq 4$, и $\pi(\mathfrak{H}_i) \subseteq \pi$ для всех $i = 1, 2, 3$, то $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ — метанильпотентная однопорожденная локальная формация. Согласно основному результату из [3] $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ нильпотентны, $\mathfrak{H}_3$ абелева и $\mathfrak{H}_2 \cap \mathfrak{H}_3 = (1)$. Кроме того, $|\pi(\mathfrak{H}_1)| > 1$ по теореме 18. Это невозможно, в чем можно убедиться, рассматривая подходящие нетривиальные группы $A \in \mathfrak{H}_1$, $B \in \mathfrak{H}_2$, $C \in \mathfrak{H}_3$ и сплетение $A \wr (B \wr C)$. Значит, $t \leq 3$. Предположим, что $t = 3$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$. Так как $\mathfrak{H}_3 \neq \mathfrak{H}_1$, то $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ — метанильпотентная однопорожденная формация. Если $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ нильпотентна, то либо $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2$, либо $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$ согласно [17, следствие A.2]. Ясно, что равенство $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2$ противоречит неприводимости факторизации. Следовательно, $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1$. С другой стороны, если $\mathfrak{H}_1$ не нильпотентна, то $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ абелева по теореме 18. Отсюда $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_3$ или $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3 \subseteq \mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$, так как $\mathfrak{H}_2$ нильпотентна. Но это невозможно, поскольку факторизация неприводима. Значит, $\mathfrak{H}_1$ нильпотентна, и, таким образом, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$, и мы снова получаем противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$ не нильпотентна. Согласно теореме 18 $\mathfrak{H}_3$ абелева. Предположим, что $\mathfrak{H}_1$ не нильпотентна. Тогда $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ абелева. Но это невозможно, так как мы можем рассмотреть простое число p такое, что $C_p \in \mathfrak{H}_2$, взять группу $X \in \mathfrak{H}_3$, $X \neq 1$, и построить сплетение $C_p \wr X$, которое принадлежит $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3$ и неабелево. Поэтому $\mathfrak{H}_1$ не нильпотентна. Предположим, наконец, что $\mathfrak{H}_2$ не нильпотентна, и пусть X — не нильпотентная группа минимального порядка из $\mathfrak{H}_2$. Тогда $\mathrm{Soc}(X) = \mathrm{F}(X)$ — q-группа. Пусть $p \neq q$ — простое число, делящее порядок $X/\mathrm{F}(X)$, и рассмотрим $T = C_p \wr X$. По теореме 18 $C_p \in \mathfrak{H}_1$ и, таким образом, $T \in \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$. Очевидно, что T не метанильпотентна. Следовательно, $\mathfrak{H}_2$ нильпотентна. Теперь предположим, что $q \in \pi(\mathfrak{H}_2)$. Пусть $p \neq q$ — простое число такое, что $C_p \in \mathfrak{H}_1$. Тогда если $A = C_p \wr C_q \in \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$, то $A/\mathrm{C}^{\mathfrak{X}_p}(A) \cong C_q$. По теореме 18 $q \notin \pi(\mathfrak{H}_3)$.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 19. *Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_t$ — неприводимое представление однопорожденной $\mathfrak{X}$-локальной формации и $\pi(\mathfrak{H}_i) \subseteq \pi$ для всех $i = 1, 2, 3$, то $t \leq 3$, и если $t = 3$, то $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ нильпотентны, $\mathfrak{H}_3$ абелева и $\pi(\mathfrak{H}_2) \cap \pi(\mathfrak{H}_3) = \varnothing$.*

Итак, теоремы 18 и 19 расширяют главные результаты работ [3, 11].

Авторы весьма благодарны профессору А. Н. Скибе за его помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмелькин А. Л.* Сплетения и многообразия групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 1. С. 149–170.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Skiba A. N.* On nontrivial factorisations of one-generated local formations of finite groups // Contemp. Math. 1992. V. 131, N 1. P. 363–374.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Белорусская наука, 1997.
5. *Шеметков Л. А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 2. С. 179–188.
6. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
7. *Ballester-Bolinches A., Calvo C., Esteban-Romero R.* A question of the Kourovka Notebook on formation products // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. V. 68, N 3. P. 461–470.
8. *Förster P.* Projective Klassen endlicher Gruppen IIa. Gesättigte Formationen: ein allgemeiner Satz von Gaschütz–Lubeseder–Baer Typ // Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona. 1985. V. 29, N 2–3. P. 39–76.

9. *Скиба А. Н.* О факторизациях композиционных формаций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 3. С. 389–395.

10. *Го Вэньбинь, Скиба А. Н.* Факторизации однопорожденных композиционных формаций // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 545–560.

11. *Guo Wenbin, Shum K. P.* Uncancellative factorizations of Baer-local formations // J. Algebra. 2003. V. 267, N 2. P. 654–672.

12. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

13. *Shemetkov L. A.* On partially saturated formations and residuals of finite groups // Commun. Algebra. 2001. V. 29, N 8. P. 4125–4137.

14. *Ballester-Bolinches A., Calvo C., Esteban-Romero R.* Products of formations of finite groups // J. Algebra. 2006. V. 299, N 2. P. 602–615.

15. *Скиба А. Н.* Произведение формаций // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 574–583.

16. *Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A.* On lattices of p-local formations of finite groups // Math. Nachr. 1977. Bd 186. S. 57–65.

17. *Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D.* Some questions of the Kourovka notebook concerning formation products // Commun. Algebra. 1998. V. 26, N 5. P. 1581–1587.

Статья поступила 6 июня 2008 г.

Adolfo Ballester-Bolinches (Баллестер-Болинше Адольфо),
Clara Calvo (Кальво Клара)
Departament d'Algebra,
Universitat de Valencia,
C\Dr. Moliner, 50
46100 Burjassot (Valencia), Spain.
Adolfo.Ballester@uv.es, Clara.Calvo@uv.es